普通高等教育“十五”国家级规划教材

理论力学（I）

第六版

哈尔滨工业大学理论力学教研室 编

6)

高等教育出版社

ISBN 7-04-011070-9



定　价: 29.20元

144

普通高等教育"十五"国家级规划教材

理论力学(Ⅰ)

第六版

哈尔滨工业大学理论力学教研室　编



高等教育出版社

内容提要

本书第一版至第五版受到广大教师和学生的欢迎，本版仍保持前五版理论严谨、逻辑清晰、由浅入深、宜于教学的风格和体系，适当提高了起点，增加了部分新内容，以适应 21 世纪的需要。本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材。

本版分为两册，第 I 册内容包括静力学、运动学、动力学普遍定理、达朗贝尔原理及虚位移原理等，一般中等学时的专业只用第 I 册即可；第 II 册内容包括非惯性系中的质点动力学、碰撞、分析力学基础、机械振动基础、刚体定点运动与自由体运动及变质量动力学等，各专业可根据需要来选取。全书配有大量思考题和习题。

本书可作为高等院校工科各专业理论力学课程的教材，可作为夜大、函授大学、职工大学相应专业的自学和函授教材，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

理论力学. I/哈尔滨工业大学理论力学教研室编.
6 版. －北京：高等教育出版社，2002.8
高等学校教材
ISBN 7－04－011070－9

I.理…　II.哈…　III.理论力学－高等学校－教材　IV.031

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 043274 号

理论力学（I）（第六版）
哈尔滨工业大学理论力学教研室　编

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010－64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京人卫印刷厂		
		版　　次	1961 年 7 月第 1 版
开　　本	787×960　1/16		2002 年 8 月第 6 版
印　　张	25.5	印　　次	2002 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	470 000	定　　价	29.20 元

第六版序

本书从1961年出版以来，已经修订多次，这次是第六版。前五版受到了广大教师和学生的欢迎，曾获国家优秀教材奖。

为适应21世纪的需要，本书对第五版进行了修订。通过多年的教学实践，本书的体系和风格已经比较成熟，大多数使用者希望保留和发扬这一风格。本版仍保留前五版的风格，坚持理论严谨、逻辑清晰、由浅入深的原则，适当提高起点，增加部分新内容。本版分为两册。第Ⅰ册为基础部分，包含了理论力学的基本内容，包括：静力学、运动学、动力学三大基本定理、达朗贝尔原理、虚位移原理等，一般中等学时的专业只用第Ⅰ册即可。第Ⅱ册为专题部分，内容包括：非惯性系动力学、碰撞、分析力学基础（含第一类拉格朗日方程）、机械振动基础、定点运动及变质量动力学。不同专业可选用不同的专题。

本书适用于高等工科院校四年制机械、土建、交通、水利、动力、航空航天等专业，也可供其他专业选用，或作为自学、函授教材。

本版由王铎教授和程靳教授主编，经教材审定小组讨论，第Ⅰ册由王宏钰教授（第一，二，三，四，五章），程靳教授（第六，七，八，九章），赵经文教授（第十，十一，十二，十三章），程燕平副教授（第十四，十五章）执笔；第Ⅱ册由程靳教授（第一，五，六章），程燕平副教授（第二章），孙毅教授（第三章）执笔，第四章由程靳教授与程燕平副教授共同执笔；全书由程靳教授和程燕平副教授统稿。

本版由清华大学贾书惠教授审阅，并提出了很多宝贵意见，特此致谢。

本书虽经多次修订，但限于我们的水平和条件，缺点和错误仍在所难免，衷心希望大家提出批评和指正，使本书不断提高和完善。

第 五 版 序

本书为第五版。初版于1961年出版,1962年和1965年经过修订,出版了第二版上、下册和第三版上册,第三版下册因故未能正式出版。1981年出版的第四版上、下册对以前的版本作了较大的调整,在各章末增加了小结、思考题和习题,更有利于教师的讲授,也便于学生自学。本书第四版在国内得到了广泛的选用,荣获国家优秀教材奖。本书第四版出版十余年来,也收到了很多教师和读者的宝贵意见和建议,对此我们深表感谢。

为适应我国科学技术和生产建设的发展,适应学生水平的普遍提高,我们根据近年来的教学实践和兄弟院校的意见,对本书第四版作了适当的修订。修订后的第五版符合国家教委新颁布的“高等学校工科本科理论力学课程教学基本要求”,适用于四年制机械、土建、水利、航空和动力等专业,可供企业管理、化工、电器等其他专业选用,亦可作为自学和函授教材。

本版保持了第四版的体系和风格,继承了前一版便于教师讲授和学生自学的优点,在下列几方面作了一些修改:减少了与数学、物理等课程简单重复的内容;删去了图解静力学一章;减少了几何法求解问题的篇幅,适当加强了便于计算机应用的解析方法和综合分析问题的训练;合并了部分章节,精炼了文字叙述;减少了部分简单习题,扩展了习题的类型,适当增加了综合练习题;附录中给出了几个有关静力学内容的微机计算程序。

本版采用了GB 3100～3102—93《量和单位》中规定的有关通用符号。

本修订版由王铎教授和赵经文教授任主编,经教材修订小组讨论,由王宏钰教授(静力学)、程靳教授(运动学)、赵经文教授(动力学)和陈明副教授、程燕平副教授(习题)等执笔,并由赵经文教授统稿,最后由王铎教授定稿完成。

本版由清华大学贾书惠教授和华东船舶工业学院董雷强副教授审阅,他们对本书提出了很多宝贵意见,特此致谢。

本书虽经多次修订,但由于水平和条件所限,还会有不少缺点和错误,诚恳欢迎读者批评指正。衷心希望大家对本书提出修改意见和建议,使之能不断地提高和改进。

哈尔滨工业大学理论力学教研室

1996年10月

第四版序

本书初版于1961年出版。1962年和1965年经过修订，出版了第二版上、下册和第三版上册，第三版下册因故未能正式出版。

为了适应社会主义现代化建设的需要，我们根据多年来的教学实践并按照高等学校工科力学教材编审委员会理论力学编审小组1980年审订的高等工业学校《理论力学教学大纲》(草案)(四年制机械、土建、水利、航空等类专业试用)的要求，对本书在前三版的基础上进行了修订，作为第四版出版。本版对以前各版的章节作了适当的调整，对各章的内容、例题作了增删和修订；为便于自学，在各章末增加了小结、思考题和习题，并在书末附有习题答案。

本版采用国际单位制。

本版基本内容课内为120学时。附有“*”号的章节，不是120学时内的基本内容，可根据专业需要选取。绪论的内容不必在第一次课上全部讲授，例如关于理论力学的研究方法可在课程结束时加以总结。

本版的修订由王铎同志主编，修订方案经过教材修订小组讨论，由王宏钰(第一章至第八章)、洪敏谦(绪论和第九章至第二十章)、邹经湘(第二十一章至第二十四章)、杨英烈(静力学习题)、于永德(运动学和动力学习题)同志执笔，并由洪敏谦同志统稿，最后由王铎同志校阅。

本版上册插图部分底图由冯年寿同志重新绘制。

本版由北京航空学院黄克累和张大源同志审阅，并提出了很好的意见，特此致谢。

本书虽经多次修订，但限于我们的水平，还会有不少缺点和错误，衷心希望读者批评指正。

哈尔滨工业大学理论力学教研室

1981年6月

第三版序

为了适应当前教学改革的形势，我们对本书第二版作了较全面的修订。在修订中，注意了贯彻“理论联系实际”的方针和“少而精”的原则。

修订时，注意了工科院校的特点，删去了不适合一般专业需要的部分，精简了次要内容，合并了一些章节；在内容叙述和定理推证方面力求物理概念清晰；各章问题尽量从工程实际引出，并增加了联系实际的例子。

本修订版在修订前，经过教研室全体同志讨论，然后分工执笔修改，最后由王铎同志统一校订。本版全部插图都系重新绘制。

本修订版由北京航空学院黄克累同志审阅，并提出了很多宝贵的意见。

由于我们对教学改革精神领会不够，并受政治和业务水平所限，错误和缺点在所难免，衷心地希望大家批评指正。

哈尔滨工业大学理论力学教研室

1965年8月

第二版序

本书的第一版出版后，我们听取了兄弟院校教师和读者的意见，对它进行了修改。

在本版中，我们对全书的内容和文句作了必要的增删和修改，也订正了第一版中的印刷错误。

本版的修改工作是由洪敏谦同志执笔和完成的。修改的内容曾由教研室部分教师参加讨论。改写的章节中的第二十章§7和第二十九章§10分别由陈长庚和谈开孚同志执笔。最后，由王铎同志对全书进行了校阅。

为了提高出版质量，本版中的部分附图是由屠良尧等同志重新绘制的。

本书虽经修改，但由于水平所限，缺点和错误仍在所难免，衷心地希望大家提出批评和指正。

哈尔滨工业大学理论力学教研室

1962年3月

第一版序

本书是根据1959年我教研室所编理论力学讲义经过局部修改而出版的。几年来，特别是在贯彻党的教育方针以后，在党的领导下，学习先进经验，并结合我们的教学实践，总结了点滴体会，先后编写了一些讲义，供校内同学参考。由于讲义本来只反映本校的局部情况，加以出版时间仓促，没有来得及根据兄弟院校的教学经验多加修改。

本书的篇幅只大体适合于机械、动力、电机、土建等类各专业理论力学课程的要求。对变质量力学、物体在中心力场中的运动、回转仪理论和振动理论等专题只作了简略的叙述。因此有必要结合学校和专业的特点，增删部分内容，指定相应的参考资料。

总之，本书无论在体系、篇幅、内容、教学方法等各个方面都不够成熟，必须随着教育改革的不断深入发展，吸取兄弟教研室的宝贵经验，大力加以修改，热烈地希望兄弟院校的教师和同学提出批评指正。

本书是在党的直接领导和关怀下，由教研室同志集体编写的，参加的主要成员有童秉纲、钟宏九、黄文虎、谈开孚、叶谋仁等。

最后，衷心地感谢兄弟院校的理论力学教研室，他们为了促使本书提高质量，早日出版，对本书提出了许多宝贵的修改意见，主动地为本书提供了他们所编讲义的个别章节及例题，并承清华大学理论力学教研组有关同志对全书进行了校阅和订正。

哈尔滨工业大学理论力学教研室

1961年4月于哈尔滨

主要符号表

$\boldsymbol{a}$	加速度	L	拉格朗日函数
$\boldsymbol{a}_n$	法向加速度	$\boldsymbol{L}_O$	刚体对点 O 的动量矩
$\boldsymbol{a}_t$	切向加速度	$\boldsymbol{L}_C$	刚体对质心的动量矩
$\boldsymbol{a}_a$	绝对加速度	m	质量
$\boldsymbol{a}_r$	相对加速度	$\boldsymbol{M}_z$	对 z 轴的矩
$\boldsymbol{a}_e$	牵连加速度	$\boldsymbol{M}$	力偶矩,主矩
$\boldsymbol{a}_C$	科氏加速度	$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$	力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的矩
A	面积,自由振动振幅	$\boldsymbol{M}_I$	惯性力的主矩
e	恢复因数	n	质点数目
f	动摩擦因数	O	参考坐标系的原点
f_s	静摩擦因数	$\boldsymbol{p}$	动量
$\boldsymbol{F}$	力	P	重量,功率
$\boldsymbol{F}'_R$	主矢	q	载荷集度,广义坐标
$\boldsymbol{F}_s$	静滑动摩擦力	Q	广义力
$\boldsymbol{F}_N$	法向约束力	r	半径
$\boldsymbol{F}_{Ie}$	牵连惯性力	$\boldsymbol{r}$	矢径
$\boldsymbol{F}_{IC}$	科氏惯性力	$\boldsymbol{r}_O$	点 O 的矢径
$\boldsymbol{F}_I$	惯性力	$\boldsymbol{r}_C$	质心的矢径
$\boldsymbol{g}$	重力加速度	R	半径
h	高度	s	弧坐标,频率比
$\boldsymbol{i}$	x 轴的基矢量	t	时间
$\boldsymbol{I}$	冲量	T	动能,周期
$\boldsymbol{j}$	y 轴的基矢量	$\boldsymbol{v}$	速度
J_z	刚体对 z 轴的转动惯量	$\boldsymbol{v}_a$	绝对速度
J_{xy}	刚体对 x,y 轴的惯性积	$\boldsymbol{v}_r$	相对速度
J_C	刚体对质心的转动惯量	$\boldsymbol{v}_e$	牵连速度
k	弹簧刚度系数	$\boldsymbol{v}_C$	质心速度
$\boldsymbol{k}$	z 轴的基矢量	V	势能,体积
l	长度		

W 力的功

x,y,z 直角坐标

α 角加速度

β 角度坐标

δ 滚阻系数,阻尼系数

δ 变分符号

ζ 阻尼比

η 减缩因数

λ 本征值

Λ 对数减缩

ρ 密度,曲率半径

φ 角度坐标

φ_f 摩擦角

ψ 角度坐标

ω_0 固有角频率

ω 角速度

ω_a 绝对角速度

ω_r 相对角速度

ω_e 牵连角速度

目　　录

运 动 学

动　力　学

绪　论

一、理论力学的研究对象和内容

理论力学是研究物体机械运动一般规律的科学。

物体在空间的位置随时间的改变，称为**机械运动**。机械运动是人们生活和生产实践中最常见的一种运动。**平衡**是机械运动的特殊情况。

在客观世界中，存在各种各样的物质运动，例如发热、发光和产生电磁场等物理现象，化合和分解等化学变化，以及人的思维活动等。在物质的各种运动形式中，机械运动是最简单的一种。物质的各种运动形式在一定的条件下可以相互转化，而且在高级和复杂的运动中，往往存在着简单的机械运动。

本课程研究的内容是速度远小于光速的宏观物体的机械运动，它以伽利略和牛顿总结的基本定律为基础，属于古典力学的范畴。至于速度接近于光速的物体和基本粒子的运动，则必须用相对论和量子力学的观点才能完善地予以解释。宏观物体远小于光速的运动是日常生活及一般工程中最常遇到的，古典力学有着最广泛的应用。理论力学所研究的则是这种运动中最一般、最普遍的规律，是各门力学分支的基础。

本课程的内容包括以下三个部分：

静力学——主要研究受力物体平衡时作用力所应满足的条件；同时也研究物体受力的分析方法，以及力系简化的方法等。

运动学——只从几何的角度来研究物体的运动（如轨迹、速度和加速度等），而不研究引起物体运动的物理原因。

动力学——研究受力物体的运动与作用力之间的关系。

二、理论力学的研究方法

研究科学的过程，就是认识客观世界的过程，任何正确的科学研究方法，一定要符合辩证唯物主义的认识论。理论力学也必须遵循这个正确的认识规律进行研究和发展。

1. 通过观察生活和生产实践中的各种现象，进行多次的科学实验，经过分析、综合和归纳，总结出力学的最基本的规律。

远在古代，人们为了提水，制造了辘轳；为了搬运重物，使用了杠杆、斜面和滑轮；为了利用风力和水力，制造了风车和水车，等等。制造和使用这些生活和

生产工具,使人类对于机械运动有了初步的认识,并积累了大量的经验,经过分析、综合和归纳,逐渐形成了如“力”和“力矩”等基本概念,以及如“二力平衡”、“杠杆原理”、“力的平行四边形规则”和“万有引力定律”等力学的基本规律,并总结于科学著作中。我国的墨翟(公元前 468—前 382 年)所著的《墨经》,是一部最早记述有关力学理论的著作。

人们为了认识客观规律,不仅在生活和生产实践中进行观察和分析,还要主动地进行实验,定量地测定机械运动中各因素之间的关系,找出其内在规律性。例如伽利略(公元 1564—1642 年)对自由落体和物体在斜面上的运动作了多次实验,从而推翻了统治多年的错误观点,并引出“加速度”的概念。此外,如摩擦定律、动力学三定律等,都是建立在大量实验基础之上的。实验是形成理论的重要基础。

2. 在对事物观察和实验的基础上,经过抽象化建立力学模型,形成概念,在基本规律的基础上,经过逻辑推理和数学演绎,建立理论体系。

客观事物都是具体的、复杂的,为找出其共同规律性,必须抓住主要因素,舍弃次要因素,建立抽象化的力学模型。例如,忽略一般物体的微小变形,建立在力作用下物体形状、大小均不改变的刚体模型;抓住不同物体间机械运动的相互限制的主要方面,建立一些典型的理想约束模型;为分析复杂的振动现象,建立了弹簧质点的力学模型等。这种抽象化、理想化的方法,一方面简化了所研究的问题,另一方面也更深刻地反映出事物的本质。当然,任何抽象化的模型都是相对的。当条件改变时,必须再考虑到影响事物的新的因素,建立新的模型。例如:在研究物体受外力作用而平衡时,可以忽略物体形状的改变,采用刚体模型;但要分析物体内部的受力状态或解决一些复杂物体系的平衡问题时,必须考虑到物体的变形,建立弹性体的模型。

生产实践中的问题是复杂的,不是一些零散的感性知识所能解决的。理论力学成功地运用逻辑推理和数学演绎的方法,由少量最基本的规律出发,得到了从多方面揭示机械运动规律的定理、定律和公式,建立了严密而完整的理论体系。这对于理解、掌握以及应用理论力学都是极为有利的。数学方法在理论力学的发展中起了重大的作用。近代计算机的发展和普及,不仅能完成力学问题中大量的繁杂的数值计算,而且在逻辑推理、公式推导等方面也是极有效的工具。

3. 将理论力学的理论用于实践,在解释世界、改造世界中不断得到验证和发展。

实践是检验真理的唯一标准,实践中所遇到的新问题又是促进理论发展的源泉。古典力学理论在现实生活和工程中,被大量实践验证为正确,并在不同领域的实践中得到发展,形成了许多分支,如刚体力学、弹塑性力学、流体力学、生

物力学等。大到天体运动，小到基本粒子的运动，古典力学理论在实践中又都出现了矛盾，表现出真理的相对性。在新条件下，必须修正原有的理论，建立新的概念，才能正确指导实践，改造世界，并进一步地发展力学理论，形成新的力学分支。

三、学习理论力学的目的

理论力学是一门理论性较强的技术基础课。学习理论力学的目的是：

1. 工程专业一般都要接触机械运动的问题。有些工程问题可以直接应用理论力学的基本理论去解决，有些比较复杂的问题，则需要用理论力学和其他专门知识共同来解决。所以学习理论力学是为解决工程问题打下一定的基础。

2. 理论力学是研究力学中最普遍、最基本的规律。很多工程专业的课程，例如材料力学、机械原理、机械设计、结构力学、弹塑性力学、流体力学、飞行力学、振动理论、断裂力学以及许多专业课程等，都要以理论力学为基础，所以理论力学是学习一系列后续课程的重要基础。

随着现代科学技术的发展，力学的研究内容已渗入到其他科学领域，例如固体力学和流体力学的理论被用来研究人体内骨骼的强度，血液流动的规律，以及植物中营养的输送问题等，形成了生物力学；流体力学的理论被用来研究等离子体在磁场中的运动，形成电磁流体力学；还有爆炸力学、物理力学等都是力学和其他学科结合而形成的边缘科学。这些新兴学科的建立都必须以坚实的理论力学知识为基础。

3. 理论力学的研究方法，与其他学科的研究方法有不少相同之处，因此充分理解理论力学的研究方法，不仅可以深入地掌握这门学科，而且有助于学习其他科学技术理论，有助于培养辩证唯物主义世界观，培养正确的分析问题和解决问题的能力，为今后解决生产实际问题，从事科学研究工作打下基础。

静　力　学

引　言

静力学是研究物体在力系作用下的平衡条件的科学。

在静力学中所指的物体都是刚体。所谓**刚体**是指物体在力的作用下，其内部任意两点之间的距离始终保持不变。这是一个理想化的力学模型。

力，是物体间相互的**机械作用**，这种作用使物体的机械运动状态发生变化。

力系，是指作用于物体上的一群力。

平衡，是指物体相对于惯性参考系(如地面)保持静止或作匀速直线运动。

实践表明，力对物体的作用效果决定于三个要素：(1) 力的大小；(2) 力的方向；(3) 力的作用点。故力应以矢量表示，本书中用黑体字母 $\boldsymbol{F}$ 表示力矢量，而用普通字母 F 表示力的大小。在国际单位制中，力的单位是 N 或 kN。

在静力学中，我们将研究以下三个问题：

1. 物体的受力分析

分析某个物体共受几个力，以及每个力的作用位置和方向。

2. 力系的等效替换(或简化)

将作用在物体上的一个力系用另一个与它等效的力系来代替，这两个力系互为**等效力系**。如果用一个简单力系等效地替换一个复杂力系，则称为**力系的简化**。如果某力系与一个力等效，则此力称为该力系的**合力**，而该力系的各力称为此力的**分力**。

研究力系等效替换并不限于分析静力学问题，也是为动力学提供基础。

3. 建立各种力系的平衡条件

研究作用在物体上的各种力系所需满足的平衡条件。

工程中常见的力系，按其作用线所在的位置，可以分为**平面力系**和**空间力系**两大类；又可以按其作用线的相互关系，分为**共线力系**、**平行力系**、**汇交力系**和**任意力系**。满足平衡条件的力系称为**平衡力系**。

力系的平衡条件在工程中有着十分重要的意义，是设计结构、构件和机械零件时静力计算的基础。因此，静力学在工程中有着广泛的应用。

第一章　静力学公理和物体的受力分析

本章将阐述静力学公理，并介绍工程中常见的约束和约束力的分析及物体的受力图。

§1-1　静力学公理

公理是人们在生活和生产实践中长期积累的经验总结，又经过实践反复检验，被确认是符合客观实际的最普遍、最一般的规律。

公理1　力的平行四边形法则

作用在物体上同一点的两个力，可以合成为一个**合力**。合力的作用点也在该点，合力的大小和方向，由这两个力为边构成的平行四边形的对角线确定，如图1-1所示。或者说，合力矢等于这两个力矢的几何和，即

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \tag{1-1}$$

亦可另作一**力三角形**，求两汇交力合力的大小和方向(即合力矢)，如图1-1b，c所示。

这个公理是复杂力系简化的基础。

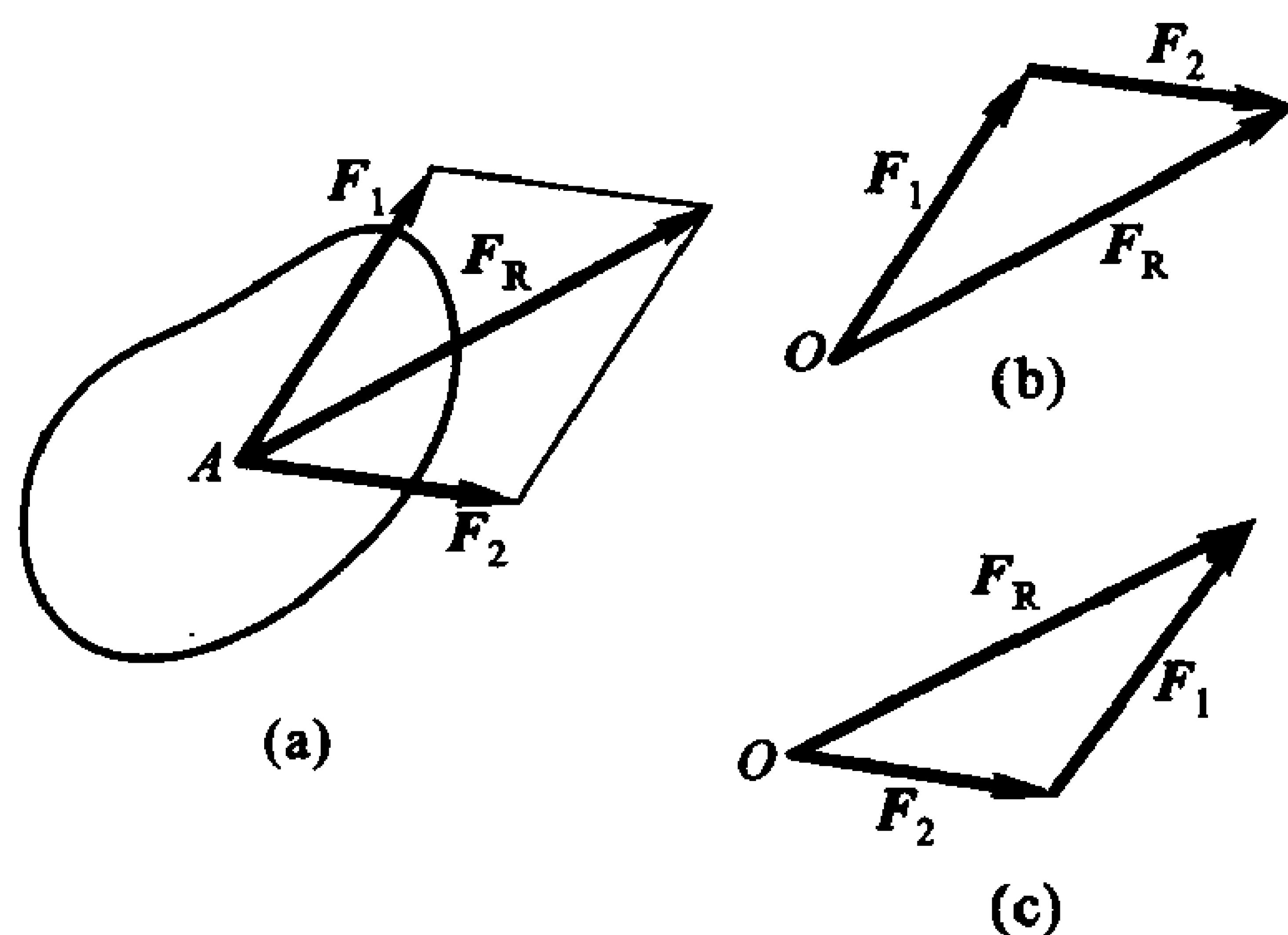


图1-1

公理2　二力平衡条件

作用在刚体上的两个力(如 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$)，使刚体保持平衡的必要和充分条件

是:这两个力的大小相等,方向相反,且作用在同一直线上。

这个公理表明了作用于刚体上最简单力系平衡时所必须满足的条件。

公理3 加减平衡力系原理

在已知力系上加上或减去任意的平衡力系,并不改变原力系对刚体的作用。

这个公理是研究力系等效替换的重要依据。

根据上述公理可以导出下列推理:

推理1 力的可传性

作用于刚体上某点的力,可以沿着它的作用线移到刚体内任意一点,并不改变该力对刚体的作用。

证明:在刚体上的点 A 作用力 $\boldsymbol{F}$,如图1-2a所示。根据加减平衡力系原理,可在力的作用线上任取一点 B,并加上两个相互平衡的力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$,使 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{F}_1$,如图1-2b所示。由于力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}_1$ 也是一个平衡力系,故可除去;这样只剩下一个力 $\boldsymbol{F}_2$,如图1-2c,即原来的力 $\boldsymbol{F}$ 沿其作用线移到了点 B。

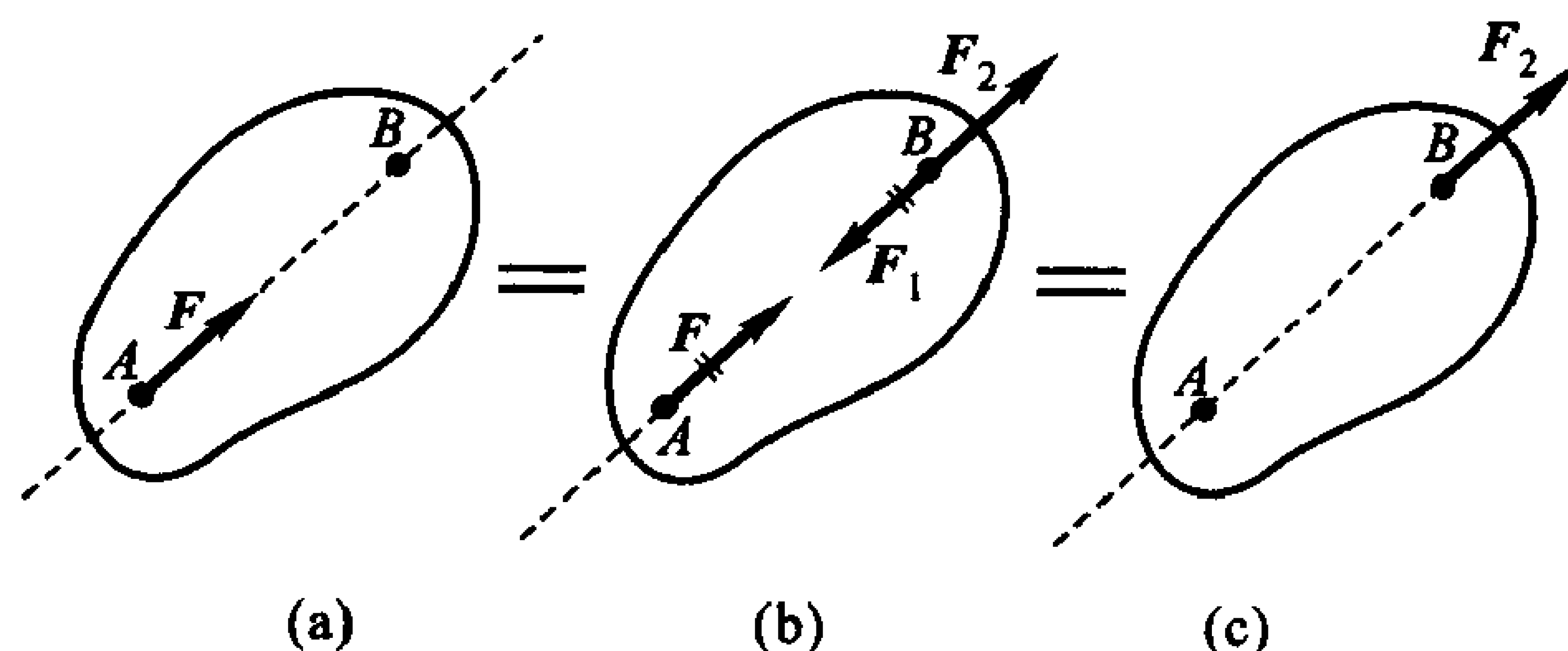


图1-2

由此可见,对于刚体来说,力的作用点已不是决定力的作用效应的要素,它已为作用线所代替。因此,作用于刚体上的力的三要素是:力的大小、方向和作用线。

作用于刚体上的力可以沿着作用线移动,这种矢量称为**滑动矢量**。

推理2 三力平衡汇交定理

作用于刚体上三个相互平衡的力,若其中两个力的作用线汇交于一点,则此三力必在同一平面内,且第三个力的作用线通过汇交点。

证明:如图1-3所示,在刚体的 A,B,C 三点上,分别作用三个相互平衡的力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$。根据力的可传性,将力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 移到汇交点 O,然后根据力的平行四边形法则,得合力 $\boldsymbol{F}_{12}$。则力 $\boldsymbol{F}_3$ 应与 $\boldsymbol{F}_{12}$ 平衡。由于两个力平衡必须共线,所以力 $\boldsymbol{F}_3$ 必定与力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 共面,且通过力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的交点 O。于是定理得证。

公理 4　作用和反作用定律

作用力和反作用力总是同时存在，两力的大小相等、方向相反，沿着同一直线，分别作用在两个相互作用的物体上。若用 $\boldsymbol{F}$ 表示作用力，又用 $\boldsymbol{F}'$ 表示反作用力，则

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}'$$

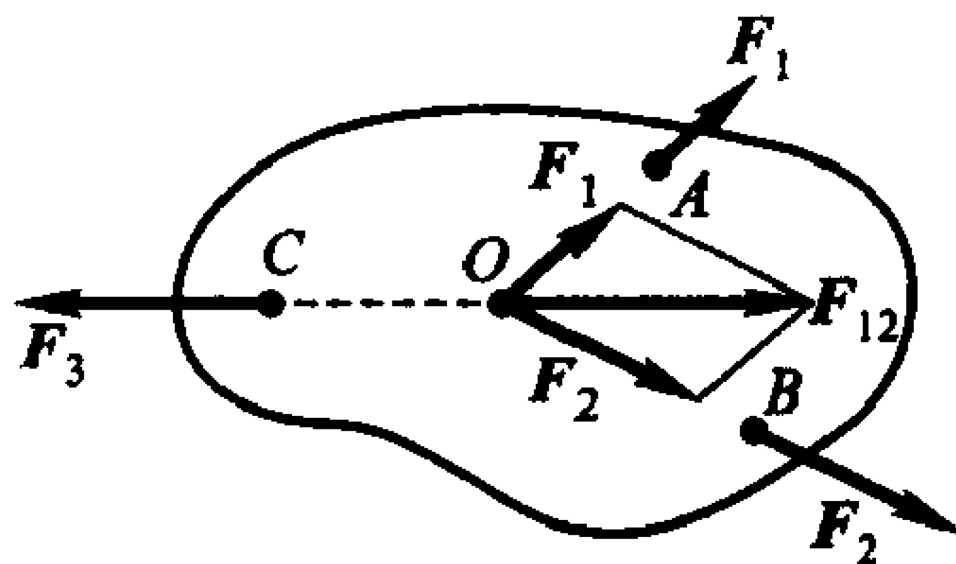


图 1－3

这个公理概括了物体间相互作用的关系，表明作用力和反作用力总是成对出现的。由于作用力与反作用力分别作用在两个物体上，因此，不能视作平衡力系。

公理 5　刚化原理

变形体在某一力系作用下处于平衡，如将此变形体刚化为刚体，其平衡状态保持不变。

这个公理提供了把变形体看作为刚体模型的条件。如图 1－4 所示，绳索在等值、反向、共线的两个拉力作用下处于平衡，如将绳索刚化成刚体，其平衡状态保持不变。反之就不一定成立。如刚体在两个等值反向的压力作用下平衡。若将它换成绳索就不能平衡了。

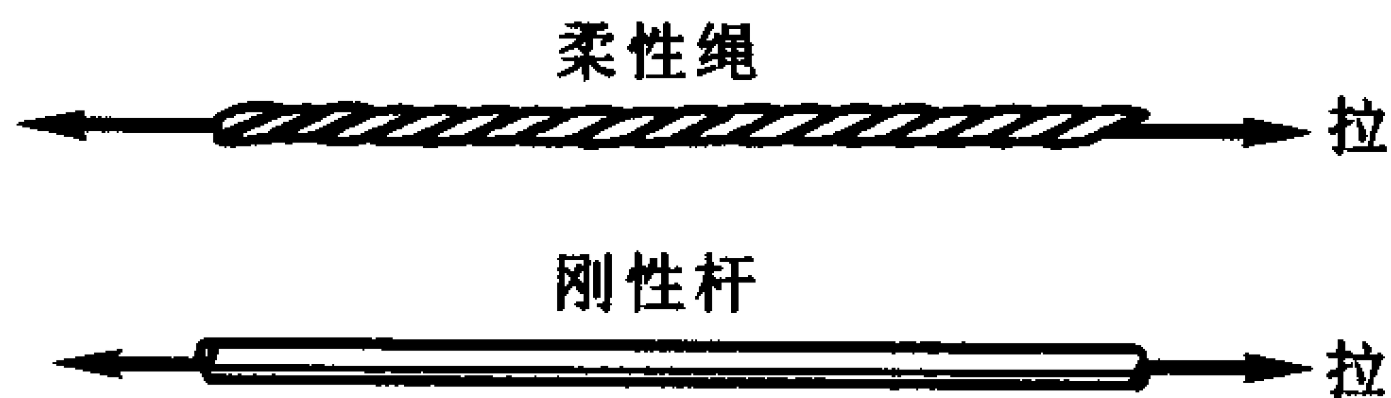


图 1－4

由此可见，刚体的平衡条件是变形体平衡的必要条件，而非充分条件。在刚体静力学的基础上，考虑变形体的特性，可进一步研究变形体的平衡问题。

静力学全部理论都可以由上述五个公理推证而得到，这既能保证理论体系的完整和严密性，又可以培养读者的逻辑思维能力。

§1－2　约束和约束力

有些物体，例如：飞行的飞机、炮弹和火箭等，它们在空间的位移不受任何限制。位移不受限制的物体称为**自由体**。相反，有些物体在空间的位移却要受到一定的限制。如机车受铁轨的限制，只能沿轨道运动；电机转子受轴承的限制，只能绕轴线转动；重物由钢索吊住，不能下落等。位移受到限制的物体称为**非自**

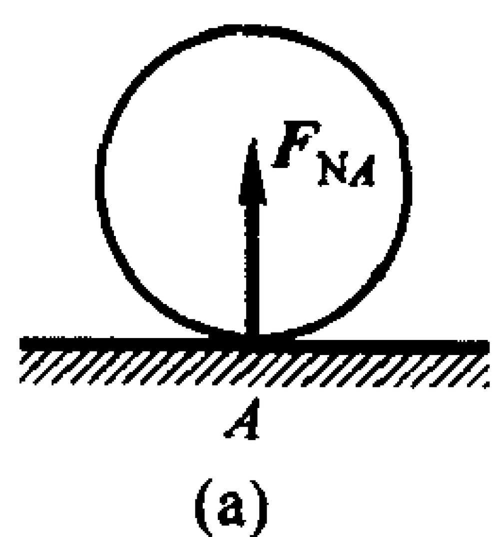
由体。对非自由体的某些位移起限制作用的周围物体称为**约束**。例如，铁轨对于机车，轴承对于电机转子，钢索对于重物等，都是约束。

从力学角度来看，约束对物体的作用，实际上就是力，这种力称为**约束力**，因此，约束力的方向必与该约束所能够阻碍的位移方向相反。应用这个准则，可以确定约束力的方向或作用线的位置。至于约束力的大小则是未知的。在静力学问题中，约束力和物体受的其他已知力（称**主动力**）组成平衡力系，因此可用平衡条件求出未知的约束力。

下面介绍几种在工程中常见的约束类型和确定约束力方向的方法。

1．具有光滑接触表面的约束

例如，支持物体的固定面（图 1－5a，b）、啮合齿轮的齿面（图 1－6）、机床中的导轨等，当摩擦忽略不计时，都属于这类约束。



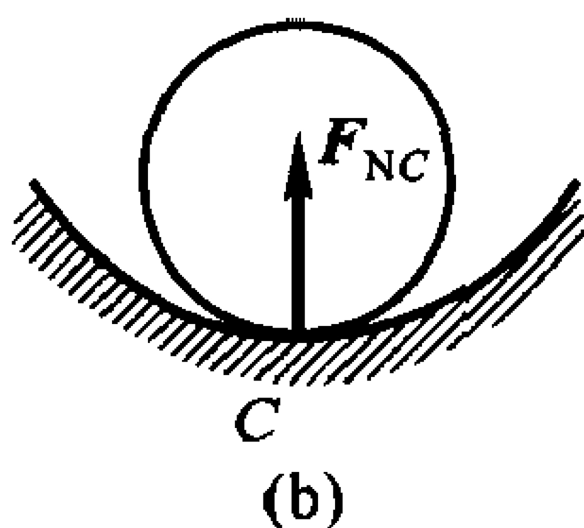


图 1－5

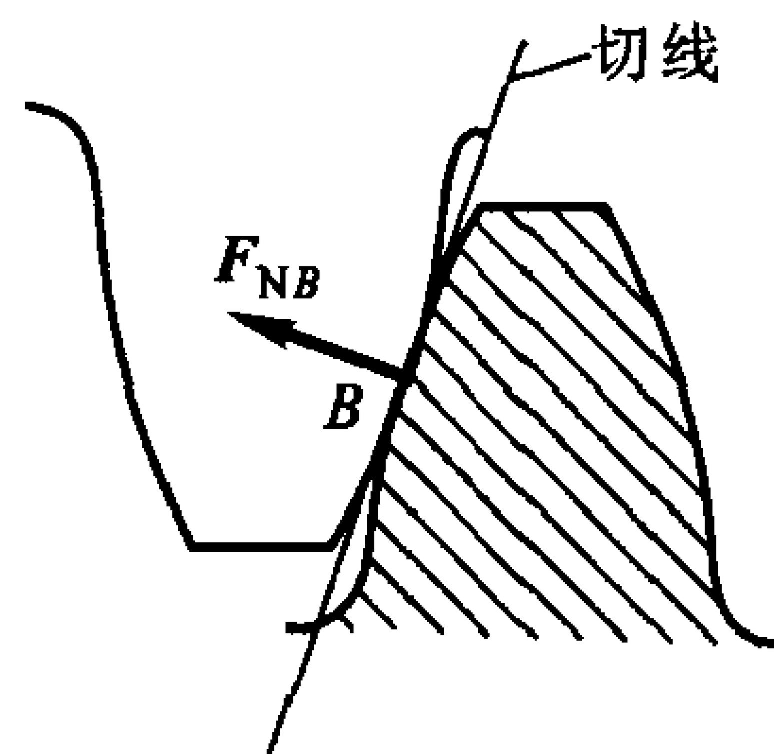


图 1－6

这类约束不能限制物体沿约束表面切线的位移，只能阻碍物体沿接触表面法线并向约束内部的位移。因此，光滑支承面对物体的约束力，作用在接触点处，方向沿接触表面的公法线，并指向被约束的物体。这种约束力称为法向约束力，通常用 $\boldsymbol{F}_N$ 表示，如图 1－5 中的 $\boldsymbol{F}_{NA}$，$\boldsymbol{F}_{NC}$ 和图 1－6 中的 $\boldsymbol{F}_{NB}$ 等。

2．由柔软的绳索、链条或胶带等构成的约束

细绳吊住重物，如图 1－7a 所示。由于柔软的绳索本身只能承受拉力，所以它给物体的约束力也只可能是拉力（图 1－7b）。因此，绳索对物体的约束力，作用在接触点，方向沿着绳索背离物体。通常用 $\boldsymbol{F}$ 或 $\boldsymbol{F}_T$ 表示这类约束力。

链条或胶带也都只能承受拉力。当它们绕在轮子上，对轮子的约束力沿轮缘的切线方向（图 1－8）。

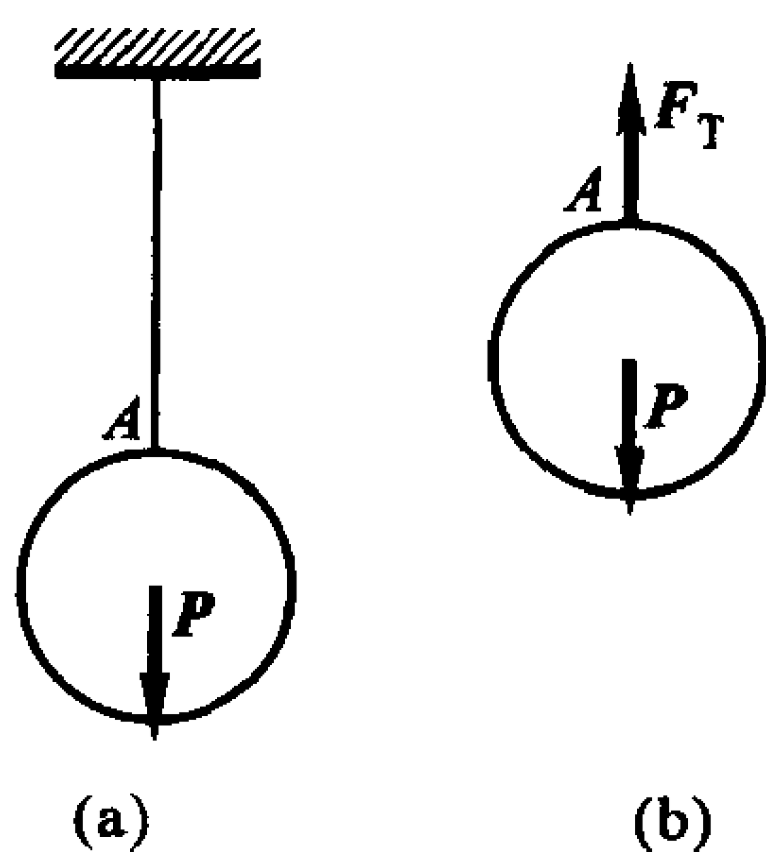


图 1-7

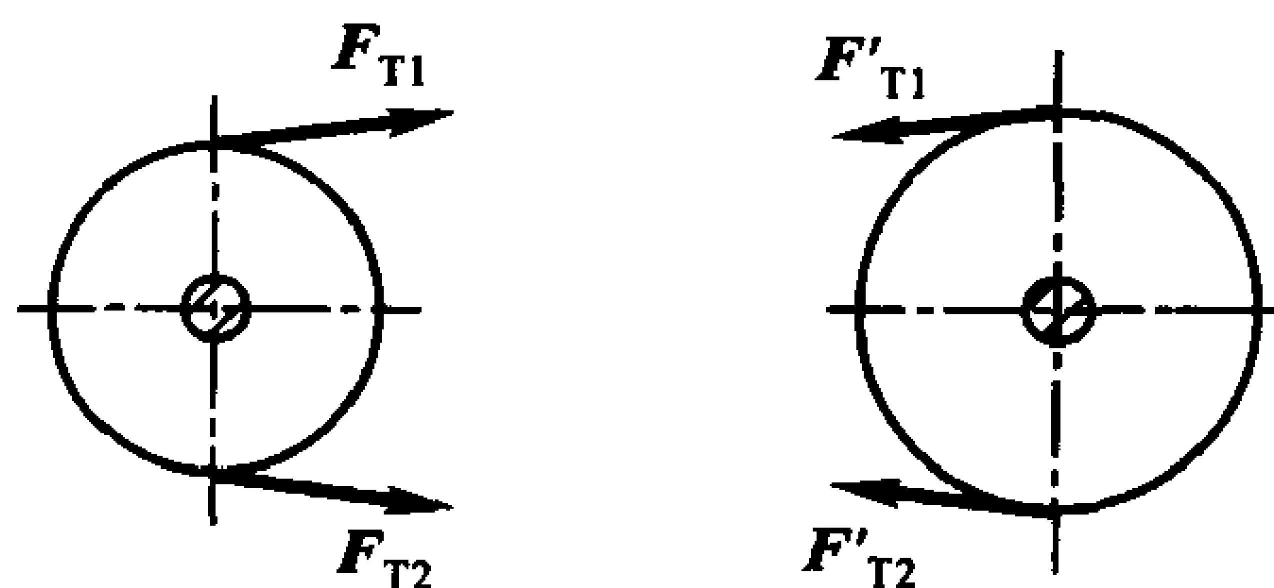


图 1-8

3．光滑铰链约束

这类约束有向心轴承、圆柱形铰链和固定铰链支座等。

(1) 向心轴承(径向轴承)

图 1-9a,b 所示为轴承装置,可画成如图 1-9c 所示的简图。轴可在孔内任意转动,也可沿孔的中心线移动;但是,轴承阻碍着轴沿径向向外的位移。当轴和轴承在某点 A 光滑接触时,轴承对轴的约束力 $\boldsymbol{F}_A$ 作用在接触点 A,且沿公法线指向轴心(图 1-9a)。

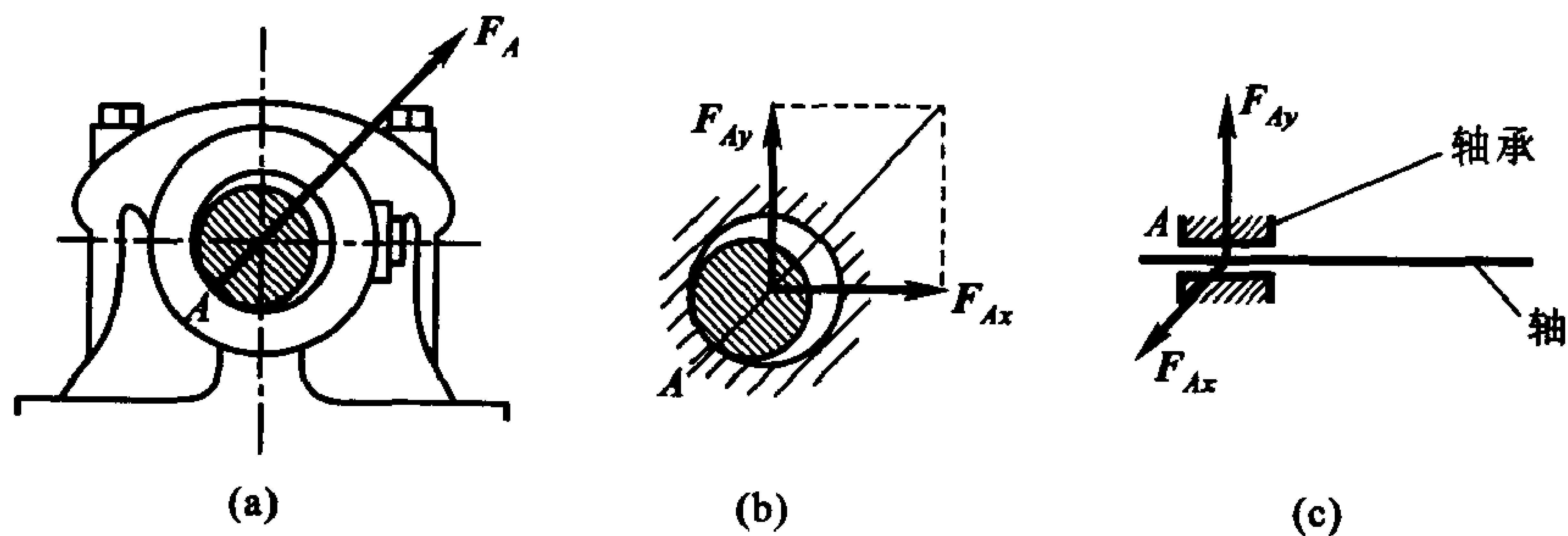


图 1-9

但是,随着轴所受的主动力不同,轴和孔的接触点的位置也随之不同。所以,当主动力尚未确定时,约束力的方向预先不能确定。然而,无论约束力朝向何方,它的作用线必垂直于轴线并通过轴心。这样一个方向不能预先确定的约束力,通常可用通过轴心的两个大小未知的正交分力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$,$\boldsymbol{F}_{Ay}$ 来表示,如图 1-9b 或 c 所示,$\boldsymbol{F}_{Ax}$,$\boldsymbol{F}_{Ay}$ 的指向暂可任意假定。

(2) 圆柱铰链和固定铰链支座

图 1-10a 所示的拱形桥,它是由两个拱形构件通过圆柱铰链 C 以及固定

铰链支座 A 和 B 连接而成。圆柱铰链简称**铰链**，它是由销钉 C 将两个钻有同样大小孔的构件连接在一起而成（图 1 - 10b），其简图如图 1 - 10a 的铰链 C。如果铰链连接中有一个固定在地面或机架上作为支座，则这种约束称为固定铰链支座，简称固定铰支，如图 1 - 10b 中所示的支座 B。其简图如图 1 - 10a 所示的固定铰链支座 A 和 B。

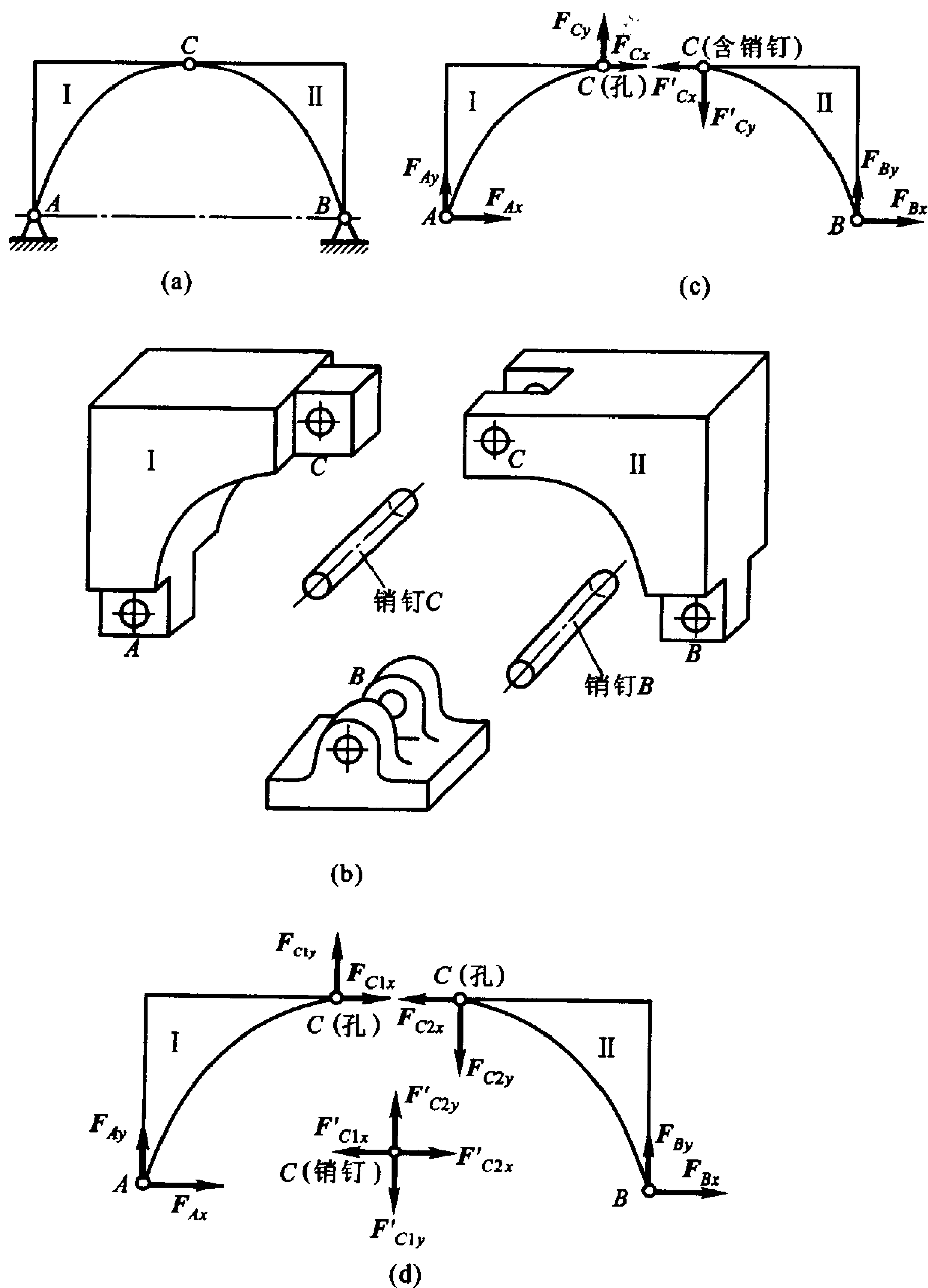


图 1 - 10

在分析铰链 C 处的约束力时，通常把销钉 C 固连在其中任意一个构件上，如构件Ⅱ上；则构件Ⅰ、Ⅱ互为约束。显然，当忽略摩擦时，构件Ⅱ上的销钉与构件Ⅰ的结合，实际上是轴与光滑孔的配合问题。因此，它与轴承具有同样的约束性质，即约束力的作用线不能预先定出，但约束力垂直轴线并通过铰链中心，故也可用两个大小未知的正交分力 $\boldsymbol{F}_{Cx}$，$\boldsymbol{F}_{Cy}$ 和 $\boldsymbol{F}'_{Cx}$，$\boldsymbol{F}'_{Cy}$ 来表示，如图 1－10c 所示。其中 $\boldsymbol{F}_{Cx}=-\boldsymbol{F}'_{Cx}$，$\boldsymbol{F}_{Cy}=-\boldsymbol{F}'_{Cy}$，表明它们互为作用与反作用关系。

同理，把销钉固连在 A，B 支座上，则固定铰支 A，B 对构件Ⅰ，Ⅱ的约束力分别为 $\boldsymbol{F}_{Ax}$，$\boldsymbol{F}_{Ay}$ 与 $\boldsymbol{F}_{Bx}$，$\boldsymbol{F}_{By}$，如图 1－10c 所示。

当需要分析销钉 C 的受力时，才把销钉分离出来单独研究。这时，销钉 C 将同时受到构件Ⅰ，Ⅱ上的孔对它的反作用力。其中 $\boldsymbol{F}_{C1x}=-\boldsymbol{F}'_{C1x}$，$\boldsymbol{F}_{C1y}=-\boldsymbol{F}'_{C1y}$，为构件Ⅰ与销钉 C 的作用与反作用力；又 $\boldsymbol{F}_{C2x}=-\boldsymbol{F}'_{C2x}$，$\boldsymbol{F}_{C2y}=-\boldsymbol{F}'_{C2y}$，则为构件Ⅱ与销钉 C 的作用与反作用力。销钉 C 所受到的约束力如图 1－10d 所示。

当将销钉 C 与构件Ⅱ固连为一体时，$\boldsymbol{F}_{C2x}$ 与 $\boldsymbol{F}'_{C2x}$，$\boldsymbol{F}_{C2y}$ 与 $\boldsymbol{F}'_{C2y}$ 为作用在同一刚体上的成对的平衡力，可以消去不画。此时，力的下角不必再区分为 $C1$ 和 $C2$，铰链 C 处的约束力仍如图 1－10c 所示。

上述三种约束(向心轴承、铰链和固定铰链支座)，它们的具体结构虽然不同，但构成约束的性质是相同的，都可表示为光滑铰链。此类约束的特点是只限制两物体径向的相对移动，而不限制两物体绕铰链中心的相对转动及沿轴向的位移。

4. 其他约束

(1) 滚动支座

在桥梁、屋架等结构中经常采用滚动支座约束。这种支座是在固定铰链支座与光滑支承面之间，装有几个辊轴而构成，又称辊轴支座，如图 1－11a 所示，其简图如图 1－11b 所示。它可以沿支承面移动，允许由于温度变化而引起结构跨度的自由伸长或缩短。显然，滚动支座的约束性质与光滑面约束相同，其约束力必垂直于支承面，且通过铰链中心。通常用 $\boldsymbol{F}_N$ 表示其法向约束力，如图 1－11c 所示。

(2) 球铰链

通过圆球和球壳将两个构件连接在一起的约束称为**球铰链**，如图 1－12a 所示。它使构件的球心不能有任何位移，但构件可绕球心任意转动。若忽略摩擦，其约束力应是通过接触点与球心，但方向不能预先确定的一个空间法向约束力，可用三个正交分力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$，$\boldsymbol{F}_{Ay}$，$\boldsymbol{F}_{Az}$ 表示，其简图及约束力如图 1－12b 所示。

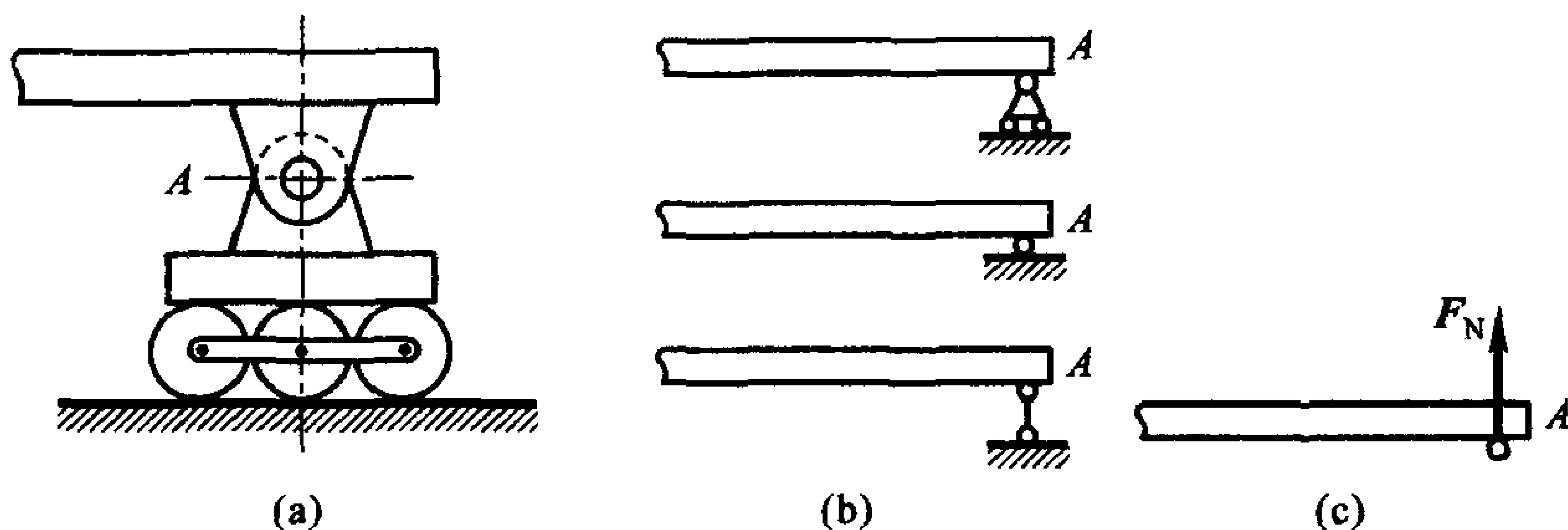
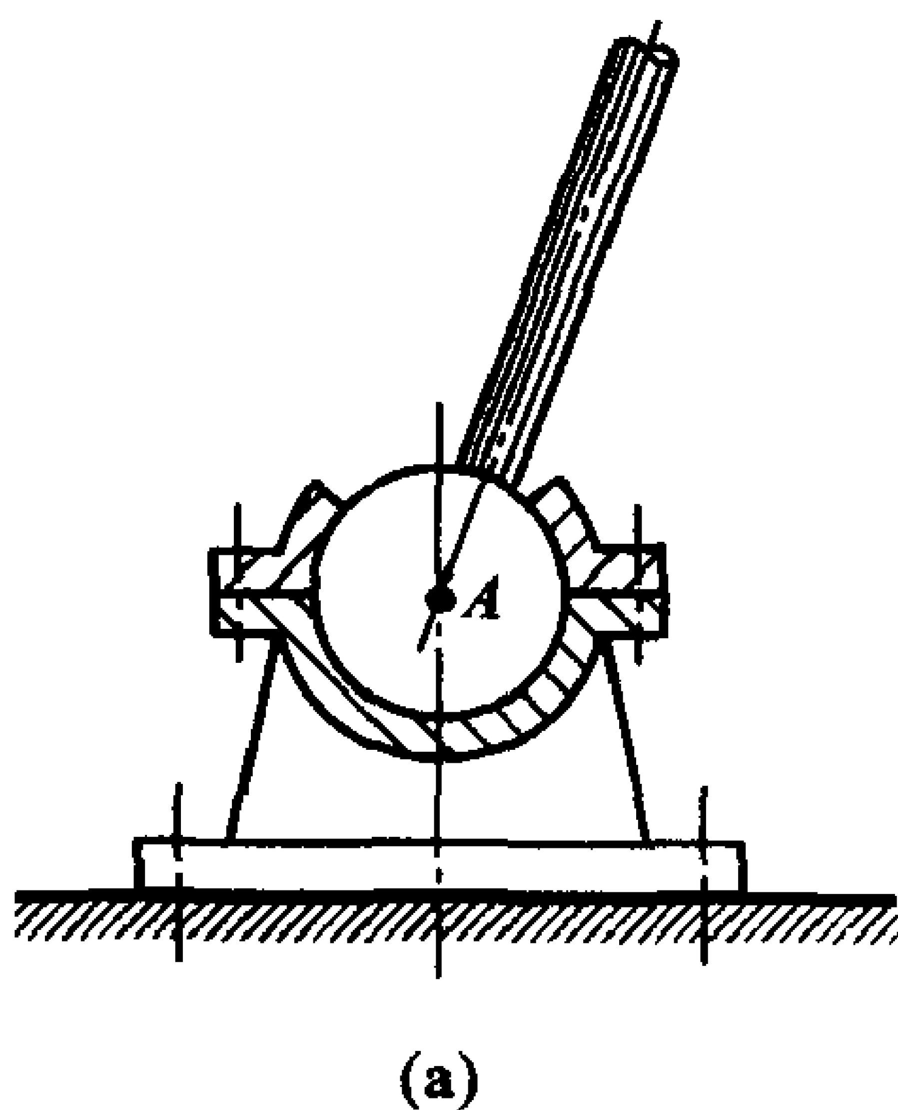


图 1-11



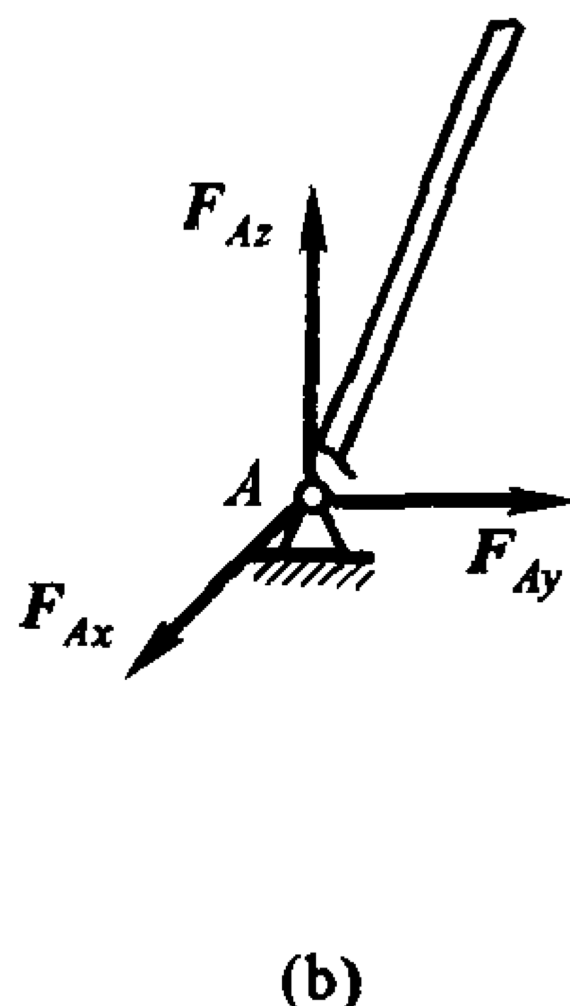


图 1-12

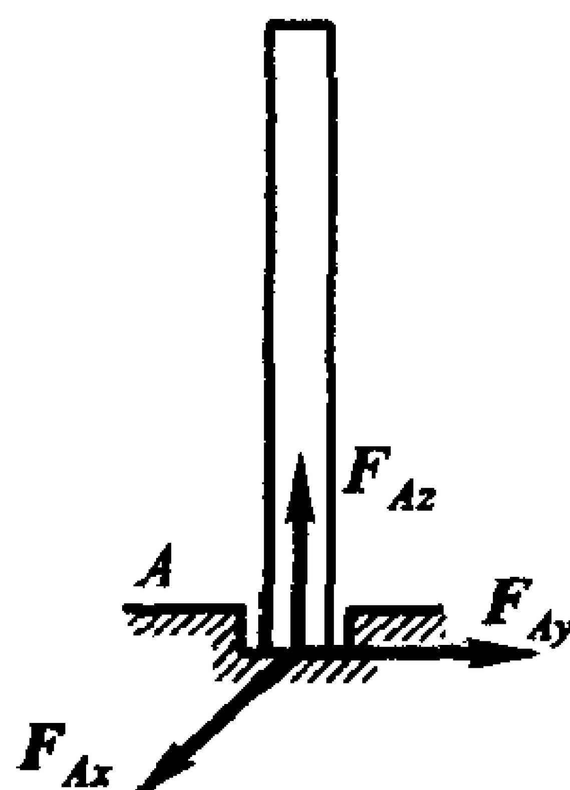


图 1-13

(3) 止推轴承

止推轴承与径向轴承不同,它除了能限制轴的径向位移以外,还能限制轴沿轴向的位移。因此,它比径向轴承多一个沿轴向的约束力,即其约束力有三个正交分量 F_{Ax},F_{Ay},F_{Az}。止推轴承的简图及其约束力如图 1-13 所示。

以上只介绍了几种简单约束,在工程中,约束的类型远不止这些,有的约束比较复杂,分析时需要加以简化或抽象,在以后的章节中,再作介绍。

§1-3 物体的受力分析和受力图

在工程实际中,为了求出未知的约束力,需要根据已知力,应用平衡条件求解。为此,首先要确定构件受了几个力,每个力的作用位置和力的作用方向,这种分析过程称为物体的受力分析。

作用在物体上的力可分为两类:一类是主动力,例如:物体的重力、风力、气体压力等,一般是已知的;另一类是约束对于物体的约束力,为未知的被动力。

为了清晰地表示物体的受力情况，我们把需要研究的物体（称为受力体）从周围的物体（称为施力体）中分离出来，单独画出它的简图，这个步骤叫做取研究对象或取分离体。然后把施力物体对研究对象的作用力（包括主动力和约束力）全部画出来。这种表示物体受力的简明图形，称为**受力图**。画物体受力图是解决静力学问题的一个重要步骤。

例 1-1 用力 $\boldsymbol{F}$ 拉动碾子以压平路面，重为 $\boldsymbol{P}$ 的碾子受到一石块的阻碍，如图 1-14a 所示。不计摩擦。试画出碾子的受力图。

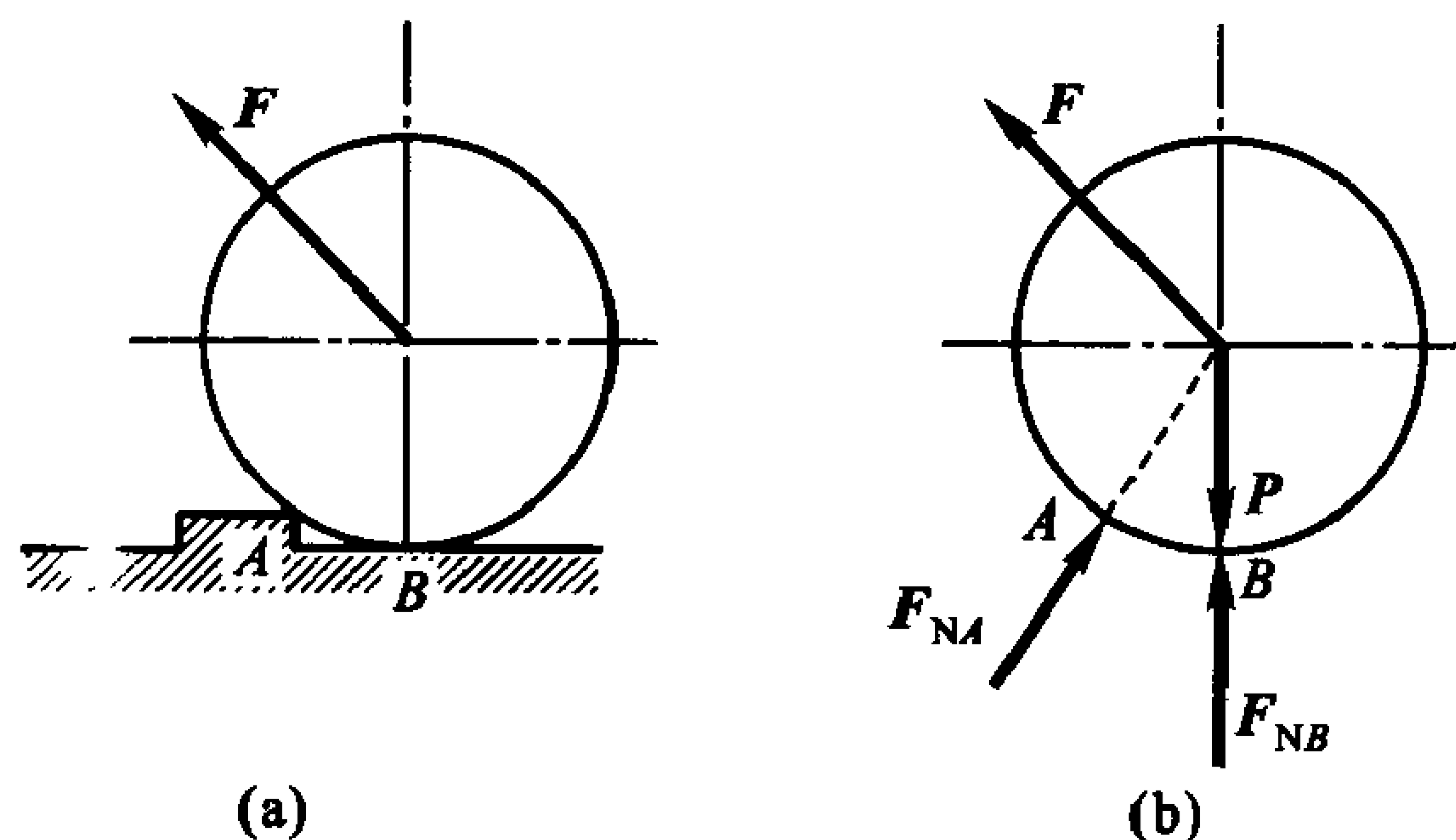


图 1-14

解：（1）取碾子为研究对象（即取分离体），并单独画出其简图。

（2）画主动力。有地球的引力 $\boldsymbol{P}$ 和碾子中心的拉力 $\boldsymbol{F}$。

（3）画约束力。因碾子在 A 和 B 两处受到石块和地面的光滑约束，故在 A 处及 B 处受石块与地面的法向反力 $\boldsymbol{F}_{NA}$ 和 $\boldsymbol{F}_{NB}$ 的作用，它们都沿着碾子上接触点的公法线而指向圆心。

碾子的受力图如图 1-14b 所示。

例 1-2 屋架如图 1-15a 所示。A 处为固定铰链支座，B 处为滚动支座，搁在光滑的水平面上。已知屋架自重 $\boldsymbol{P}$，在屋架的 AC 边上承受了垂直于它的均匀分布的风力 q(N/m)。试画出屋架的受力图。

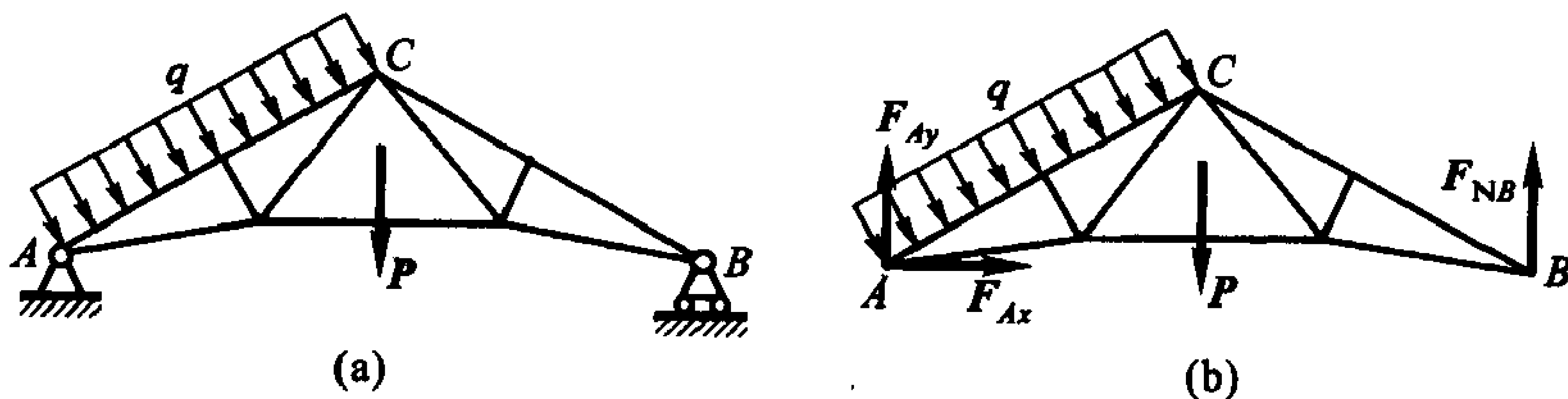


图 1-15

解：（1）取屋架为研究对象，除去约束并画出其简图。

（2）画主动力。有屋架的重力 $\boldsymbol{P}$ 和均布的风力 q。

(3) 画约束力。因 A 处为固定铰支,其约束力可用两个大小未知的正交分力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Ay}$ 表示。B 处为滚动支座,约束力垂直向上,用 $\boldsymbol{F}_{NB}$ 表示。

屋架的受力图如图 1-15b 所示。

例 1-3 如图 1-16a 所示,水平梁 AB 用斜杆 CD 支撑,A,C,D 三处均为光滑铰链连接。均质梁重 $\boldsymbol{P}_1$,其上放置一重为 $\boldsymbol{P}_2$ 的电动机。如不计杆 CD 的自重,试分别画出杆 CD 和梁 AB(包括电动机)的受力图。

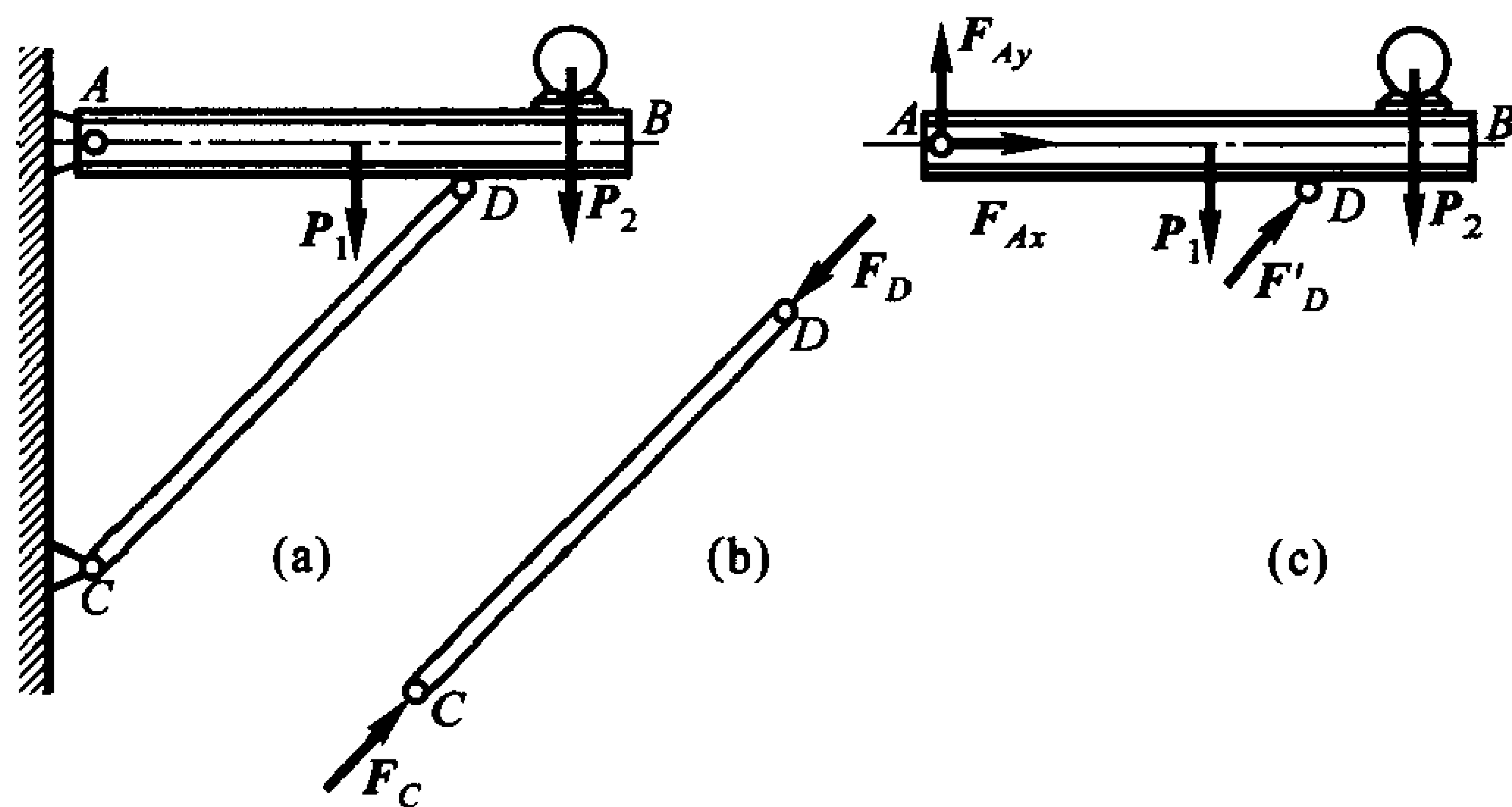


图 1-16

解: (1) 先分析斜杆 CD 的受力。由于斜杆的自重不计,根据光滑铰链的特性,C,D 处的约束力分别通过铰链 C、D 的中心,方向暂不确定。考虑到杆 CD 只在 $\boldsymbol{F}_C,\boldsymbol{F}_D$ 二力作用下平衡,根据二力平衡公理,这两个力必定沿同一直线,且等值、反向。由此可确定 $\boldsymbol{F}_C$ 和 $\boldsymbol{F}_D$ 的作用线应沿铰链中心 C 与 D 的连线,由经验判断,此处杆 CD 受压力,其受力图如图 1-16b 所示。一般情况下,$\boldsymbol{F}_C$ 与 $\boldsymbol{F}_D$ 的指向不能预先判定,可先任意假设杆受拉力或压力。若根据平衡方程求得的力为正值,说明原假设力的指向正确;若为负值,则说明实际杆受力与原假设指向相反。

只在两个力作用下平衡的构件,称为**二力构件**,简称**二力杆**。它所受的两个力必定沿两力作用点的连线,且等值、反向。二力杆在工程实际中经常遇到,有时也把它作为一种约束,如图 1-11b。

(2) 取梁 AB(包括电动机)为研究对象。它受有 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$ 两个主动力的作用。梁在铰链 D 处受有二力杆 CD 给它的约束力 $\boldsymbol{F}'_D$。根据作用和反作用定律,$\boldsymbol{F}'_D=-\boldsymbol{F}_D$。梁在 A 处受固定铰支给它的约束力的作用,由于方向未知,可用两个大小未定的正交分力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Ay}$ 表示。

梁 AB 的受力图如图 1-16c 所示。

例 1-4 如图 1-17a 所示的三铰拱桥,由左、右两拱铰接而成。不计自重及摩擦,在拱 AC 上作用有载荷 $\boldsymbol{F}$。试分别画出拱 AC 和 CB 的受力图。

解: (1) 先分析拱 BC 的受力。由于拱 BC 自重不计,且只在 B,C 两处受到铰链约束,因此拱 BC 为二力构件。在铰链中心 B,C 处分别受 $\boldsymbol{F}_B,\boldsymbol{F}_C$ 两力的作用,且 $\boldsymbol{F}_B=-\boldsymbol{F}_C$,这两

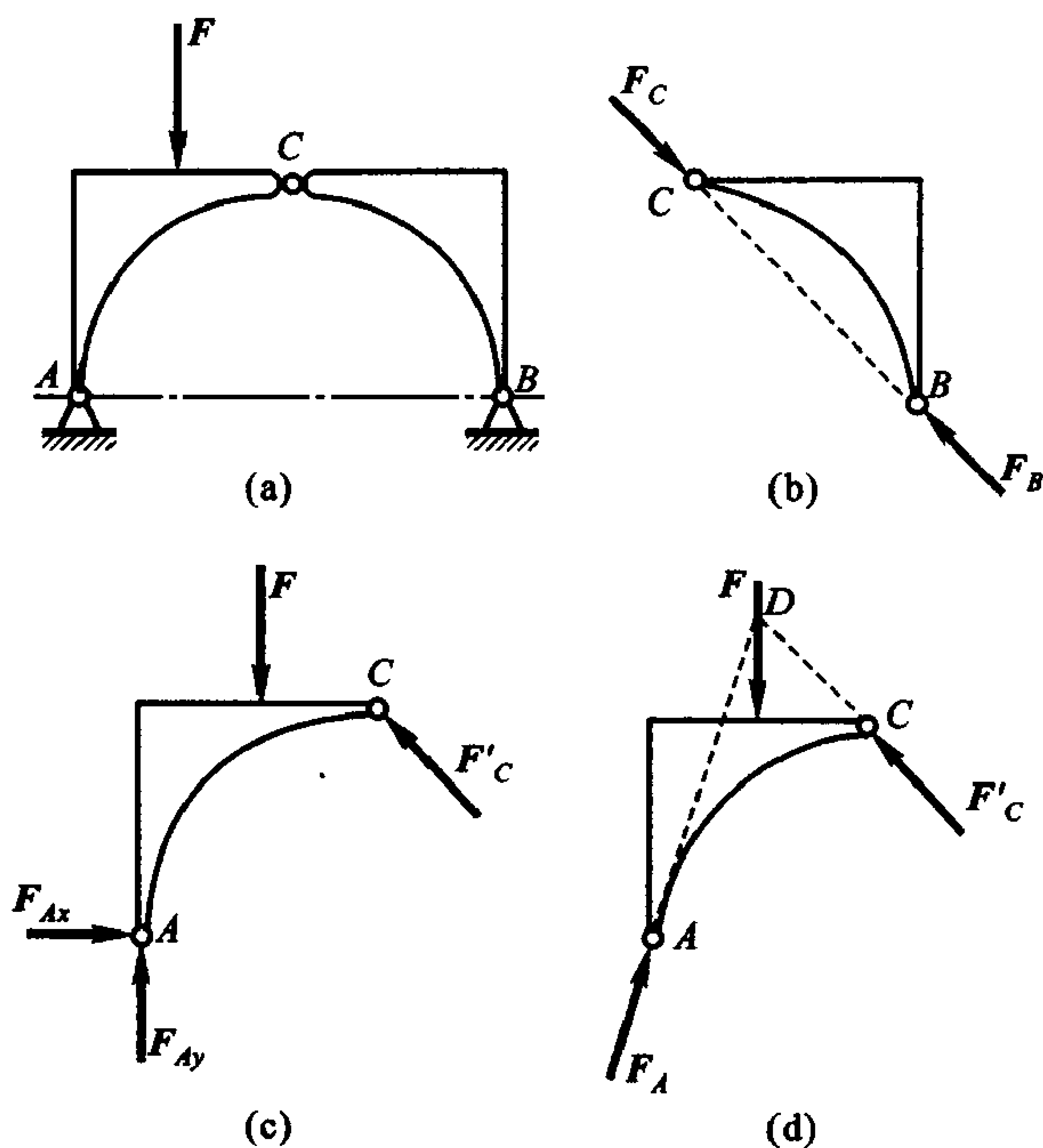


图 1－17

个力的方向如图 1－17b 所示。

(2) 取拱 AC 为研究对象。由于自重不计，因此主动力只有载荷 $\boldsymbol{F}$。拱 AC 在铰链 C 处受有拱 BC 给它的约束力 $\boldsymbol{F}'_C$，根据作用和反作用定律，$\boldsymbol{F}'_C=-\boldsymbol{F}_C$。拱在 A 处受有固定铰支给它的约束力 $\boldsymbol{F}_A$ 的作用，由于方向未定，可用两个大小未知的正交分力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Ay}$ 代替。

拱 AC 的受力图如图 1－17c 所示。

再进一步分析可知，由于拱 AC 在 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}'_C$ 及 $\boldsymbol{F}_A$ 三个力作用下平衡，故可根据三力平衡汇交定理，确定铰链 A 处约束力 $\boldsymbol{F}_A$ 的方向。点 D 为力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'_C$ 作用线的交点，当拱 AC 平衡时，约束力 $\boldsymbol{F}_A$ 的作用线必通过点 D(图 1－17d)；至于 $\boldsymbol{F}_A$ 的指向，暂且假定如图，以后由平衡条件确定。

请读者考虑：若左右两拱都计入自重时，各受力图有何不同？

例 1－5　如图 1－18a 所示，梯子的两部分 AB 和 AC 在点 A 铰接，又在 D，E 两点用水平绳连接。梯子放在光滑水平面上，若其自重不计，但在 AB 的中点 H 处作用一铅直载荷 $\boldsymbol{F}$。试分别画出绳子 DE 和梯子的 AB，AC 部分以及整个系统的受力图。

解：　(1) 绳子 DE 的受力分析。绳子两端 D，E 分别受到梯子对它的拉力 $\boldsymbol{F}_D$，$\boldsymbol{F}_E$ 的作用(图 1－18b)。

(2) 梯子 AB 部分的受力分析。它在 H 处受载荷 $\boldsymbol{F}$ 的作用，在铰链 A 处受 AC 部分给它的约束力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Ay}$。在点 D 受绳子对它的拉力 $\boldsymbol{F}'_D$，$\boldsymbol{F}'_D$ 是 $\boldsymbol{F}_D$ 的反作用力。在点 B 受光

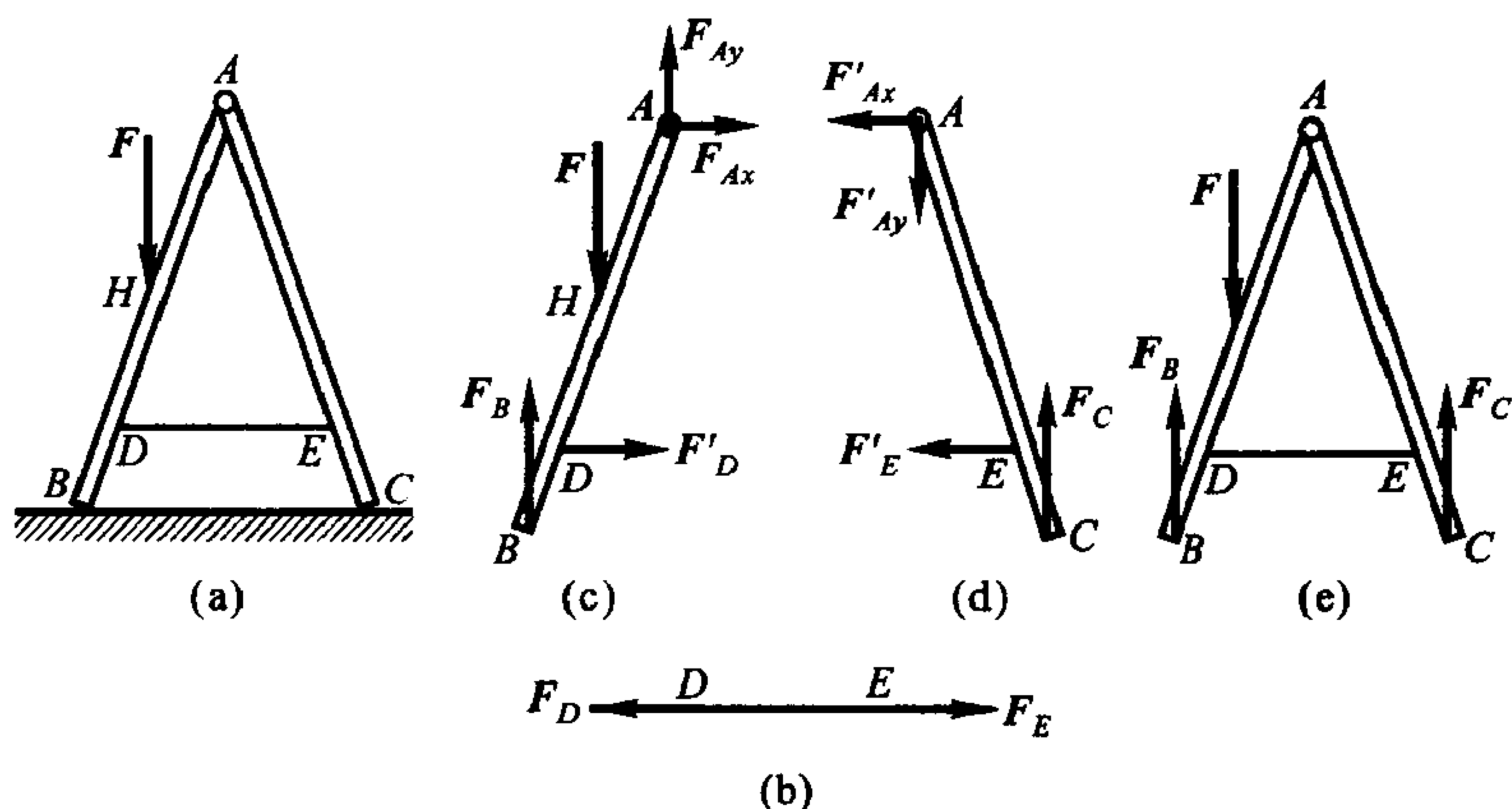


图 1-18

滑地面对它的法向反力 $\boldsymbol{F}_B$。

梯子 AB 部分的受力图如图 1-18c 所示。

(3) 梯子 AC 部分的受力分析。在铰链 A 处受 AB 部分对它的约束力 $\boldsymbol{F}'_{Ax}$ 和 $\boldsymbol{F}'_{Ay}$，$\boldsymbol{F}'_{Ax}$ 和 $\boldsymbol{F}'_{Ay}$ 分别是 $\boldsymbol{F}_{Ax}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Ay}$ 的反作用力。在点 E 受绳子对它的拉力 $\boldsymbol{F}'_E$，$\boldsymbol{F}'_E$ 是 $\boldsymbol{F}_E$ 的反作用力。在 C 处受光滑地面对它的法向反力 $\boldsymbol{F}_C$。

梯子 AC 部分的受力图如图 1-18d 所示。

(4) 整个系统的受力分析。当选整个系统为研究对象时，可把平衡的整个结构刚化为刚体。由于铰链 A 处所受的力满足 $\boldsymbol{F}_{Ax}=-\boldsymbol{F}'_{Ax}$，$\boldsymbol{F}_{Ay}=-\boldsymbol{F}'_{Ay}$；绳子与梯子连接点 D 和 E 所受的力也分别满足 $\boldsymbol{F}_D=-\boldsymbol{F}'_D$，$\boldsymbol{F}_E=-\boldsymbol{F}'_E$，这些力都成对地作用在整个系统内，称为**内力**。内力对系统的作用效应相互抵消，因此可以除去，并不影响整个系统的平衡。故内力在受力图上不必画出。在受力图上只需画出系统以外的物体给系统的作用力，这种力称为**外力**。这里，载荷 $\boldsymbol{F}$ 和约束力 $\boldsymbol{F}_B$，$\boldsymbol{F}_C$ 都是作用于整个系统的外力。

整个系统的受力图如图 1-18e 所示。

应该指出，内力与外力的区分不是绝对的。例如，当我们把梯子的 AC 部分作为研究对象时，$\boldsymbol{F}'_{Ax}$，$\boldsymbol{F}'_{Ay}$ 和 $\boldsymbol{F}'_E$ 均属外力，但取整体为研究对象时，$\boldsymbol{F}'_{Ax}$，$\boldsymbol{F}'_{Ay}$ 及 $\boldsymbol{F}'_E$ 又成为内力。可见，内力与外力的区分，只有相对于某一确定的研究对象才有意义。

正确地画出物体的受力图，是分析、解决力学问题的基础。画受力图时必须注意如下几点：

1. 必须明确研究对象。根据求解需要，可以取单个物体为研究对象，也可以取由几个物体组成的系统为研究对象。不同的研究对象的受力图是不同的。

2. 正确确定研究对象受力的数目。由于力是物体之间相互的机械作用，因此，对每一个力都应明确它是哪一个施力物体施加给研究对象的，决不能凭空产生。同时，也不可漏掉一个力。一般可先画已知的主动力，再画约束力；凡是研究对象与外界接触的地方，都一定存在约束力。

3. 正确画出约束力。一个物体往往同时受到几个约束的作用,这时应分别根据每个约束本身的特性来确定其约束力的方向,而不能凭主观臆测。

4. 当分析两物体间相互的作用力时,应遵循作用、反作用关系。若作用力的方向一经假定,则反作用力的方向应与之相反。当画某个系统的受力图时,由于内力成对出现,组成平衡力系,因此不必画出,只需画出全部外力。

小 结

1. 静力学是研究物体在力系作用下的平衡条件的科学。

2. 静力学公理

公理 1 力的平行四边形法则。

公理 2 二力平衡条件。

公理 3 加减平衡力系原理。

公理 4 作用和反作用定律。

公理 5 刚化原理。

3. 约束和约束力

限制非自由体某些位移的周围物体,称为约束。约束对非自由体施加的力称为约束力。约束力的方向与该约束所能阻碍的位移方向相反。

4. 物体的受力分析和受力图

画物体受力图时,首先要明确研究对象(即取分离体)。物体受的力分为主动力和约束力。要注意分清内力与外力,在受力图上一般只画研究对象所受的外力;还要注意作用力与反作用力之间的相互关系。

思 考 题

1-1 说明下列式子的意义和区别:

(1) $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}_2$, (2) $F_1=F_2$, (3) 力 $\boldsymbol{F}_1$ 等效于力 $\boldsymbol{F}_2$。

1-2 为什么说二力平衡条件、加减平衡力系原理和力的可传性等都只能适用于刚体?

1-3 试区别 $\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ 和 $F_R=F_1+F_2$ 两个等式代表的意义。

1-4 什么叫二力构件? 分析二力构件受力时与构件的形状有无关系。

1-5 图 1-19～图 1-24 中各物体的受力图是否有错误? 如何改正?

1-6 若将例 1-4(图 1-17a)中的载荷 $\boldsymbol{F}$ 作用于铰链 C 处。(1) 试分别画出左、右两拱及销 C 的受力图;(2) 若销钉 C 属于 AC,分别画出左、右两拱的受力图;(3) 若销钉 C 属于 BC,分别画出左、右两拱的受力图。

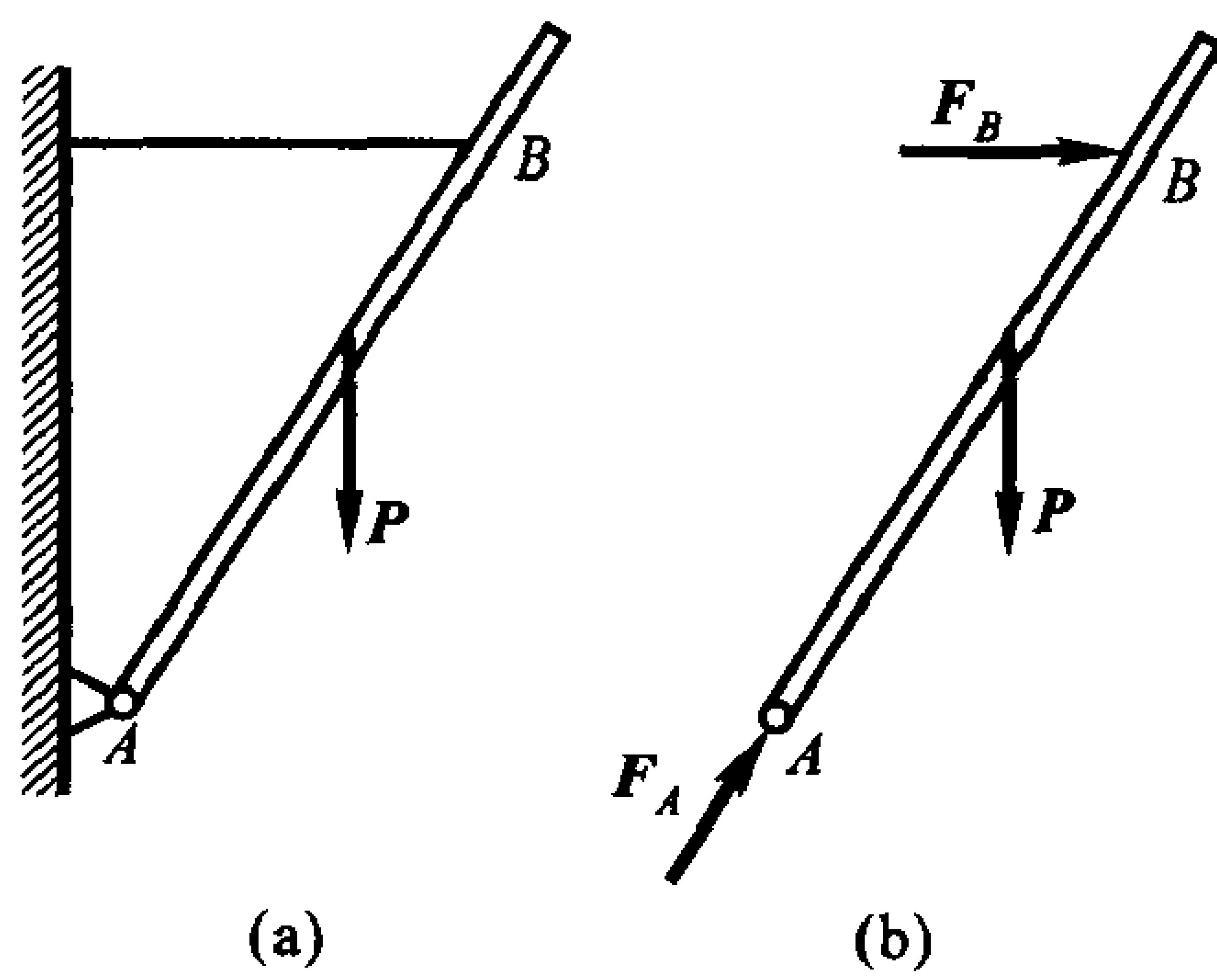


图 1-19

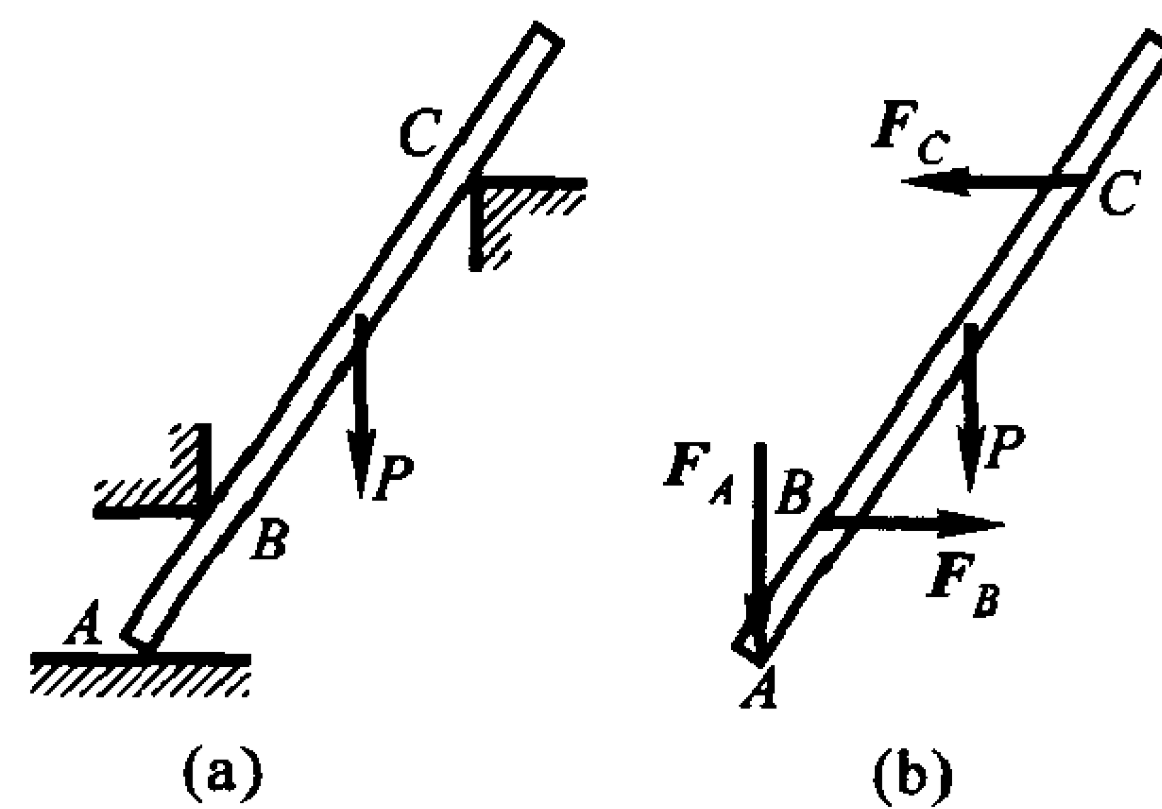


图 1-20

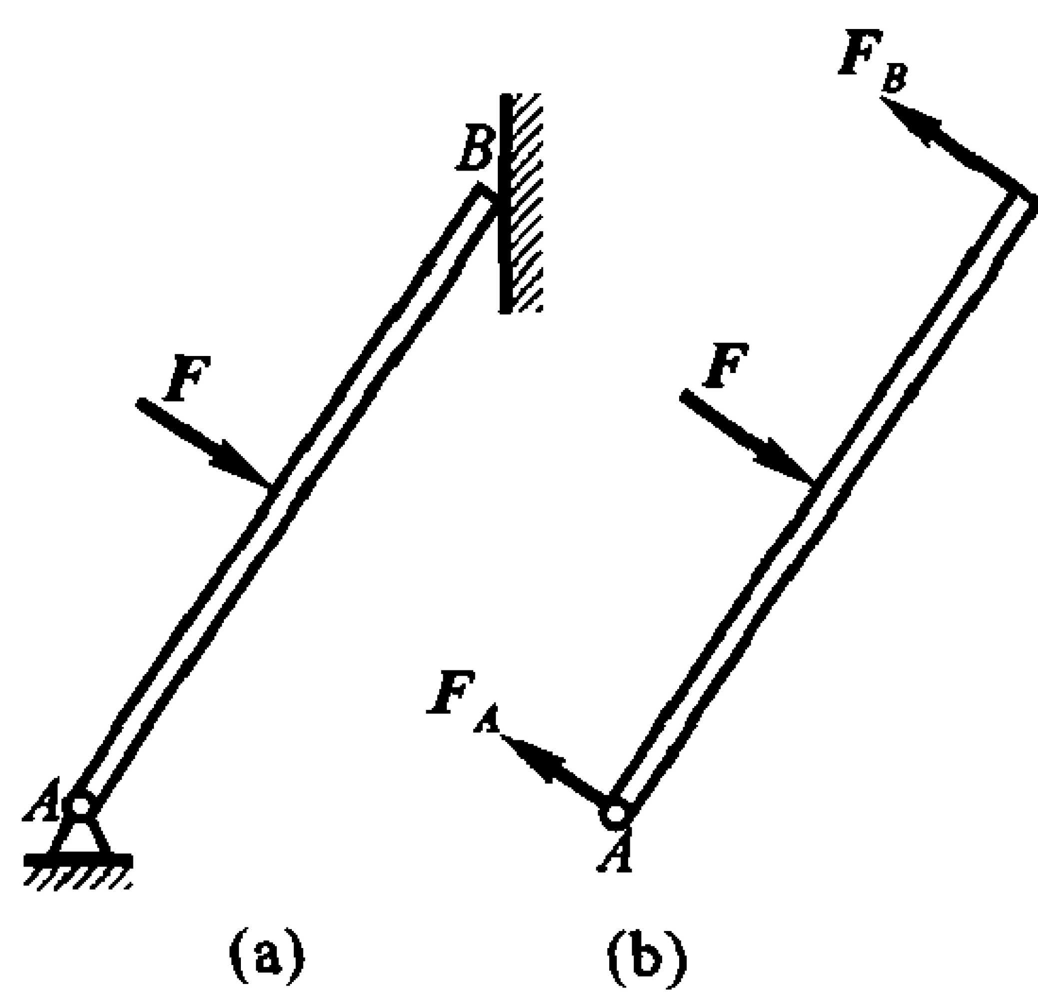


图 1-21

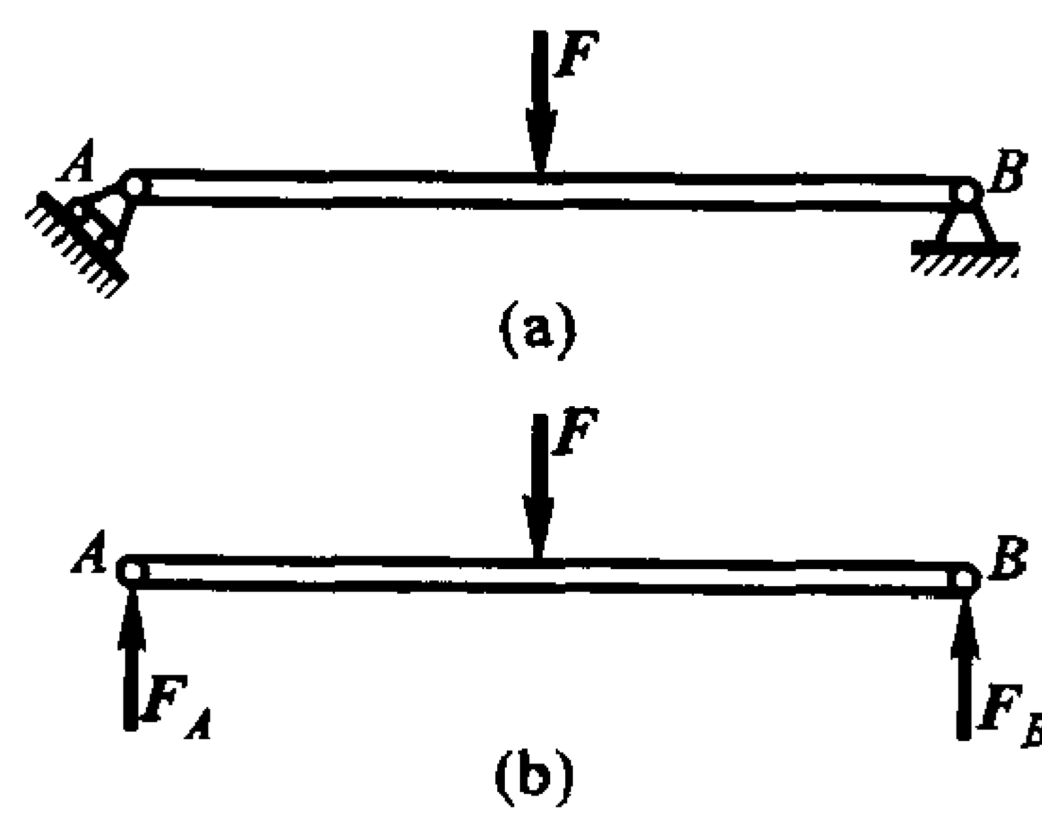


图 1-22

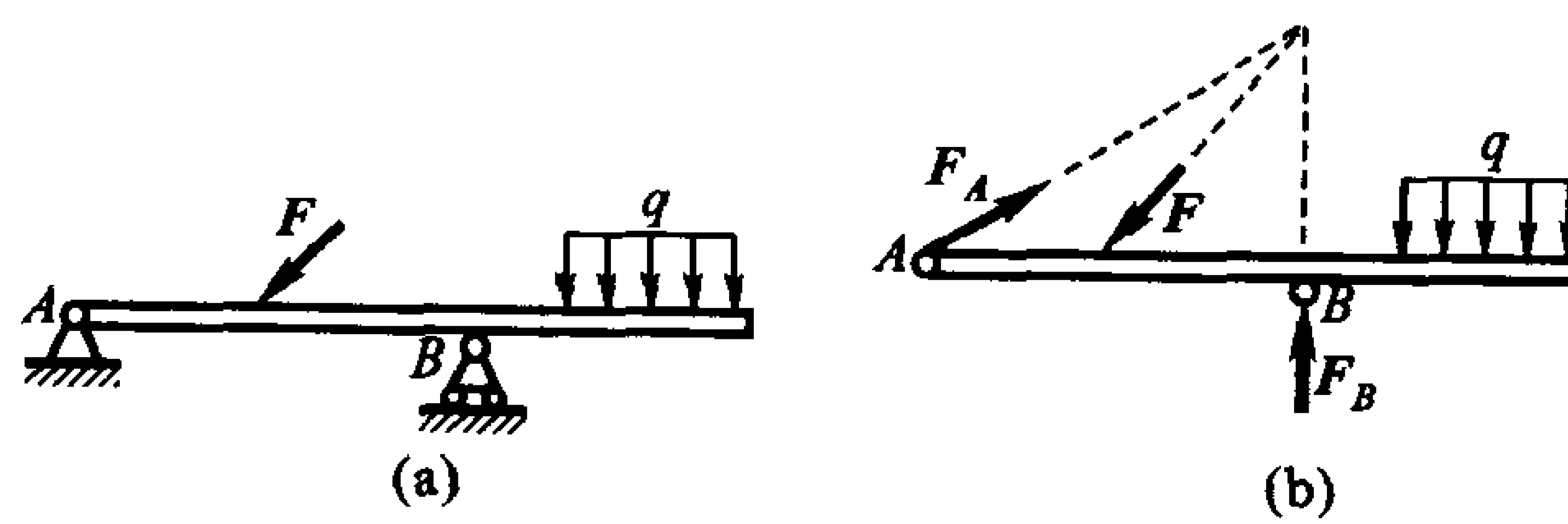


图 1-23

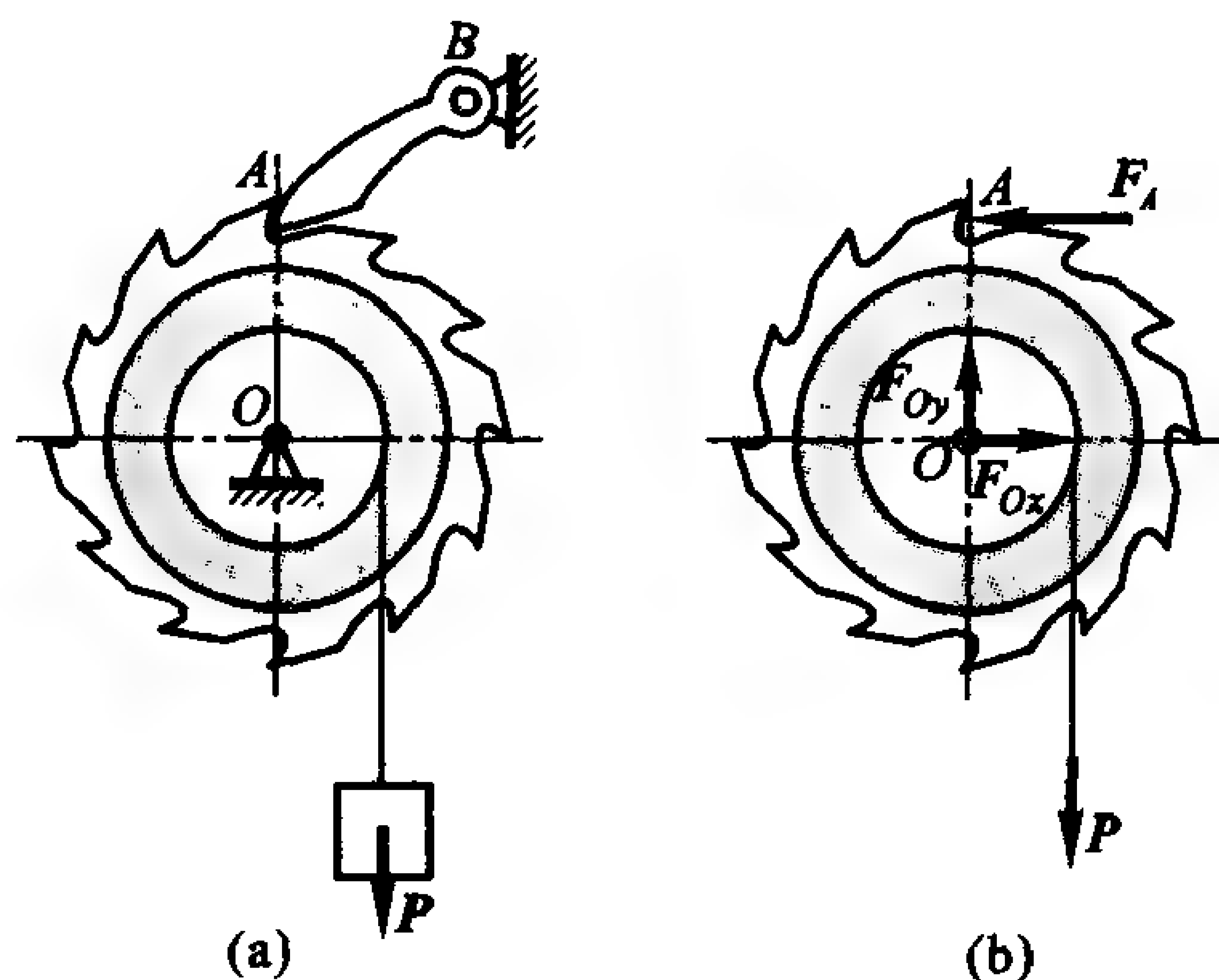
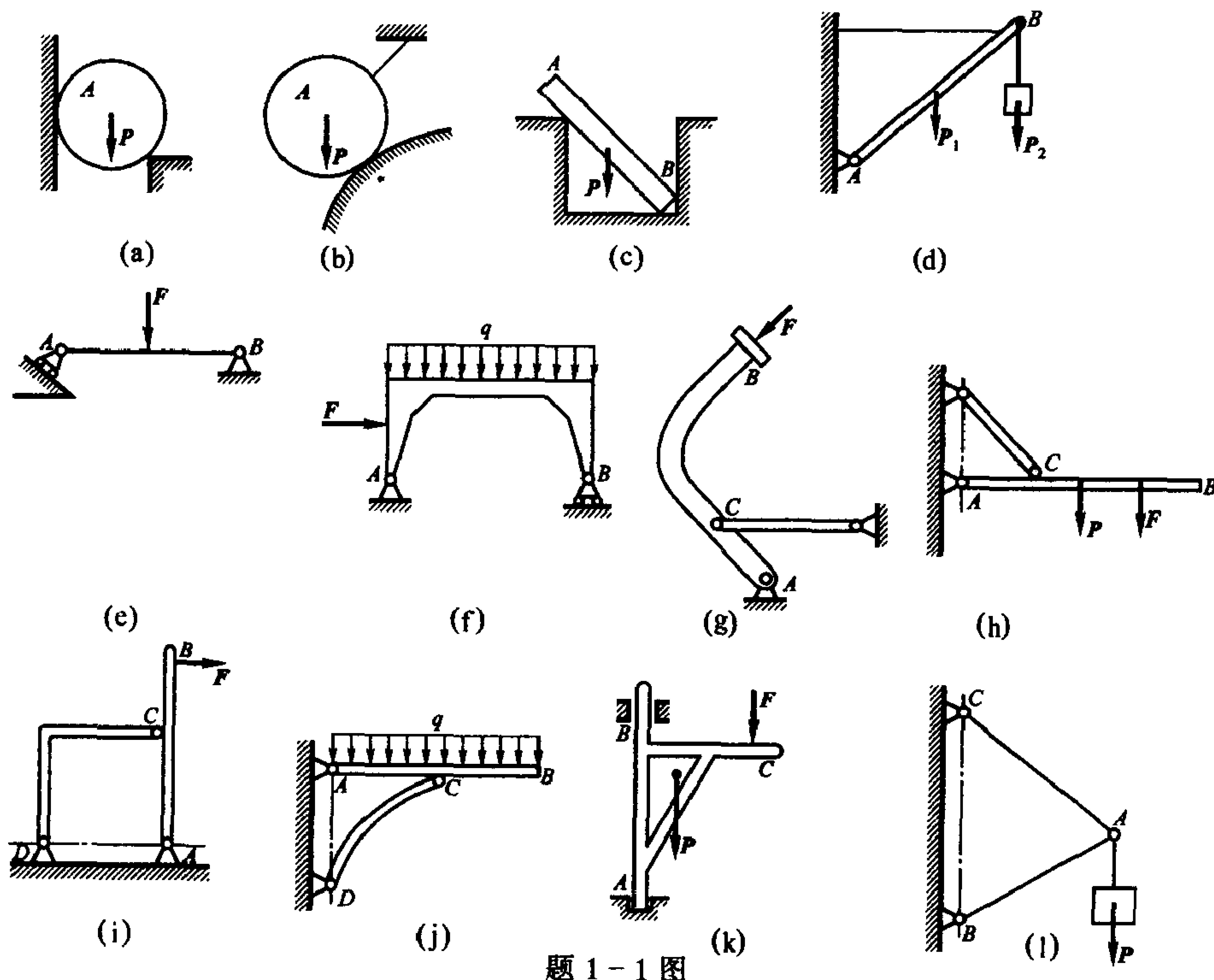


图 1－24

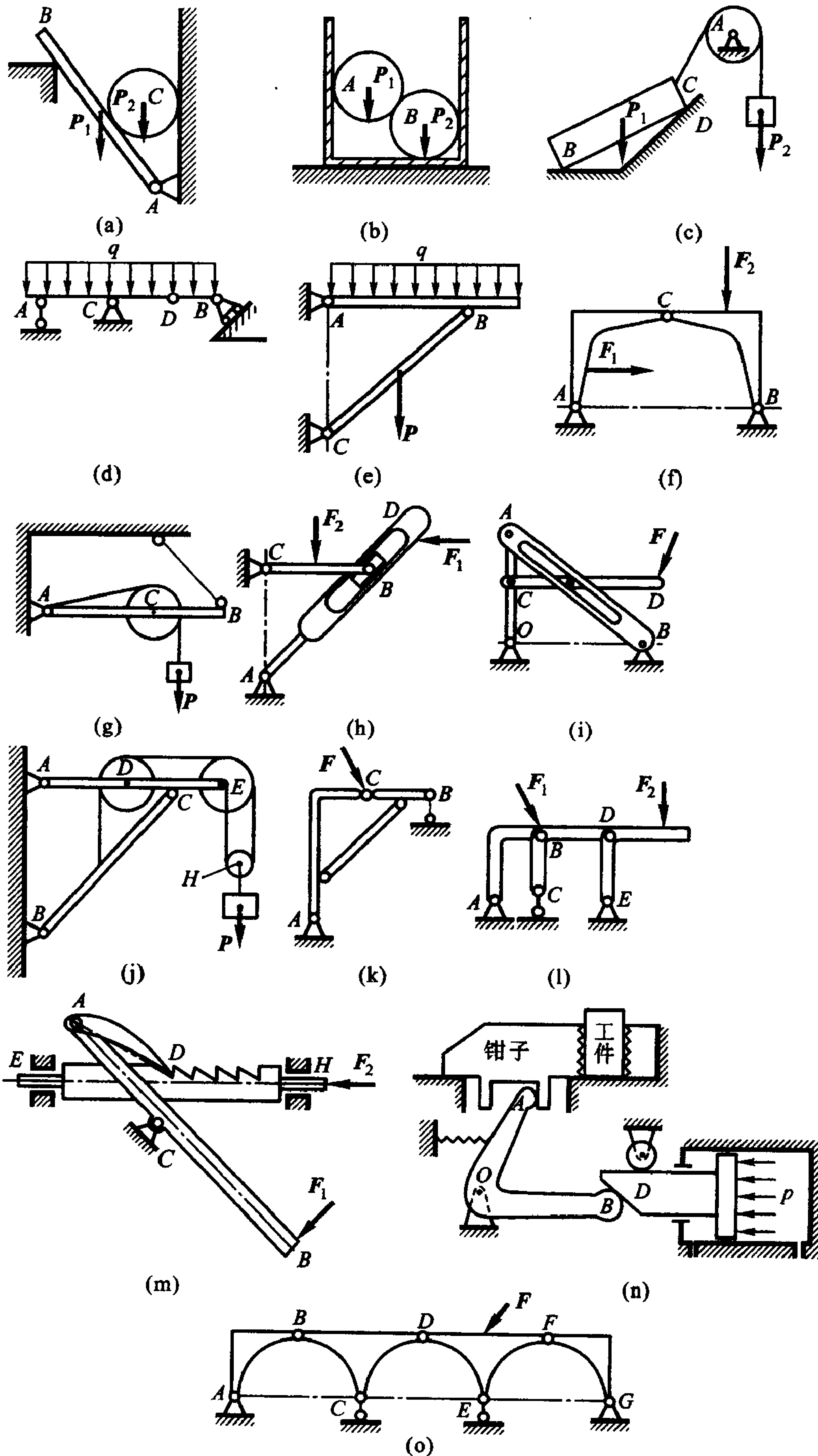
习 题

1－1 画出下列各图中物体 A，ABC 或构件 AB，AC 的受力图。未画重力的各物体的自重不计，所有接触处均为光滑接触。



题 1－1 图

1－2 画出下列每个标注字符的物体的受力图。题图中未画重力的各物体的自重不计，所有接触处均为光滑接触。



题1-2图

第二章　平面汇交力系与平面力偶系

平面汇交力系与平面力偶系是两种简单力系，是研究复杂力系的基础。本章将分别用几何法与解析法研究平面汇交力系的合成与平衡问题，同时介绍力偶的特性及平面力偶系的合成与平衡问题。

§2－1　平面汇交力系合成与平衡的几何法

平面汇交力系是指各力的作用线都在同一平面内且汇交于一点的力系。

1．平面汇交力系合成的几何法、力多边形法则

设一刚体受到平面汇交力系 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3,\boldsymbol{F}_4$ 的作用，各力作用线汇交于点 A，根据刚体内部力的可传性，可将各力沿其作用线移至汇交点 A，如图 2－1a 所示。

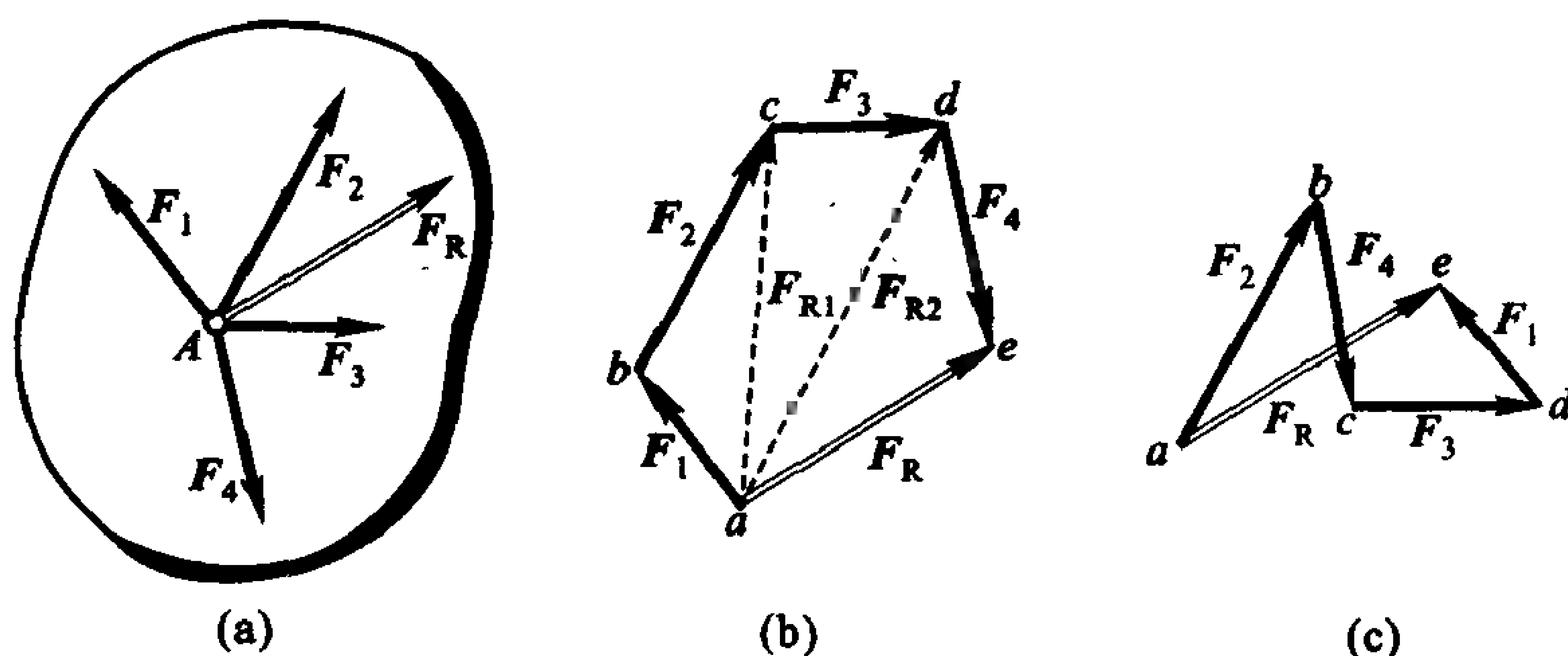


图 2－1

为合成此力系，可根据力的平行四边形法则，逐步两两合成各力，最后求得一个通过汇交点 A 的合力 $\boldsymbol{F}_R$；还可以用更简便的方法求此合力 $\boldsymbol{F}_R$ 的大小与方向。任取一点 a 将各分力的矢量依次首尾相连，由此组成一个不封闭的**力多边形** $abcde$，如图 2－1b 所示。此图中的虚线$\overrightarrow{ac}$矢($\boldsymbol{F}_{R1}$)为力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力矢，又虚线$\overrightarrow{ad}$矢($\boldsymbol{F}_{R2}$)为力 $\boldsymbol{F}_{R1}$ 与 $\boldsymbol{F}_3$ 的合力矢，在作力多边形时不必画出。

根据矢量相加的交换律，任意变换各分力矢的作图次序，可得形状不同的力多边形，但其合力矢$\overrightarrow{ae}$仍然不变，如图 2－1c 所示。封闭边矢量$\overrightarrow{ae}$仅表示此平面

汇交力系合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 的大小与方向(即合力矢),而合力的作用线仍应通过原汇交点 A,如图 2-1a 所示的 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$。

总之,平面汇交力系可简化为一合力,其合力的大小与方向等于各分力的矢量和(几何和),合力的作用线通过汇交点。设平面汇交力系包含 n 个力,以 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 表示它们的合力矢,则有

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \tag{2-1}$$

合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 对刚体的作用与原力系对该刚体的作用等效。如果一力与某一力系等效,则此力称为该力系的**合力**。

如力系中各力的作用线都沿同一直线,则此力系称为共线力系,它是平面汇交力系的特殊情况,它的力多边形在同一直线上。若沿直线的某一指向为正,相反为负,则力系合力的大小与方向决定于各分力的代数和,即

$$F_{\mathrm{R}}=\sum_{i=1}^{n}F_i \tag{2-2}$$

2. 平面汇交力系平衡的几何条件

由于平面汇交力系可用其合力来代替,显然,平面汇交力系平衡的必要和充分条件是:该力系的合力等于零。即

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=0 \tag{2-3}$$

在平衡情形下,力多边形中最后一力的终点与第一力的起点重合,此时的力多边形称为封闭的力多边形。于是,平面汇交力系平衡的必要和充分条件是:该力系的力多边形自行封闭,这是平衡的几何条件。

求解平面汇交力系的平衡问题时可用图解法,即按比例先画出封闭的力多边形,然后,量得所要求的未知量;也可根据图形的几何关系,用三角公式计算出所要求的未知量,这种解题方法称为几何法。

例 2-1 支架的横梁 AB 与斜杆 DC 彼此以铰链 C 相联接,并各以铰链 A,D 连接于铅直墙上。如图 2-2a 所示。已知 $AC=CB$;杆 DC 与水平线成 45°角;载荷 $F=10$ kN,作用于 B 处。设梁和杆的重量忽略不计,求铰链 A 的约束力和杆 DC 所受的力。

解: 选取横梁 AB 为研究对象。横梁在 B 处受载荷 $\boldsymbol{F}$ 作用。DC 为二力杆,它对横梁 C 处的约束力 $\boldsymbol{F}_C$ 的作用线必沿两铰链 D,C 中心的连线。铰链 A 的约束力 $\boldsymbol{F}_A$ 的作用线可根据三力平衡汇交定理确定,即通过另两力的交点 E,如图 2-2b 所示。

根据平面汇交力系平衡的几何条件,这三个力应组成一封闭的力三角形。按照图中力的比例尺,先画出已知力矢 $\overrightarrow{ab}=\boldsymbol{F}$,再由点 a 作直线平行于 AE,由点 b 作直线平行 CE,这两直线相交于点 d,如图 2-2c。由力三角形 abd 封闭,可确定 $\boldsymbol{F}_C$ 和 $\boldsymbol{F}_A$ 的指向。

在力三角形中,线段 bd 和 da 分别表示力 $\boldsymbol{F}_C$ 和 $\boldsymbol{F}_A$ 的大小,量出它们的长度,按比例换算即可求得 $\boldsymbol{F}_C$ 与 $\boldsymbol{F}_A$ 的大小。但一般都是利用三角公式计算,在图 2-2(b),(c)中,通过简

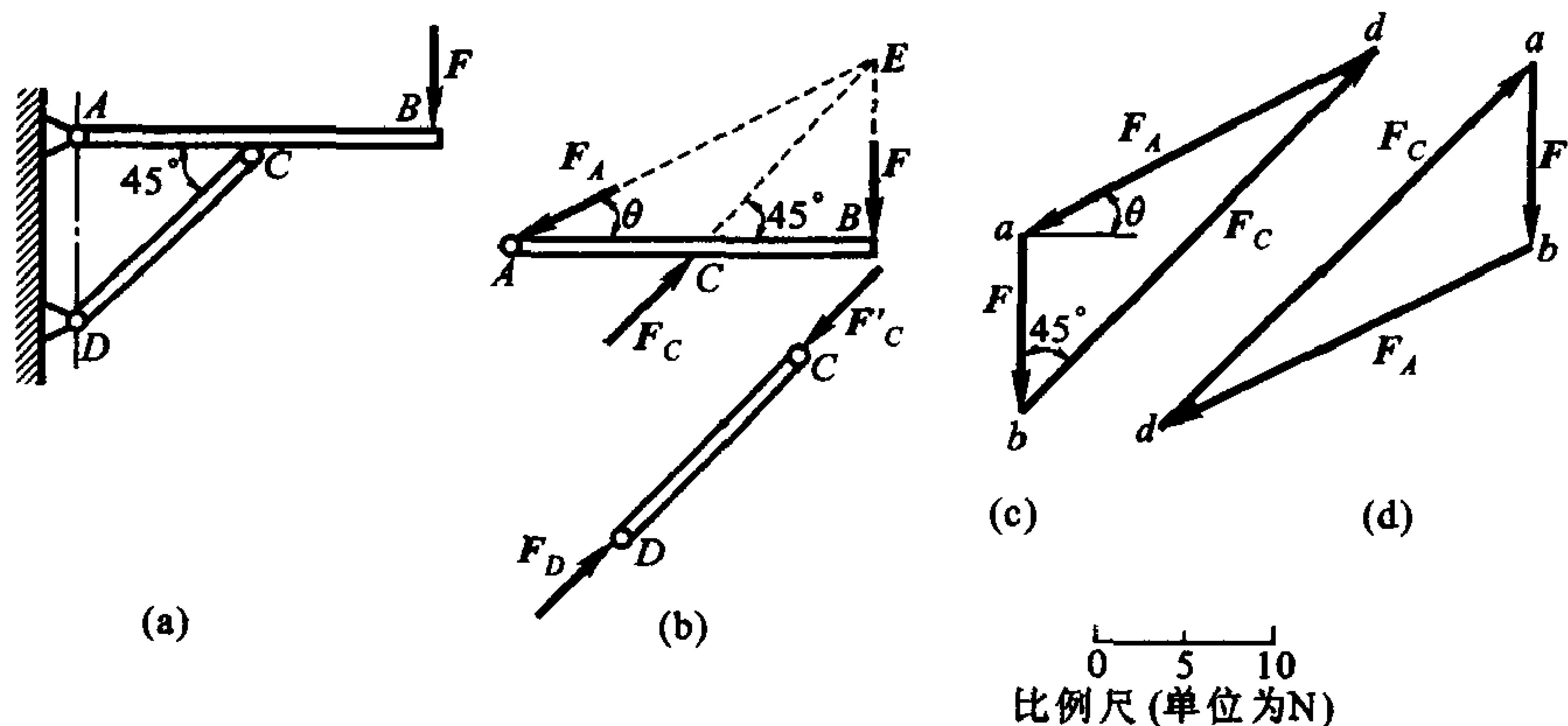


图 2-2

单的三角计算可得

$$F_C=28.3\ \text{kN}\quad F_A=22.4\ \text{kN}$$

根据作用力和反作用力的关系，作用于杆 DC 的 C 端的力 $\boldsymbol{F}'_C$ 与 $\boldsymbol{F}_C$ 的大小相等，方向相反。由此可知杆 DC 受压力，如图 2-2b 所示。

应该指出，封闭力三角形也可以如图 2-2d 所示，同样可求得力 $\boldsymbol{F}_C$ 和 $\boldsymbol{F}_A$，且结果相同。

通过以上例题，可总结几何法解题的主要步骤如下：

(1) 选取研究对象。根据题意，选取适当的平衡物体作为研究对象，并画出简图。

(2) 画受力图。在研究对象上，画出它所受的全部已知力和未知力(包括约束力)。

(3) 作力多边形或力三角形。选择适当的比例尺，作出该力系的封闭力多边形或封闭力三角形。必须注意，作图时总是从已知力开始。根据矢序规则和封闭特点，就可以确定未知力的指向。

(4) 求出未知量。按比例确定未知量，或者用三角公式计算出来。

§2-2　平面汇交力系合成与平衡的解析法

1. 平面汇交力系合成的解析法

设由 n 个力组成的平面汇交力系作用于一个刚体上，建立直角坐标系 Oxy，如图 2-3a 所示。此汇交力系的合力 $\boldsymbol{F}_R$ 的解析表达式为

$$\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{F}_{Rx}+\boldsymbol{F}_{Ry}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}\tag{2-4}$$

式中，F_x，F_y 为合力 $\boldsymbol{F}_R$ 在 x，y 轴上的投影。(图 2-3b)有

$$F_x = F_R\cos\theta, F_y = F_R\cos\beta \tag{2-5}$$

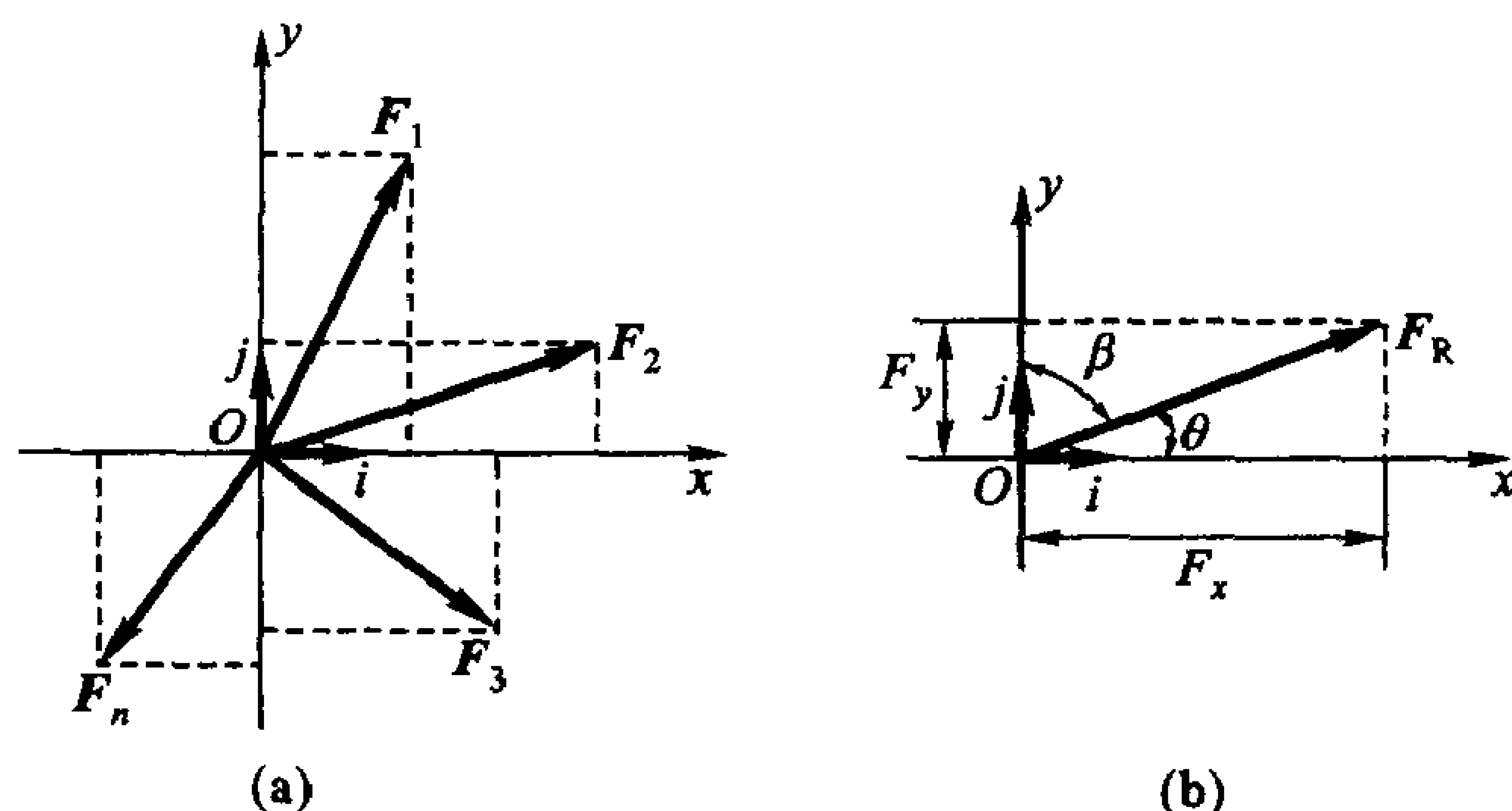


图2-3

根据合矢量投影定理:合矢量在某一轴上的投影等于各分矢量在同一轴上投影的代数和,将式(2-1)向 x,y 轴投影,可得

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F_{x1} + F_{x2} + \cdots + F_{xn} = \sum_{i=1}^{n} F_{xi} \\ F_y &= F_{y1} + F_{y2} + \cdots + F_{yn} = \sum_{i=1}^{n} F_{yi} \end{aligned}\right\} \tag{2-6}$$

其中 F_{x1}和 F_{y1},F_{x2}和 F_{y2},…,F_{xn}和F_{yn}分别为各分力在x 和y 轴上的投影。

合力矢的大小和方向余弦为

$$\left.\begin{aligned} &F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(\sum F_{xi})^2 + (\sum F_{yi})^2} \\ &\cos(\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{i}) = \frac{F_x}{F_R} = \frac{\sum F_{xi}}{F_R}, \cos(\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{j}) = \frac{F_y}{F_R} = \frac{\sum F_{yi}}{F_R} \end{aligned}\right\} \tag{2-7}$$

例 2-2 已知:$F_1 = 200$ N,$F_2 = 300$ N,$F_3 = 100$ N,$F_4 = 250$ N,求图 2-4 所示平面汇交力系的合力。

解: 根据式(2-6)和(2-7)计算。

$$\sum_{i=1}^{4} F_{xi} = F_1\cos 30° - F_2\cos 60° - F_3\cos 45° + F_4\cos 45° = 129.3\ \text{N}$$

$$\sum_{i=1}^{4} F_{yi} = F_1\cos 60° + F_2\cos 30° - F_3\cos 45° - F_4\cos 45° = 112.3\ \text{N}$$

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(\sum F_{xi})^2 + (\sum F_{yi})^2} = \sqrt{129.3^2 + 112.3^2}\ \text{N} = 171.3\ \text{N}$$

$$\cos(\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{i}) = \frac{F_x}{F_R} = \frac{\sum F_{xi}}{F_R} = \frac{129.3}{171.3} = 0.754\ 8$$

$$\cos(\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{j}) = \frac{F_y}{F_R} = \frac{\sum F_{yi}}{F_R} = \frac{112.3}{171.3} = 0.655\ 6$$

则合力 $\boldsymbol{F}_R$ 与 x,y 轴夹角分别为

$(\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{i}) = 40.99°$，　$(\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{j}) = 49.01°$

合力 $\boldsymbol{F}_R$ 的作用线通过汇交点 O。

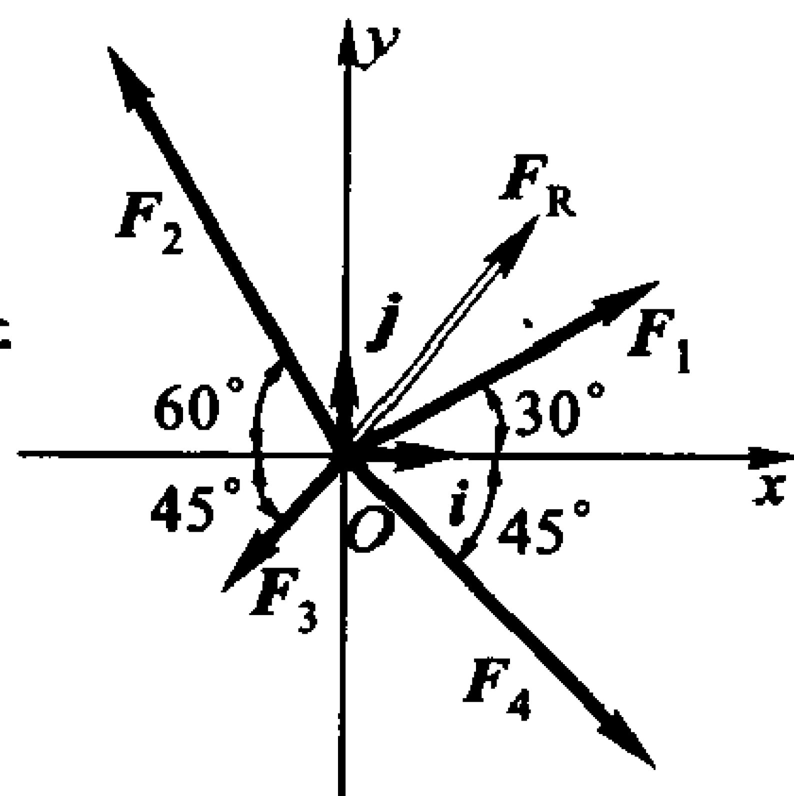


图 2－4

2．平面汇交力系的平衡方程

由§2－1知，平面汇交力系平衡的必要和充分条件是：该力系的合力 $\boldsymbol{F}_R$ 等于零。由式(2－7)应有

$$F_R = \sqrt{(\sum F_{xi})^2 + (\sum F_{yi})^2} = 0$$

欲使上式成立，必须同时满足

$$\sum F_{xi} = 0, \sum F_{yi} = 0 \qquad (2-8)$$

于是，平面汇交力系平衡的必要和充分条件是：各力在两个坐标轴上投影的代数和分别等于零。式(2－8)称为平面汇交力系的**平衡方程**（为便于书写，下标 i 可略去）。这是两个独立的方程，可以求解两个未知量。

下面举例说明平面汇交力系平衡方程的实际应用。

例 2－3　如图 2－5a 所示，重力 $P = 20$ kN，用钢丝绳挂在铰车 D 及滑轮 B 上。A，B，C 处为光滑铰链连接。钢丝绳、杆和滑轮的自重不计，并忽略摩擦和滑轮的大小，试求平衡时杆 AB 和 BC 所受的力。

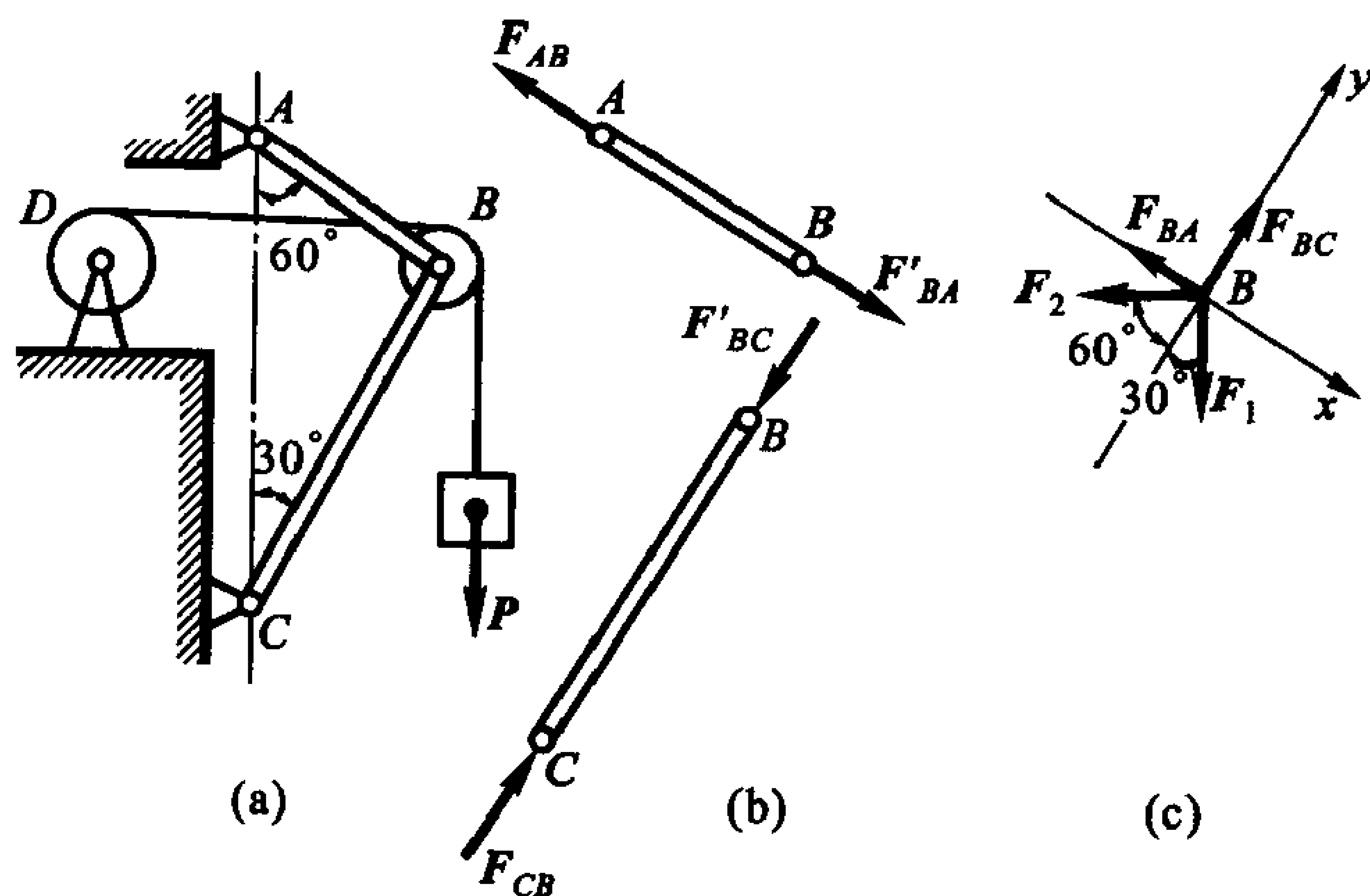


图 2－5

解：（1）取研究对象。由于 AB，BC 两杆都是二力杆，假设杆 AB 受拉力，杆 BC 受压力，如图 2－5b 所示。为了求出这两个未知力，可求两杆对滑轮的约束力。因此选取滑轮 B 为研究对象。

（2）画受力图。滑轮受到钢丝绳的拉力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$（已知 $F_1 = F_2 = P$）。此外杆 AB 和 BC 对滑轮的约束力为 $\boldsymbol{F}_{BA}$ 和 $\boldsymbol{F}_{BC}$。由于滑轮的大小可忽略不计，故这些力可看作是汇交力系，如图 2－5c 所示。

（3）列平衡方程。选取坐标轴如图 2－5c 所示，坐标轴应尽量取在与未知力作用线相垂

直的方向。这样在一个平衡方程中只有一个未知数,不必解联立方程,即

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{BA} + F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 30^\circ = 0 \tag{a}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{BC} - F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ = 0 \tag{b}$$

(4) 求解方程,得

$$F_{BA} = -0.366P = -7.321 \text{ kN}$$

$$F_{BC} = 1.366P = 27.32 \text{ kN}$$

所求结果,F_{BC}为正值,表示这力的假设方向与实际方向相同,即杆 BC 受压。F_{BA}为负值,表示这力的假设方向与实际方向相反,即杆 AB 也受压力。

§2-3 平面力对点之矩的概念及计算

力对刚体的作用效应使刚体的运动状态发生改变(包括移动与转动),其中力对刚体的移动效应可用力矢来度量;而力对刚体的转动效应可用力对点的矩(简称力矩)来度量,即力矩是度量力对刚体转动效应的物理量。

1. 力对点之矩(力矩)

如图 2-6 所示,力 $\boldsymbol{F}$ 与点 O 位于同一平面内,点 O 称为**矩心**,点 O 到力的作用线的垂直距离 h 称为**力臂**,在平面问题中,力对点的矩的定义如下:

力对点之矩是一个代数量,它的绝对值等于力的大小与力臂的乘积,它的正负可按下法确定:力使物体绕矩心逆时针转向时为正,反之为负。

力 $\boldsymbol{F}$ 对于点 O 的矩以 $M_O(\boldsymbol{F})$表示,即

$$M_O(\boldsymbol{F}) = \pm Fh = \pm 2A_{\triangle OAB} \tag{2-9}$$

其中 $A_{\triangle OAB}$为三角形 OAB 的面积,如图 2-6 所示。

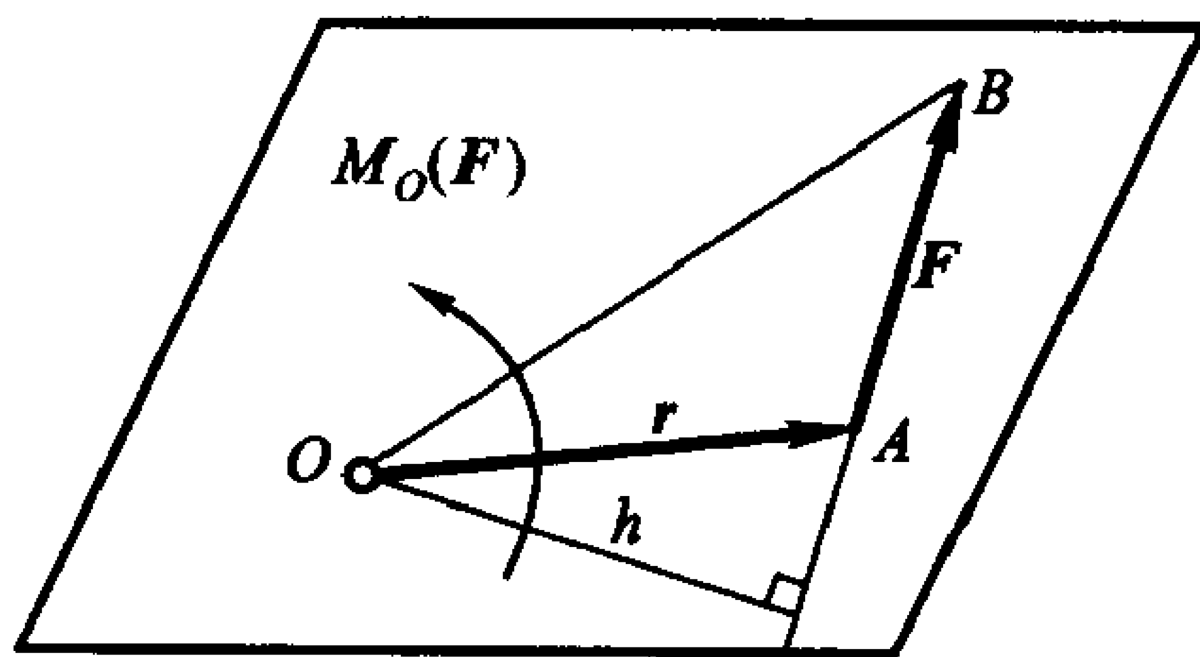


图 2-6

显然,当力的作用线通过矩心,即力臂等于零时,它对矩心的力矩等于零。力矩的单位常用 N·m 或 kN·m。

2. 合力矩定理与力矩的解析表达式

合力矩定理:平面汇交力系的合力对于平面内任一点之矩等于所有各分力对于该点之矩的代数和。即

$$M_O(\boldsymbol{F}_R)=\sum_{i=1}^{n}M_O(\boldsymbol{F}_i) \quad (2-10)$$

按力系等效概念，上式易于理解，且式(2-10)应适用于任何有合力存在的力系。

如图2-7所示，已知力$\boldsymbol{F}$，作用点$A(x,y)$及其夹角θ。欲求力$\boldsymbol{F}$对坐标原点O之矩，可按式(2-10)，通过其分力$\boldsymbol{F}_x$与$\boldsymbol{F}_y$对点O之矩而得到，即

$$M_O(\boldsymbol{F})=M_O(\boldsymbol{F}_y)+M_O(\boldsymbol{F}_x)=xF\sin\theta-yF\cos\theta$$

或

$$M_O(\boldsymbol{F})=xF_y-yF_x \quad (2-11)$$

上式为平面内力矩的解析表达式。其中，x,y为力$\boldsymbol{F}$作用点的坐标；F_x,F_y为力$\boldsymbol{F}$在x,y轴的投影。计算时应注意用它们的代数量代入。

若将式(2-11)代入式(2-10)，即可得合力$\boldsymbol{F}_R$对坐标原点之矩的解析表达式，即

$$M_O(\boldsymbol{F}_R)=\sum_{i=1}^{n}(x_iF_{yi}-y_iF_{xi}) \quad (2-12)$$

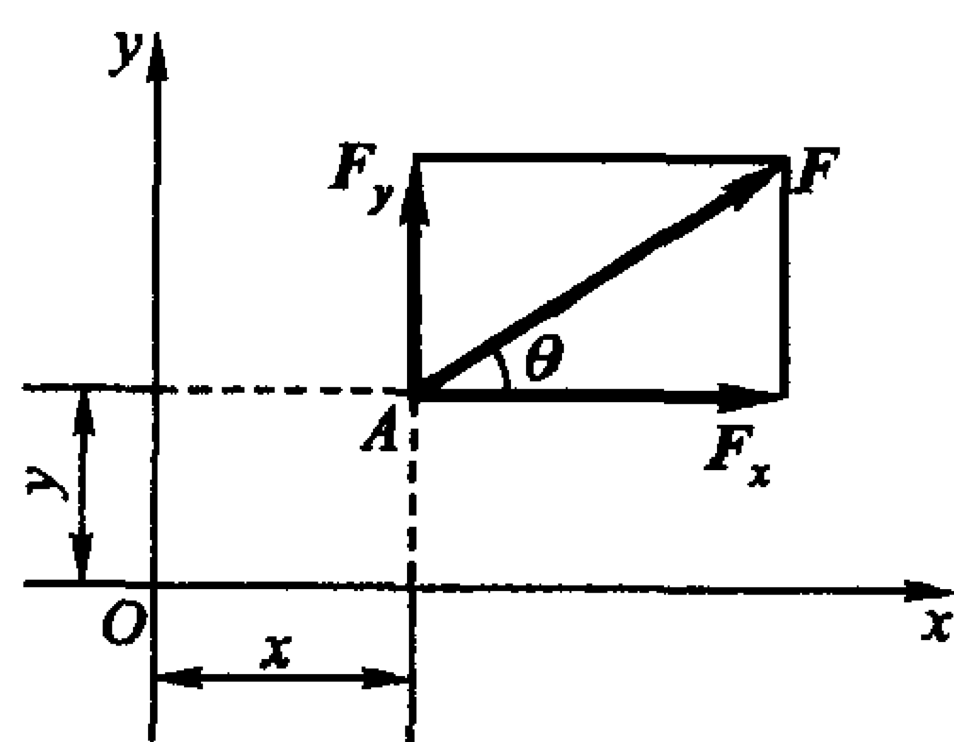


图2-7

例2-4　如图2-8a所示圆柱直齿轮，受到啮合力$\boldsymbol{F}$的作用。设$F=1\ 400$ N。压力角$\theta=20°$，齿轮的节圆(啮合圆)的半径$r=60$ mm，试计算力$\boldsymbol{F}$对于轴心O的力矩。

解：　计算力$\boldsymbol{F}$对点O的矩，可直接按力矩的定义求得(图2-8a)，即

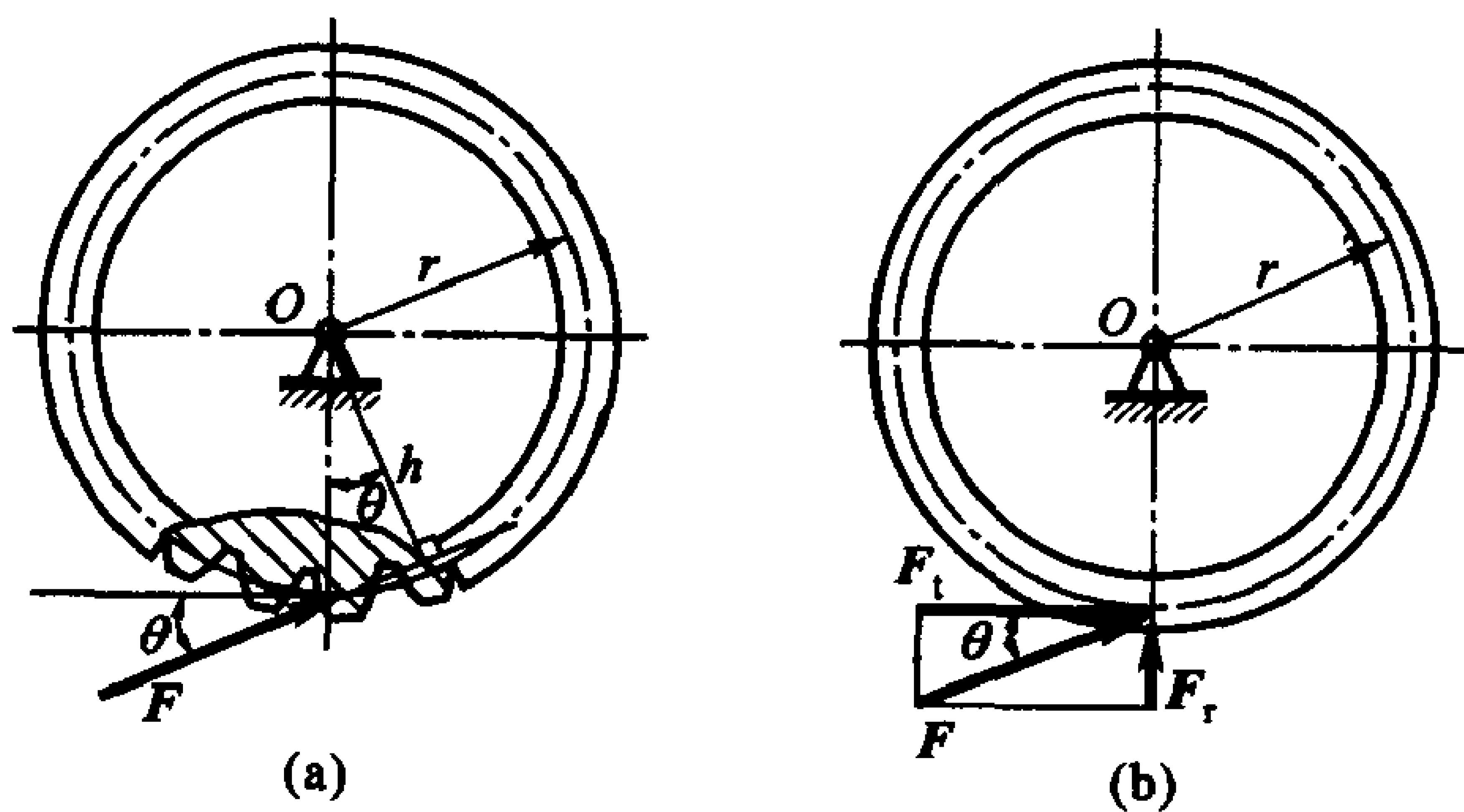


图2-8

$$M_O(\boldsymbol{F})=F\cdot h=Fr\cos\theta=1\ 400\ \text{N}\cdot 60\times10^{-3}\ \text{m}\cdot\cos 20°=78.93\ \text{N}\cdot\text{m}$$

也可以根据合力矩定理，将力$\boldsymbol{F}$分解为圆周力$\boldsymbol{F}_t$和径向力$\boldsymbol{F}_r$(图2-8b)，由于径向力$\boldsymbol{F}_r$通过矩心O，则

$$M_O(\boldsymbol{F})=M_O(\boldsymbol{F}_t)+M_O(\boldsymbol{F}_r)=M_O(\boldsymbol{F}_t)=F\cos\theta\cdot r$$

由此可见，以上两种方法的计算结果相同。

§2-4 平面力偶

1. 力偶与力偶矩

实践中，我们常常见到汽车司机用双手转动驾驶盘(图2-9a)、电动机的定子磁场对转子作用电磁力使之旋转(图2-9b)、钳工用丝锥攻螺纹等。在驾驶盘、电机转子、丝锥等物体上，都作用了成对的等值、反向且不共线的平行力。等值反向平行力的矢量和显然等于零，但是由于它们不共线而不能相互平衡，它们能使物体改变转动状态。这种由两个大小相等、方向相反且不共线的平行力组成的力系，称为**力偶**，如图2-10所示，记作($\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}'$)。力偶的两力之间的垂直距离 d 称为**力偶臂**，力偶所在的平面称为**力偶的作用面**。

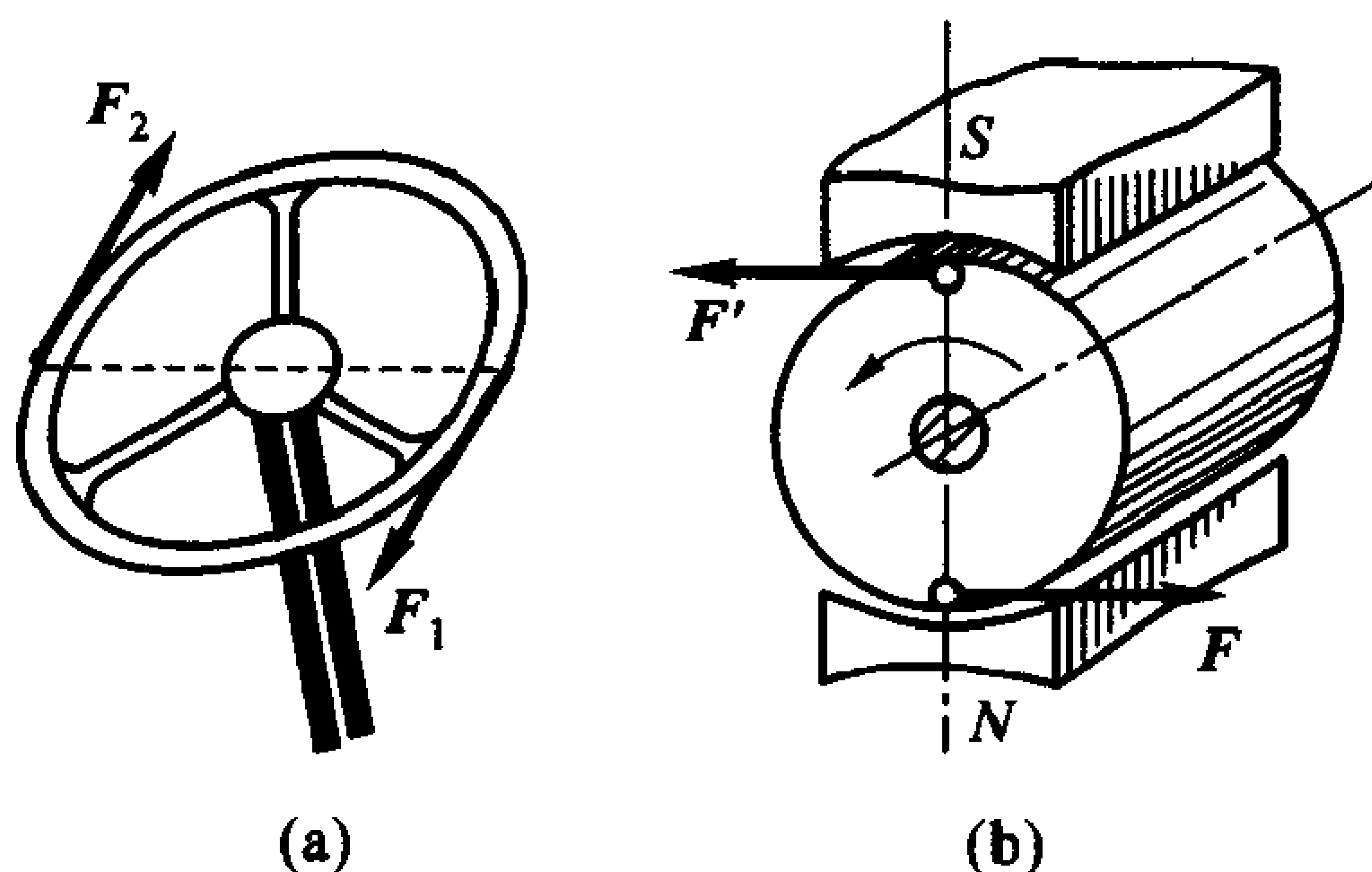


图2-9

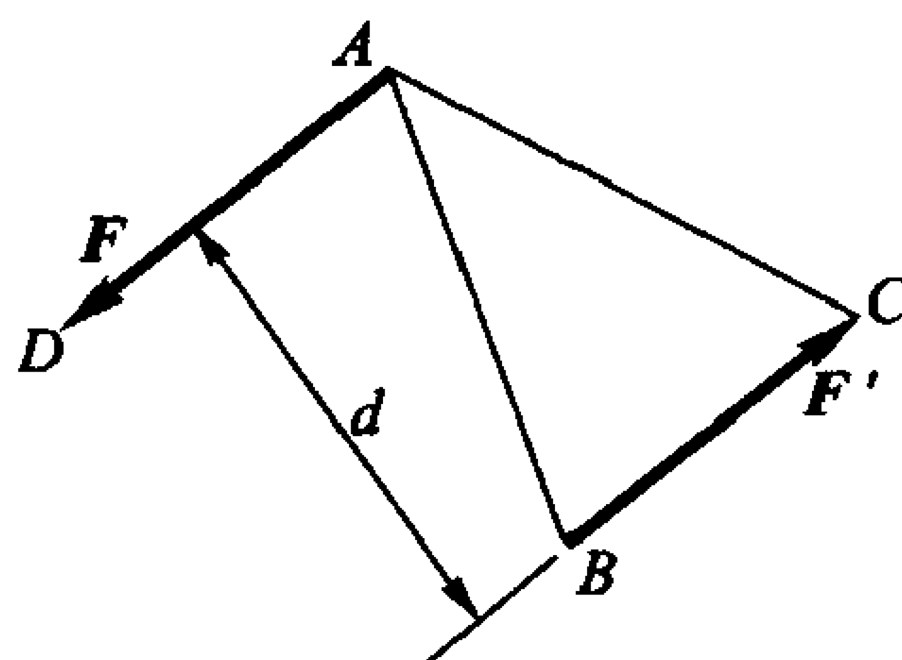


图2-10

由于力偶不能合成为一个力，故力偶也不能用一个力来平衡。因此，力和力偶是静力学的两个基本要素。

力偶是由两个力组成的特殊力系，它的作用只改变物体的转动状态。因此，力偶对物体的转动效应，可用**力偶矩**来度量，而力偶矩的大小为力偶中的两个力对其作用面内某点的矩的代数和，其值等于力与力偶臂的乘积即 Fd，与矩心位置无关。

力偶在平面内的转向不同，其作用效应也不相同。因此，平面力偶对物体的作用效应，由以下两个因素决定：

(1) 力偶矩的大小；

(2) 力偶在作用面内的转向。

因此，平面力偶矩可视为代数量，以 M 或 $M(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$ 表示，即

$$M = \pm Fd = 2A_{\triangle ABC} \tag{2-13}$$

于是可得结论：力偶矩是一个代数量，其绝对值等于力的大小与力偶臂的乘积，

正负号表示力偶的转向:一般以逆时针转向为正,反之则为负。力偶矩的单位与力矩相同,也是 N·m。力偶矩也可用三角形面积表示(图 2-10)。

2. 同平面内力偶的等效定理

由于力偶的作用只改变物体的转动状态,而力偶对物体的转动效应是用力偶矩来度量的,因此可得如下的定理。

定理:在同平面内的两个力偶,如果力偶矩相等,则两力偶彼此等效。

该定理给出了在同一平面内力偶等效的条件。由此可得推论:

(1) 任一力偶可以在它的作用面内任意移转,而不改变它对刚体的作用。因此,力偶对刚体的作用与力偶在其作用面内的位置无关。

(2) 只要保持力偶矩的大小和力偶的转向不变,可以同时改变力偶中力的大小和力偶臂的长短,而不改变力偶对刚体的作用。

由此可见,力偶的臂和力的大小都不是力偶的特征量,只有力偶矩是平面力偶作用的唯一量度。今后常用图 2-11 所示的符号表示力偶。M 为力偶矩。

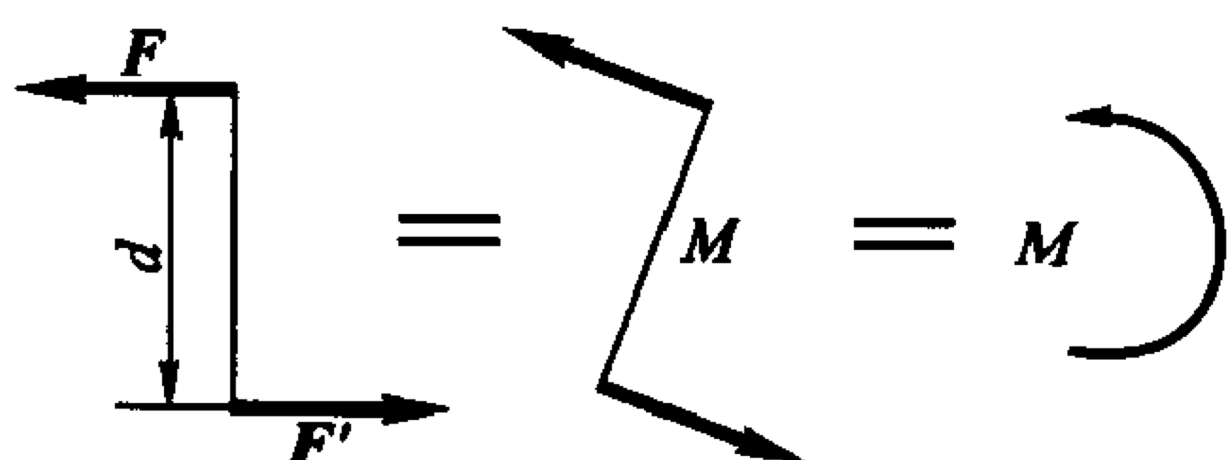


图 2-11

3. 平面力偶系的合成和平衡条件

(1) 平面力偶系的合成

设在同一平面内有两个力偶($\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}'_1$)和($\boldsymbol{F}_2$,$\boldsymbol{F}'_2$),它们的力偶臂各为 d_1 和 d_2,如图 2-12a 所示。这两个力偶的矩分别为 M_1 和 M_2,求它们的合成结果。为此,在保持力偶矩不变的情况下,同时改变这两个力偶的力的大小和力偶臂的长短,使它们具有相同的臂长 d,并将它们在平面内移转,使力的作用线重合,如图 2-12b 所示。于是得到与原力偶等效的两个新力偶($\boldsymbol{F}_3$,$\boldsymbol{F}'_3$)和($\boldsymbol{F}_4$,$\boldsymbol{F}'_4$)。即:

$$M_1 = F_1 d_1 = F_3 d,\ M_2 = -F_2 d_2 = -F_4 d$$

分别将作用在点 A 和 B 的力合成(设 $F_3 > F_4$),得

$$F = F_3 - F_4 \quad F' = F'_3 - F'_4$$

由于 F 与 F' 是相等的,所以构成了与原力偶系等效的**合力偶**($\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{F}'$),如图 2-12c 所示,以 M 表示合力偶的矩,得

$$M = Fd = (F_3 - F_4)d = F_3 d - F_4 d = M_1 + M_2$$

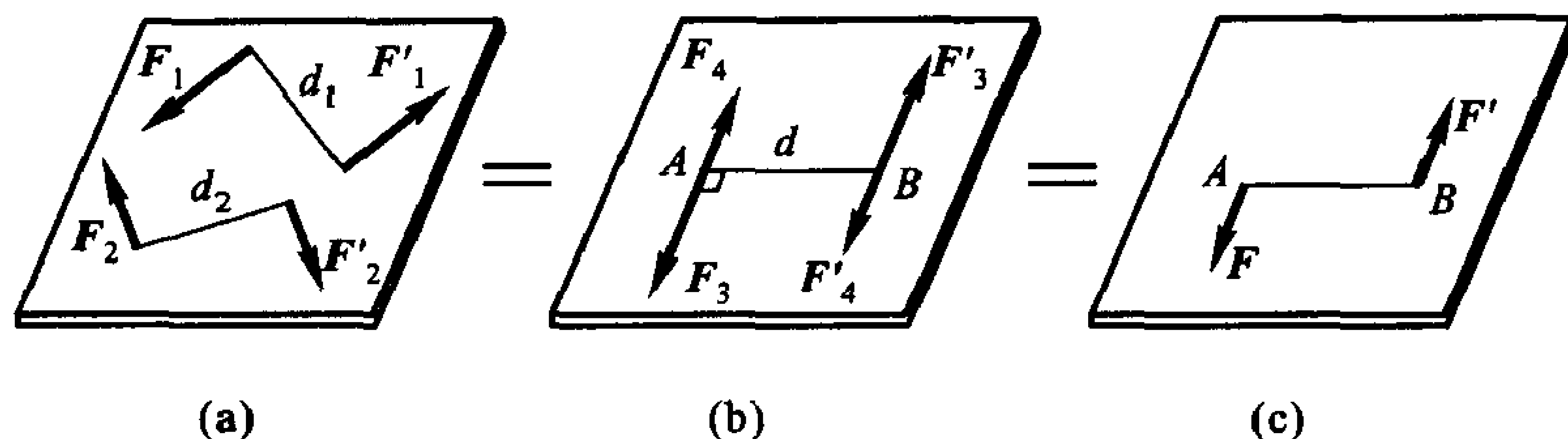


图 2-12

如果有两个以上的平面力偶,可以按照上述方法合成。即在同平面内的任意个力偶可合成为一个合力偶,合力偶矩等于各个力偶矩的代数和,可写为

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i \tag{2-14}$$

(2) 平面力偶系的平衡条件

由合成结果可知,力偶系平衡时,其合力偶的矩等于零。因此,平面力偶系平衡的必要和充分条件是:所有各力偶矩的代数和等于零,即

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0 \tag{2-15}$$

例 2-5 如图 2-13 所示的工件上作用有三个力偶。三个力偶的矩分别为:$M_1 = M_2 = 10\ \mathrm{N\cdot m}$,$M_3 = 20\ \mathrm{N\cdot m}$;固定螺柱 A 和 B 的距离 $l = 200\ \mathrm{mm}$。求两个光滑螺柱所受的水平力。

解: 选工件为研究对象。工件在水平面内受三个力偶和两个螺柱的水平约束力的作用。根据力偶系的合成定理,三个力偶合成后仍为一力偶,如果工件平衡,必有一反力偶与它相平衡。因此螺柱 A 和 B 的水平约束力 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$ 必组成一力偶,它们的方向假设如图 2-13 所示,则 $F_A = F_B$。由力偶系的平衡条件知

$$\sum M = 0,\quad F_A l - M_1 - M_2 - M_3 = 0$$

得

$$F_A = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{l}$$

代入已给数值

$$F_A = \frac{(10+10+20)\mathrm{N\cdot m}}{200\times 10^{-3}\mathrm{m}} = 200\ \mathrm{N}$$

因为 F_A 是正值,故所假设的方向是正确的,而螺柱 A,B 所受的力则应与 $\boldsymbol{F}_A$,$\boldsymbol{F}_B$ 大小相等,方向相反。

例 2-6 图 2-14a 所示机构的自重不计。圆轮上的销子 A 放在摇杆 BC 上的光滑导槽内。圆轮上作用一力偶,其力偶矩为 $M_1 = 2\ \mathrm{kN\cdot m}$,$OA = r = 0.5\ \mathrm{m}$。图示位置时 OA 与 OB 垂直,$\theta = 30°$,且系统平衡。求作用于摇杆 BC 上力偶的矩 M_2 及铰链 O,B 处的约束力。

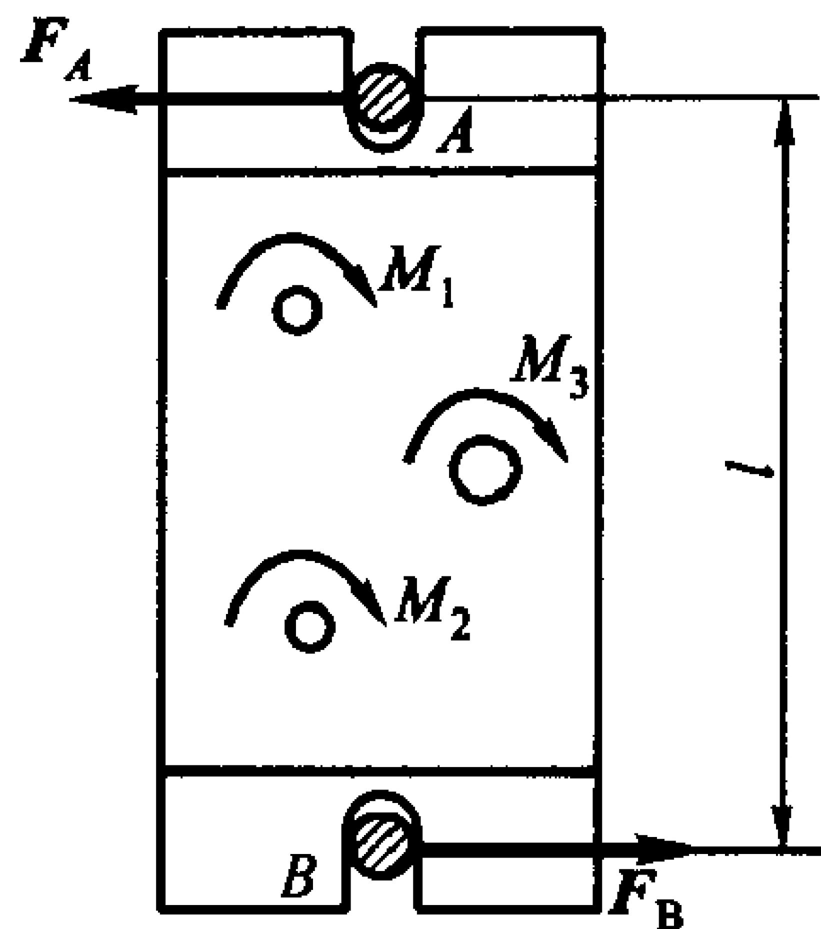


图 2-13

解: 先取圆轮为研究对象,其上受有矩为 M_1 的力偶及光滑导槽对销子 A 的作用力 $\boldsymbol{F}_A$ 和铰链 O 处约束力 $\boldsymbol{F}_O$ 的作用。由于力偶必须由力偶来平衡,因而 $\boldsymbol{F}_O$ 与 $\boldsymbol{F}_A$ 必定组成一力偶,力偶矩方向与 M_1 相反,由此定出 $\boldsymbol{F}_A$ 与 $\boldsymbol{F}_O$ 的指向如图 2-14b。由力偶平衡条件

$$\sum M=0,\quad M_1-F_A r\sin\theta=0$$

解得

$$F_A=\frac{M_1}{r\sin 30^\circ} \tag{a}$$

再以摇杆 BC 为研究对象,其上作用有矩为 M_2 的力偶及力 $\boldsymbol{F}'_A$ 与 $\boldsymbol{F}_B$,同理,$\boldsymbol{F}'_A$ 与 $\boldsymbol{F}_B$ 必组成力偶,如图 2-14c 所示。

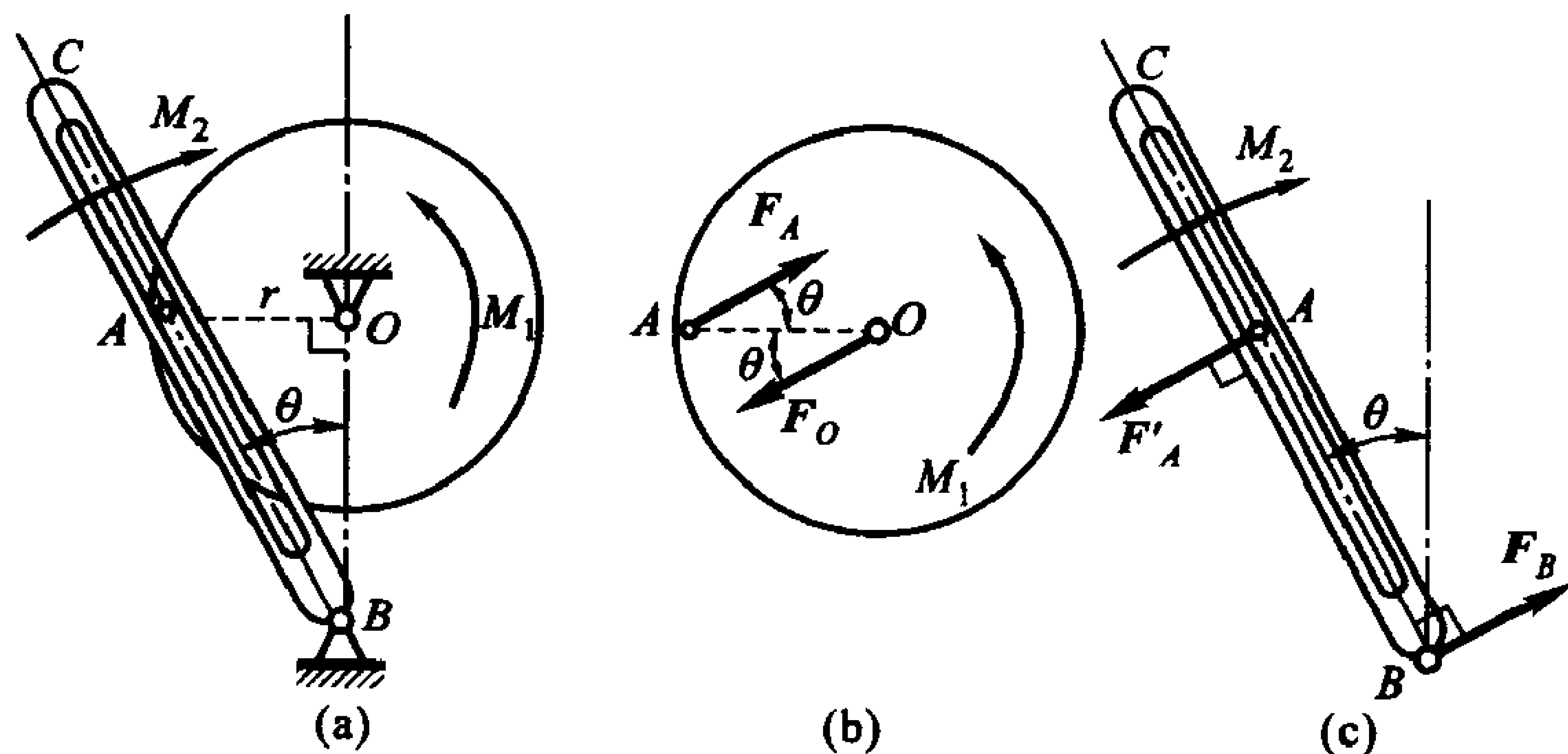


图 2-14

由平衡条件

$$\sum M=0,\quad -M_2+F'_A\frac{r}{\sin\theta}=0 \tag{b}$$

其中 $F'_A=F_A$。将式(a)代入式(b),得

$$M_2=4M_1=8\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$\boldsymbol{F}_O$ 与 $\boldsymbol{F}_A$ 组成力偶,$\boldsymbol{F}_B$ 与 $\boldsymbol{F}'_A$ 组成力偶,则有

$$F_O=F_B=F_A=\frac{M_1}{r\ \sin 30^\circ}=\frac{2\text{kN}\cdot\text{m}}{0.5\text{m}\times\frac{1}{2}}=8\ \text{kN}$$

方向如图 2-14b,c 所示。

小　结

1. 平面汇交力系的合力

(1) 几何法:根据力多边形法则,合力矢为

$$\boldsymbol{F}_\text{R}=\sum\boldsymbol{F}_i$$

合力作用线通过汇交点。

(2) 解析法：合力的解析表达式为

$$\boldsymbol{F}_R=\sum F_{xi}\boldsymbol{i}+\sum F_{yi}\boldsymbol{j}$$

$$F_R=\sqrt{(\sum F_{xi})^2+(\sum F_{yi})^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{i})=\frac{\sum F_{xi}}{F_R},\qquad \cos(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{j})=\frac{\sum F_{yi}}{F_R}$$

2. 平面汇交力系的平衡条件

(1) 平衡的必要和充分条件：

$$\boldsymbol{F}_R=\sum \boldsymbol{F}_i=0$$

(2) 平衡的几何条件：平面汇交力系的力多边形自行封闭。

(3) 平衡的解析条件(平衡方程)：

$$\sum F_{xi}=0,\qquad \sum F_{yi}=0$$

3. 平面内的力对点 O 之矩是代数量，记为 $M_O(\boldsymbol{F})$

$$M_O(\boldsymbol{F})=\pm Fh=\pm 2A_{\triangle ABO}$$

一般以逆时针转向为正，反之为负。

或
$$M_O(\boldsymbol{F})=xF_y-yF_x$$

4. 力偶和力偶矩

力偶是由等值、反向、不共线的两个平行力组成的特殊力系。力偶没有合力，也不能用一个力来平衡。

平面力偶对物体的作用效应决定于力偶矩 M 的大小和转向，即

$$M=\pm Fd$$

式中正负号表示力偶的转向，一般以逆时针转向为正，反之为负。

力偶对平面内任一点的矩等于力偶矩，力偶矩与矩心的位置无关。

5. 同平面内力偶的等效定理：在同平面内的两个力偶，如果力偶矩相等，则彼此等效。力偶矩是平面力偶作用的唯一度量。

6. 平面力偶系的合成与平衡

合力偶矩等于各分力偶矩的代数和，即　$M=\sum M_i$

平面力偶系的平衡条件为

$$\sum M_i=0$$

思　考　题

2-1　图 2-15 所示两个力三角形中三个力的关系是否一样？

2-2　力 $\boldsymbol{F}$ 沿轴 Ox，Oy 的分力和力在两轴上的投影有何区别？试以图 2-16a，b 两种情况为例进行分析说明。或 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}$ 对图 a，b 都成立吗？

2-3　用解析法求平面汇交力系的合力时，若取不同的直角坐标轴，所求得的合力是否

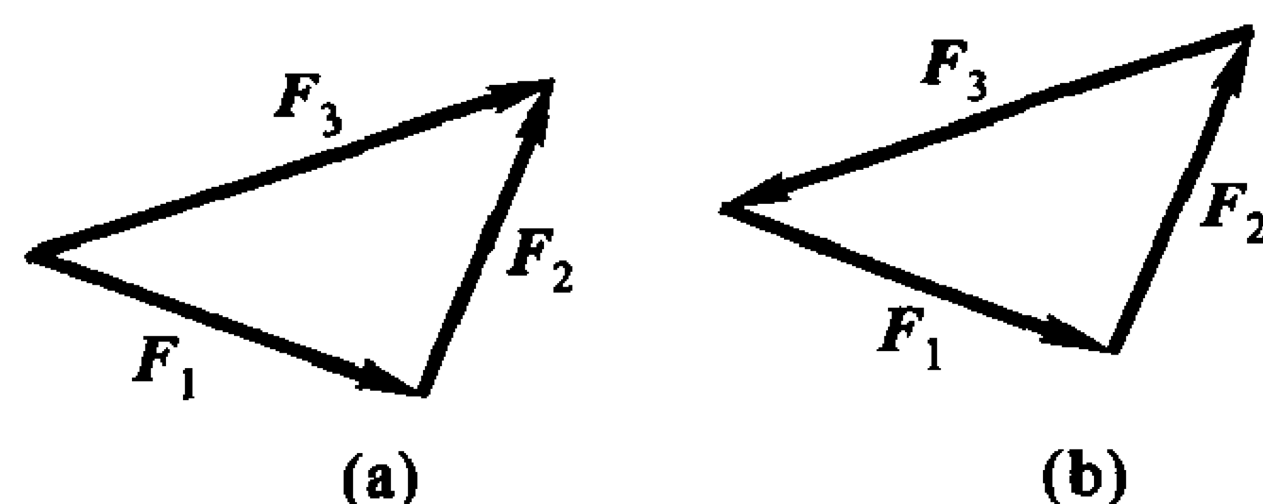


图 2－15

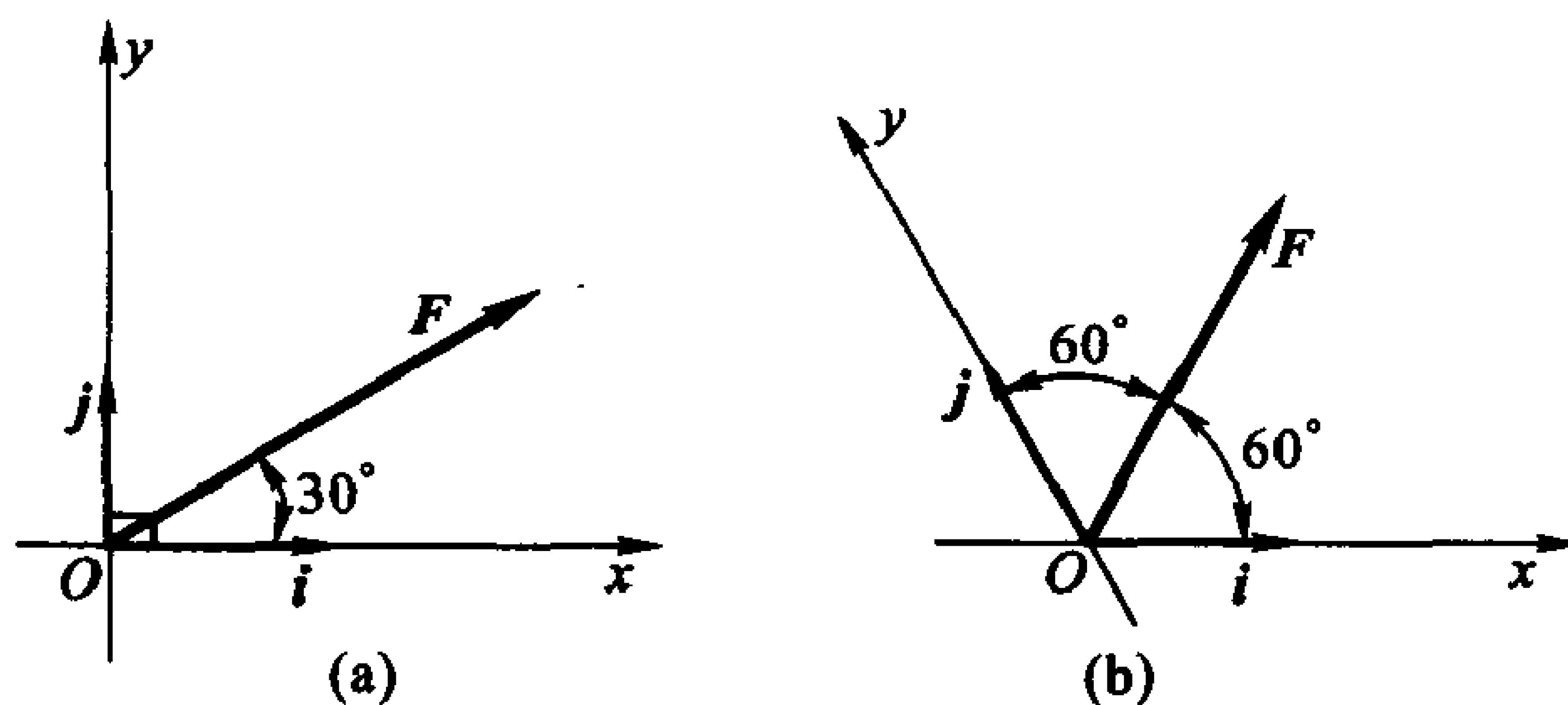


图 2－16

相同？

2－4　用解析法求解平面汇交力系的平衡问题时，x 与 y 两轴是否一定要相互垂直？当 x 与 y 轴不垂直时，建立的平衡方程 $\sum F_x=0,\sum F_y=0$ 能满足力系的平衡条件吗？为什么？

2－5　输电线跨度 l 相同时，电线下垂量 h 越小，电线越易于拉断，为什么？

2－6　图 2－17 所示的三种结构，构件自重不计，忽略摩擦，$\theta=60°$。如 B 处都作用有相同的水平力 $\boldsymbol{F}$，问铰链 A 处的约束力是否相同。请作图表示其大小与方向。

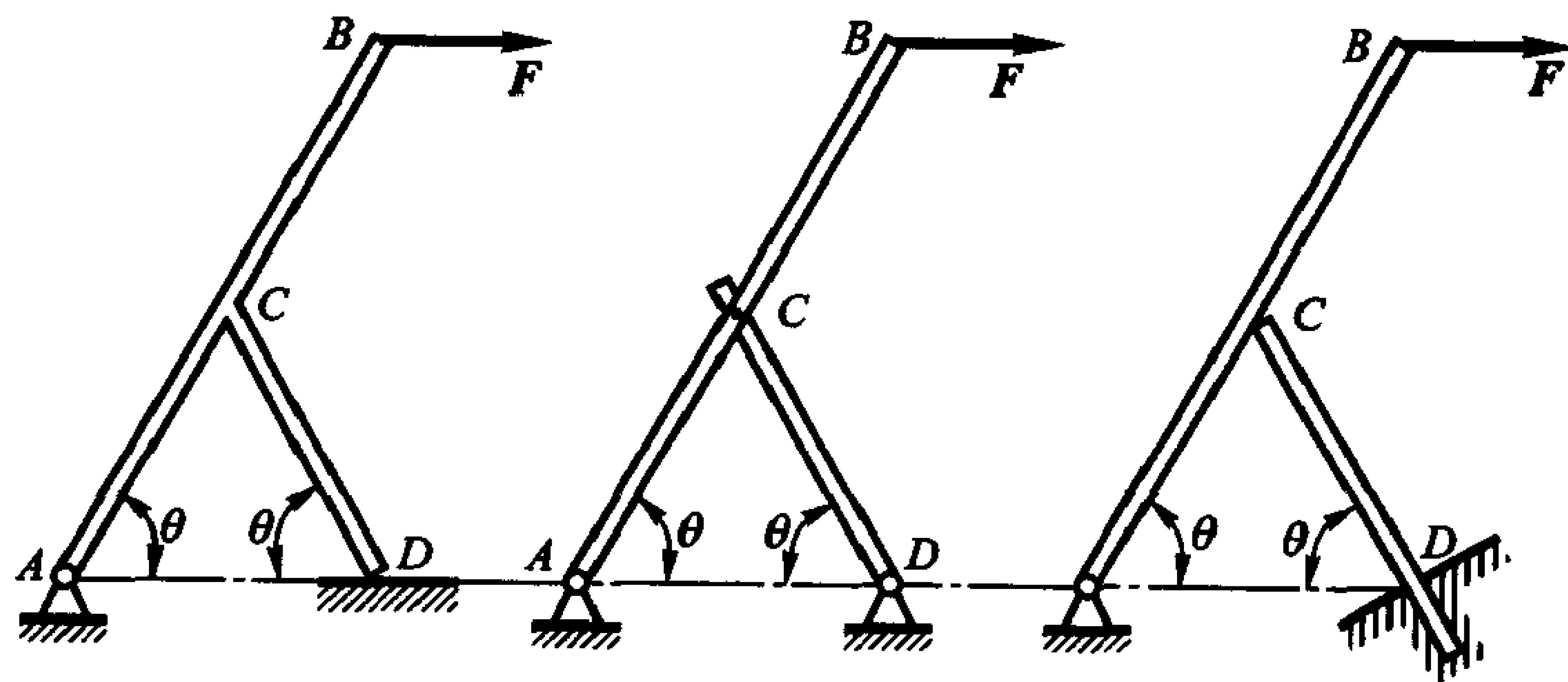


图 2－17

2－7　试比较力矩与力偶矩二者的异同。

2－8　在刚体的 A,B,C,D 四点作用有四个大小相等的力，此四力沿四个边恰好组成

封闭的力多边形，如图 2 - 18 所示。此刚体是否平衡？若 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}'_1$ 都改变方向，此刚体是否平衡？

2-9　在图 2 - 19 各图中，力或力偶对点 A 的矩都相等，它们引起的支座反力是否相同？

2-10　从力偶理论知道，一力不能与力偶平衡。但是为什么螺旋压榨机上，力偶却似乎可以用被压榨物体的反抗力 $\boldsymbol{F}_N$ 来平衡（图 2 - 20a）？为什么图 2 - 20b 所示的轮子上的力偶 M 似乎与重物的力 $\boldsymbol{P}$ 相平衡呢？这种说法错在哪里？

2-11　图 2 - 21 所示的两种机构，图 2 - 21a 中销钉 E 固结于杆 CD 而插在杆 AB 的滑槽中；图 2 - 21b 中销钉 E 固结于杆 AB 而插在杆 CD 的滑槽中。不计构件自重及摩擦，$\theta = 45°$，如在杆 AB 上作用有矩为 M_1 的力偶，上述两种情况下平衡时，A，C 处的约束力和杆 CD 上作用的力偶是否相同？

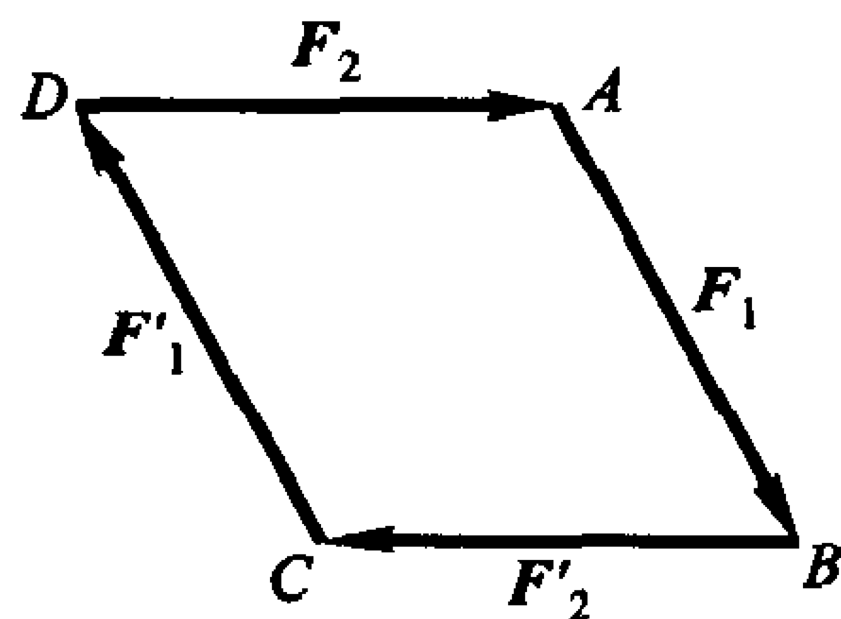


图 2 - 18

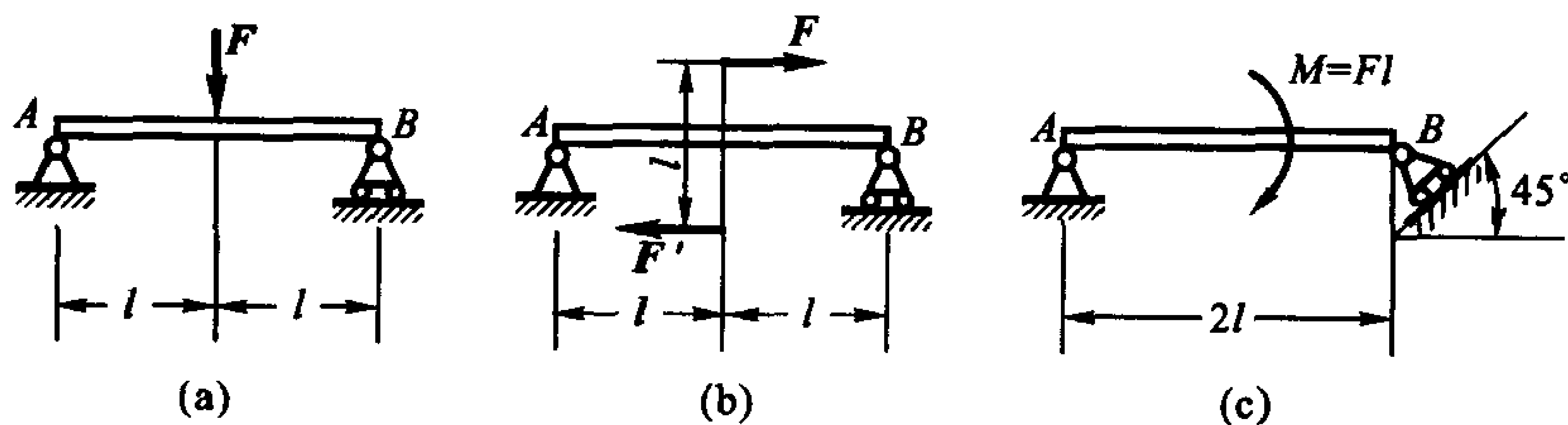


图 2 - 19

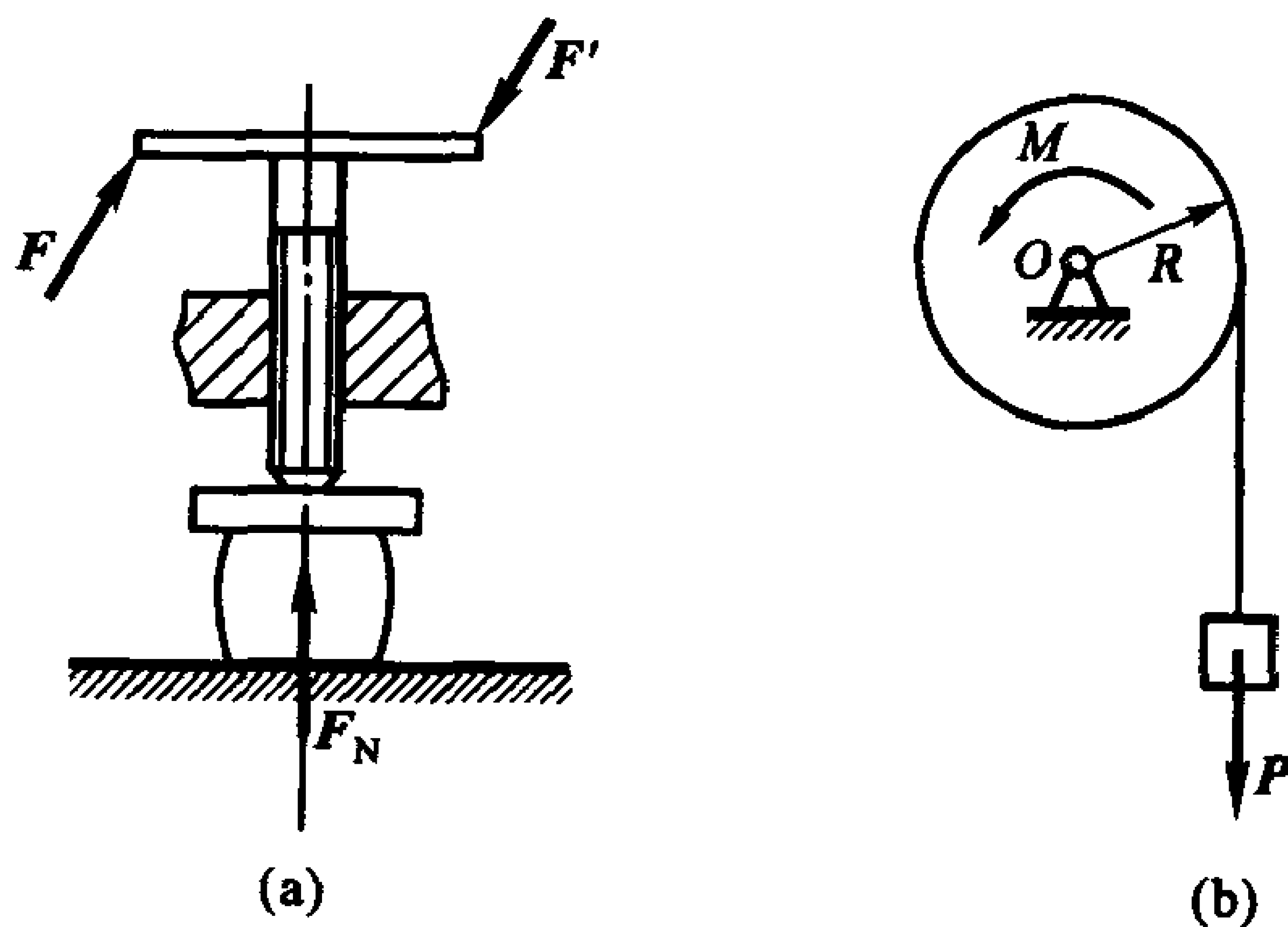


图 2 - 20

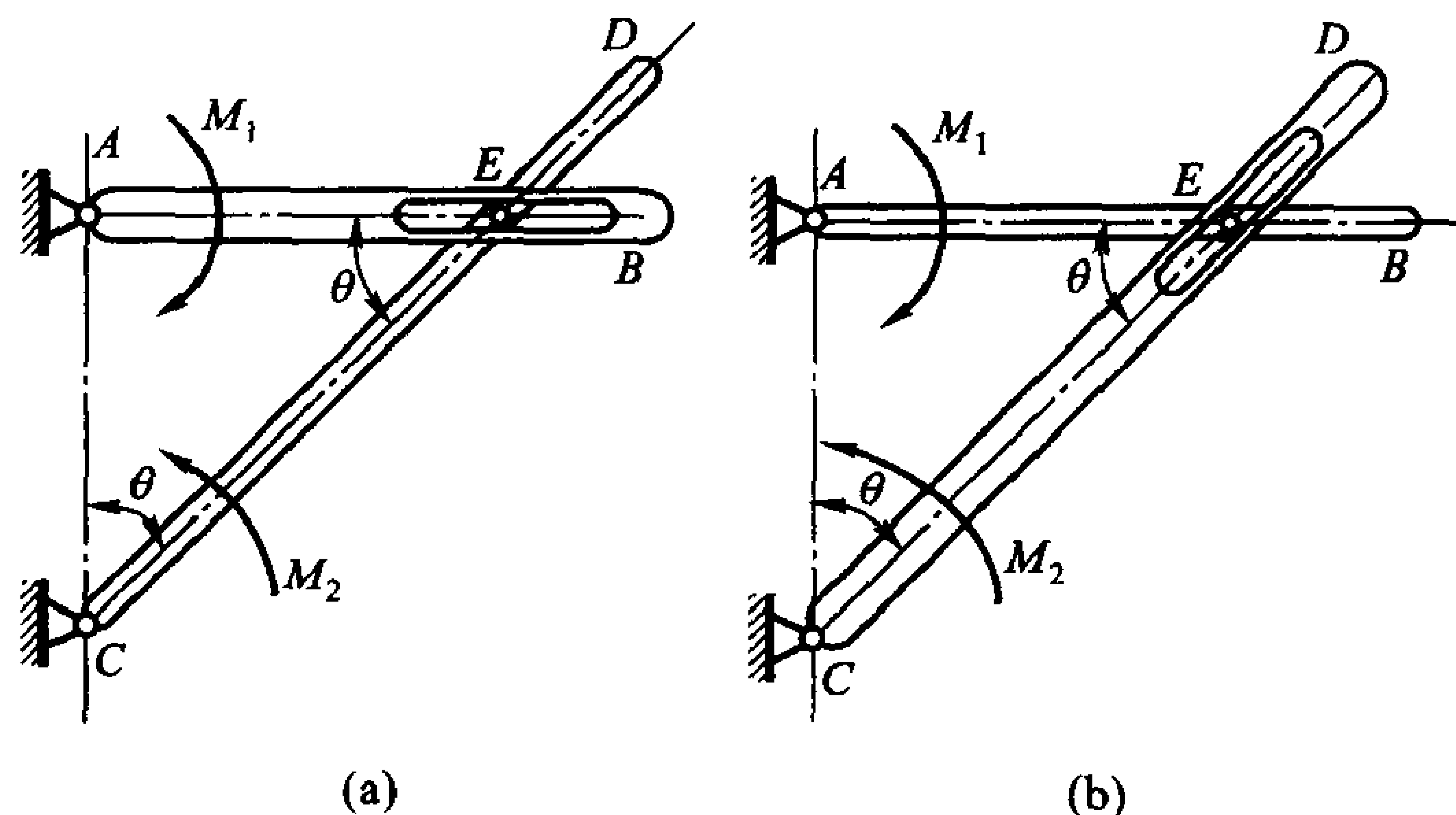
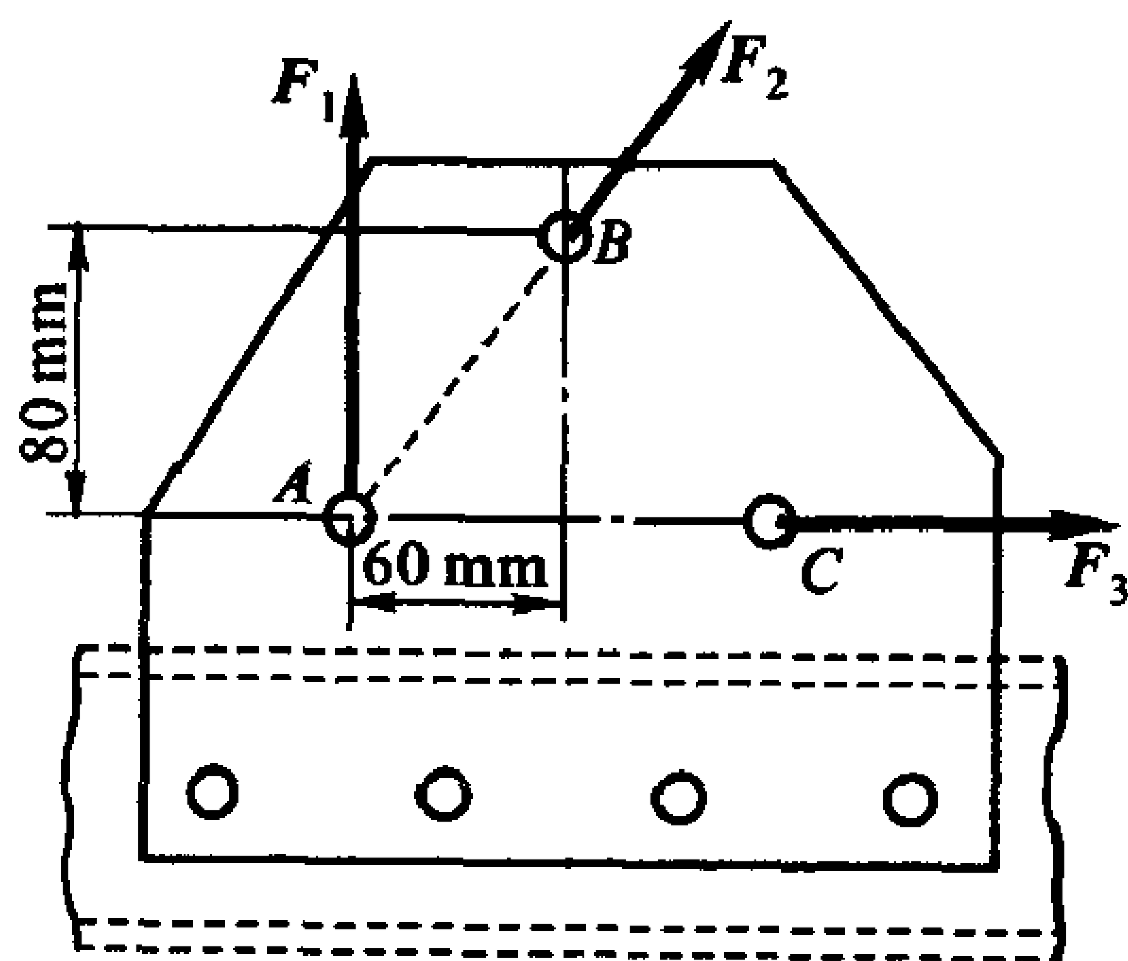


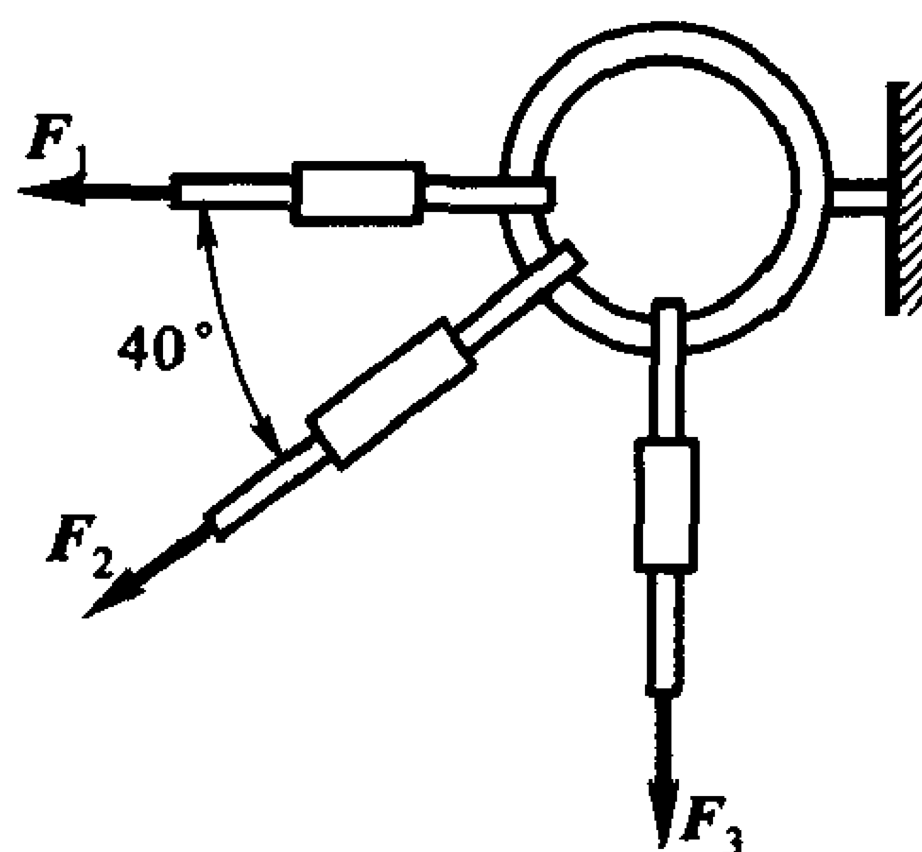
图 2-21

习　题

2-1　铆接薄板在孔心 A,B 和 C 处受三力作用,如图所示。$F_1=100$ N,沿铅直方向;$F_3=50$ N,沿水平方向,并通过点 A;$F_2=50$ N,力的作用线也通过点 A,尺寸如图。求此力系的合力。



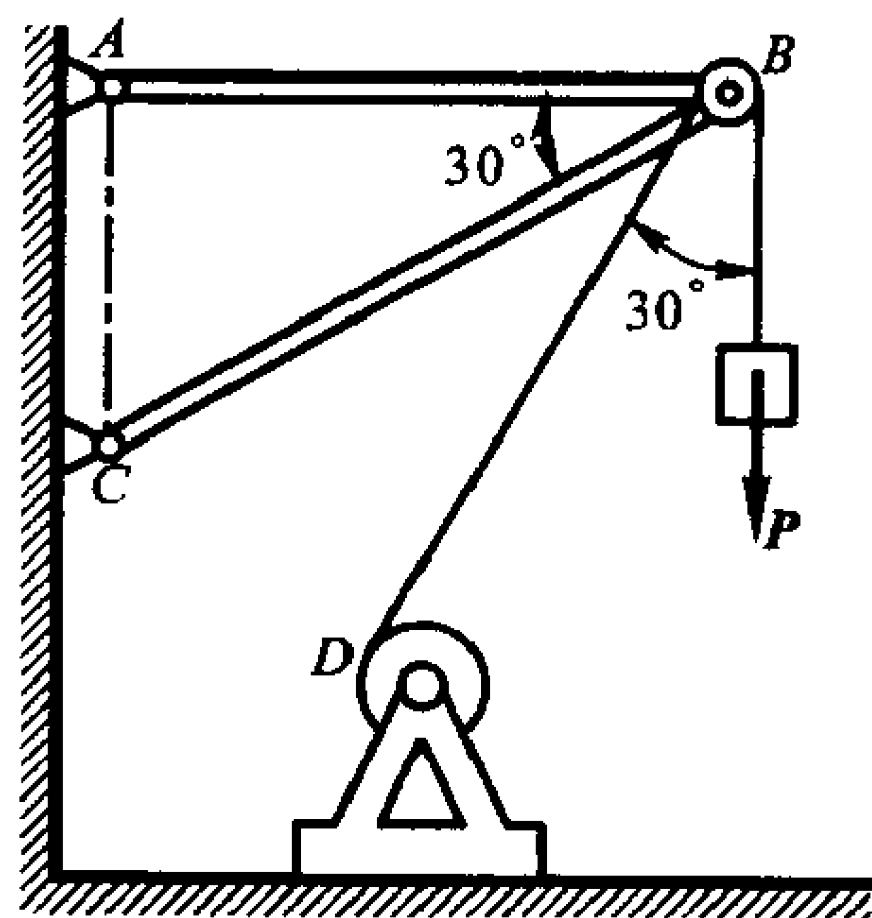
题 2-1 图



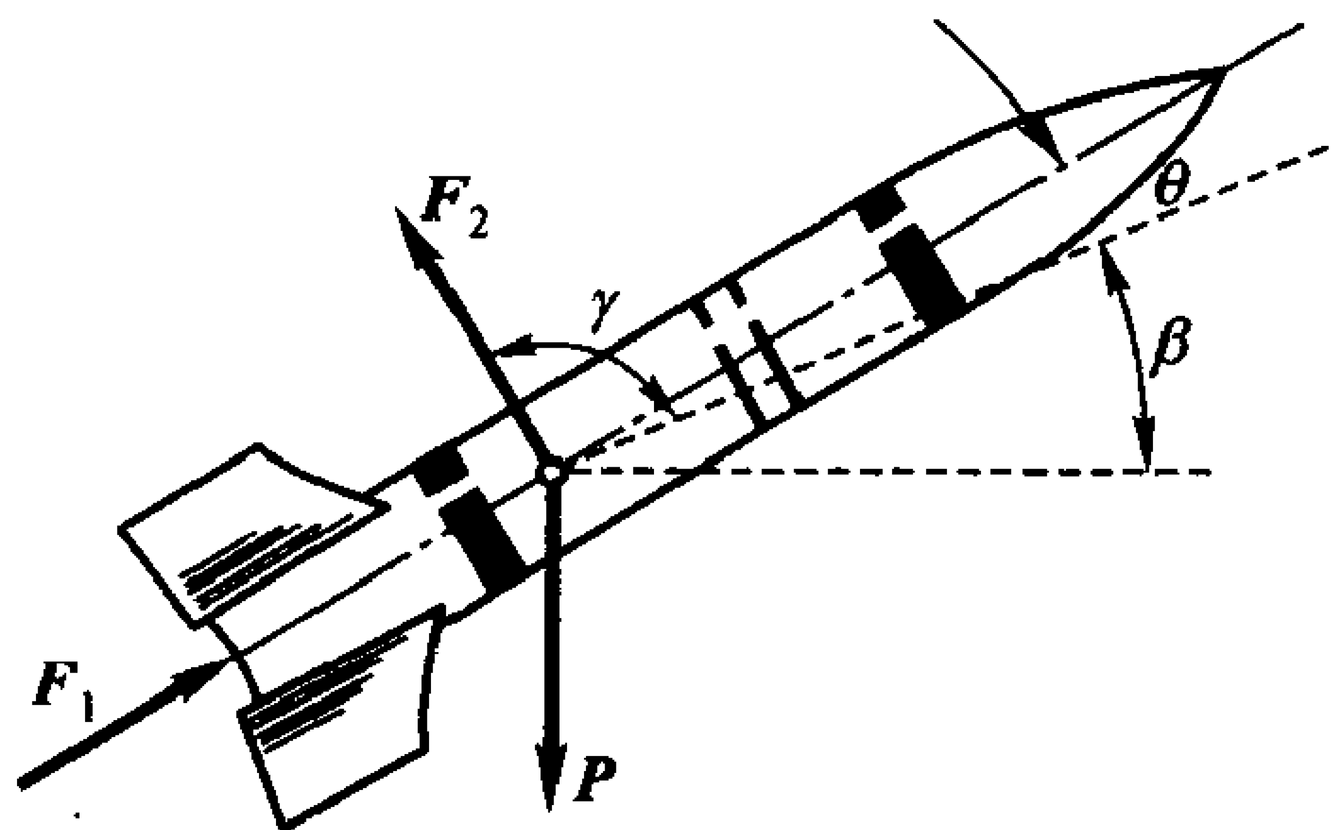
题 2-2 图

2-2　如图所示,固定在墙壁上的圆环受三条绳索的拉力作用,力 $\boldsymbol{F}_1$ 沿水平方向,力 $\boldsymbol{F}_3$ 沿铅直方向,力 $\boldsymbol{F}_2$ 与水平线成 40°角。三力的大小分别为 $F_1=2\ 000$ N,$F_2=2\ 500$ N,$F_3=1\ 500$ N。求三力的合力。

2-3　物体重 $P=20$ kN,用绳子挂在支架的滑轮 B 上,绳子的另一端接在铰车 D 上,如图所示。转动铰车,物体便能升起。设滑轮的大小、AB 与 CB 杆自重及摩擦略去不计,A,B,C 三处均为铰链连接。当物体处于平衡状态时,试求拉杆 AB 和支杆 CB 所受的力。



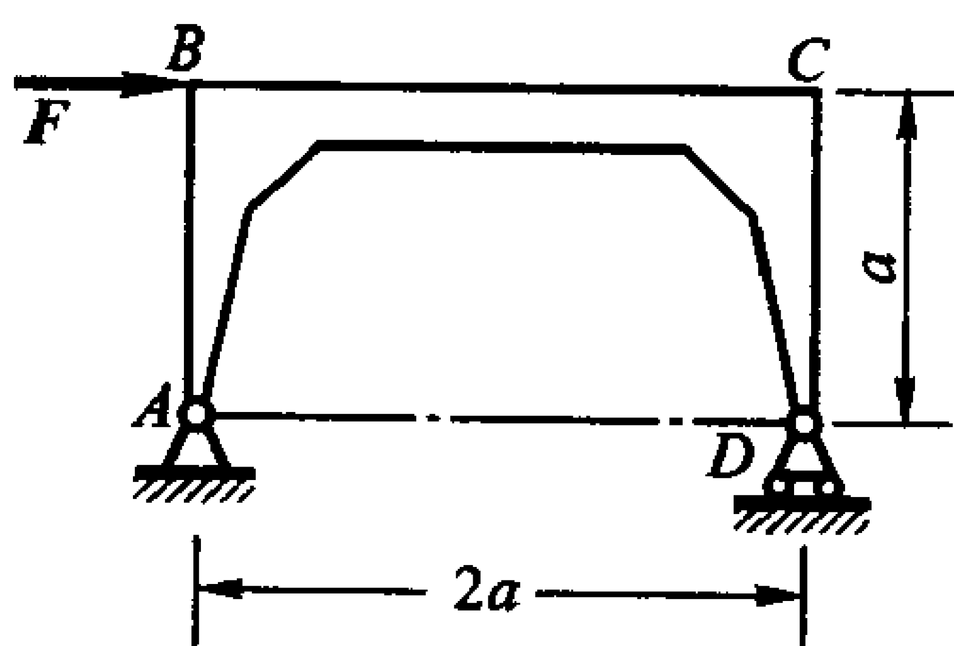
题 2－3 图



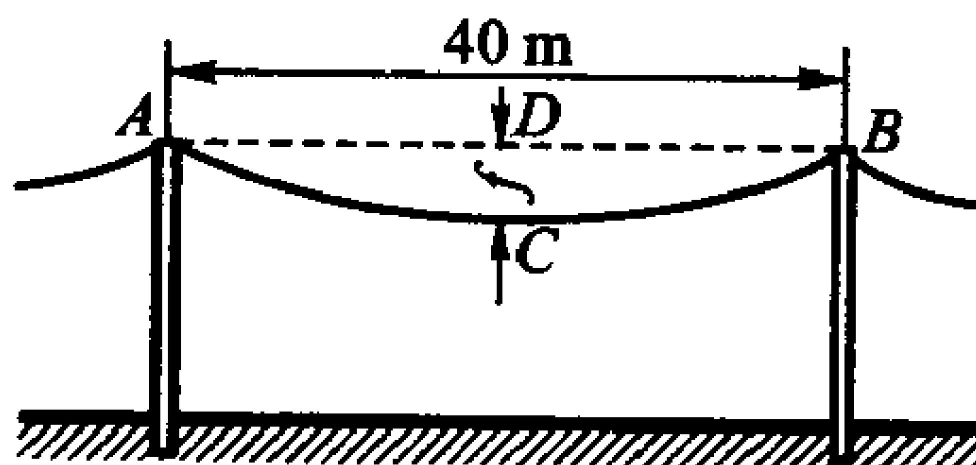
题 2－4 图

2－4　火箭沿与水平面成 $\beta = 25°$角的方向作匀速直线运动，如图所示。火箭的推力 $F_1 = 100$ kN 与运动方向成 $\theta = 5°$角。如火箭重 $P = 200$ kN，求空气动力 $\boldsymbol{F}_2$ 和它与飞行方向的交角 γ。

2－5　在图示刚架的点 B 作用一水平力 $\boldsymbol{F}$，刚架重量略去不计。求支座 A，D 的约束力 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_D$。



题 2－5 图

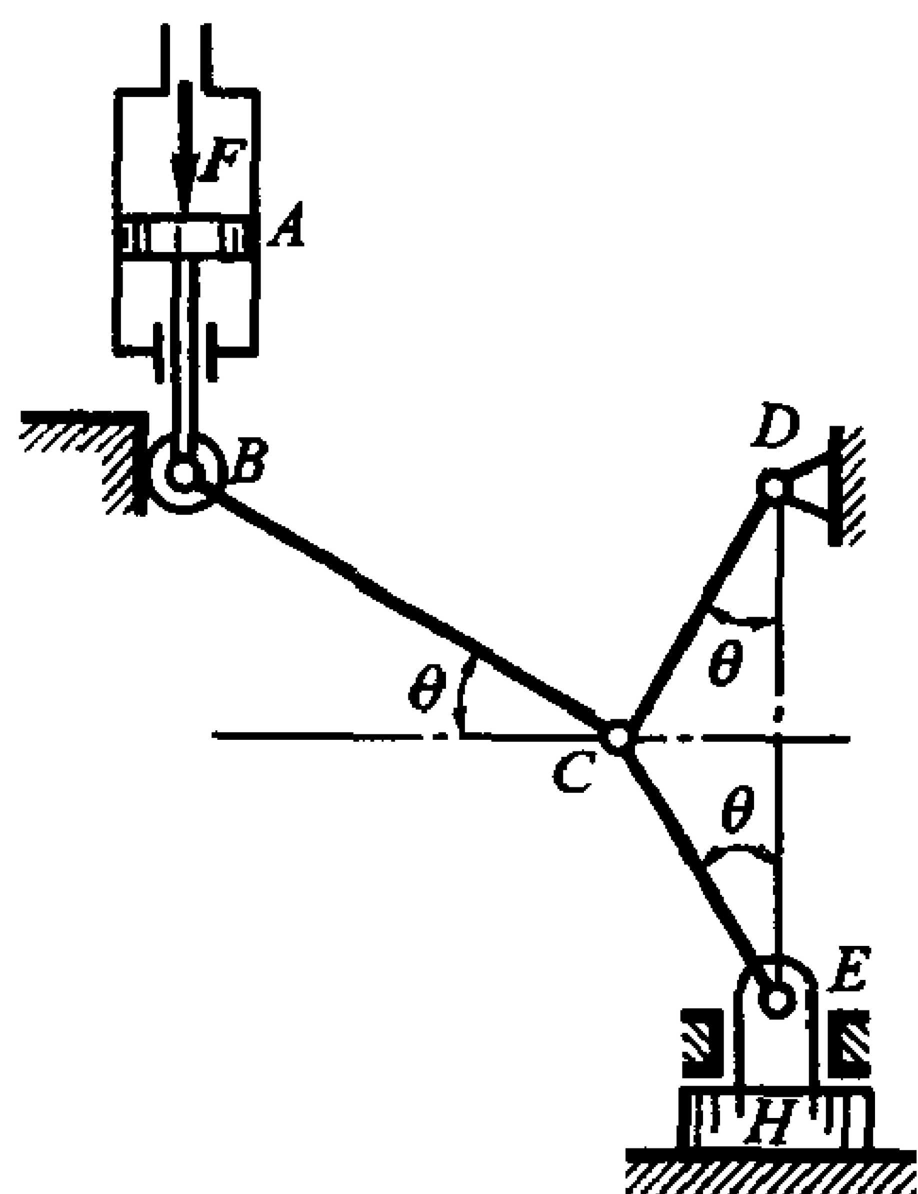


题 2－6 图

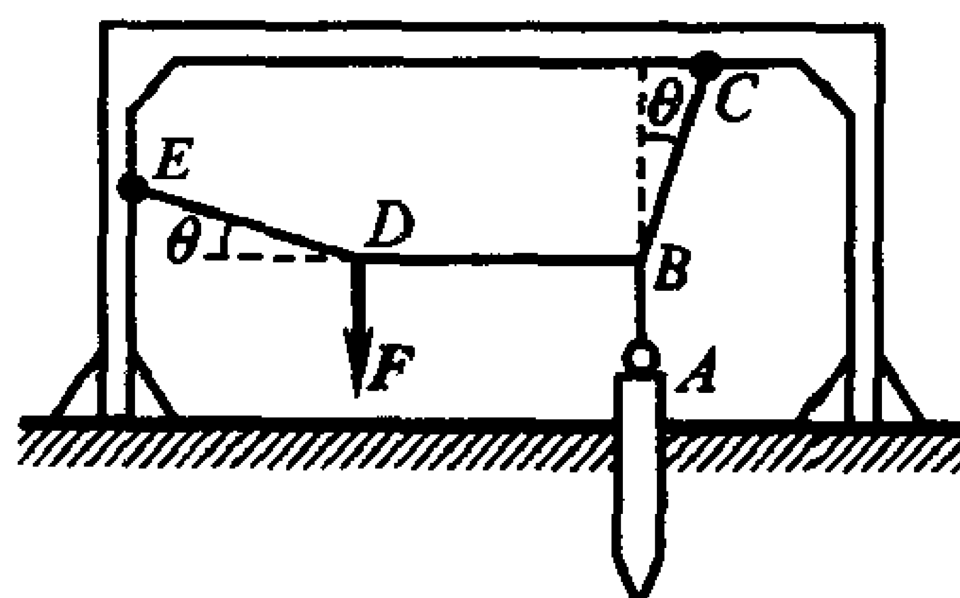
2－6　如图所示，输电线 ACB 架在两电线杆之间，形成一下垂曲线，下垂距离 $CD = f = 1$ m，两电线杆间距离 $AB = 40$m。电线 ACB 段重 $P = 400$ N，可近似认为沿 AB 连线均匀分布。求电线的中点和两端的拉力。

2－7　图示液压夹紧机构中，D 为固定铰链，B，C，E 为活动铰链。已知力 $\boldsymbol{F}$，机构平衡时角度如图，各构件自重不计，求此时工件 H 所受的压紧力。

2－8　图示为一拔桩装置。在木桩的点 A 上系一绳，将绳的另一端固定在点 C，在绳的点 B 系另一绳 BE，将它的另一端固定在点 E。然后在绳的点 D 用力向下拉，并使绳的 BD 段水平，AB 段铅直；DE 段与水平线、CB 段与铅直线间成等角 $\theta = 0.1$ rad（弧度）（当 θ 很小时，$\tan\theta \approx \theta$）。如向下的拉力 $F = 800$ N，求绳 AB 作用于桩上的拉力。

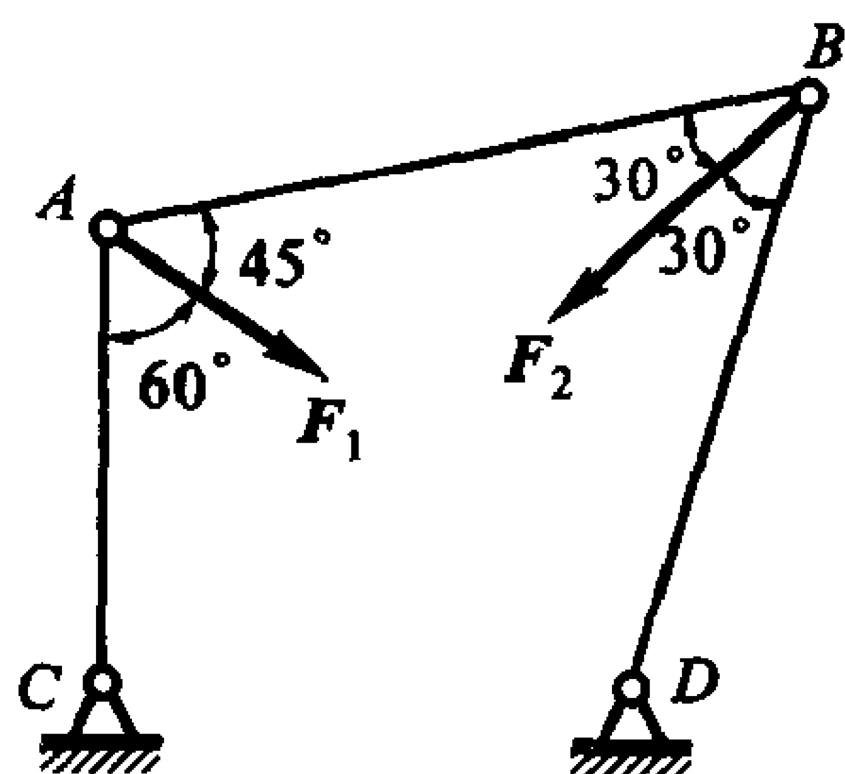


题 2-7 图

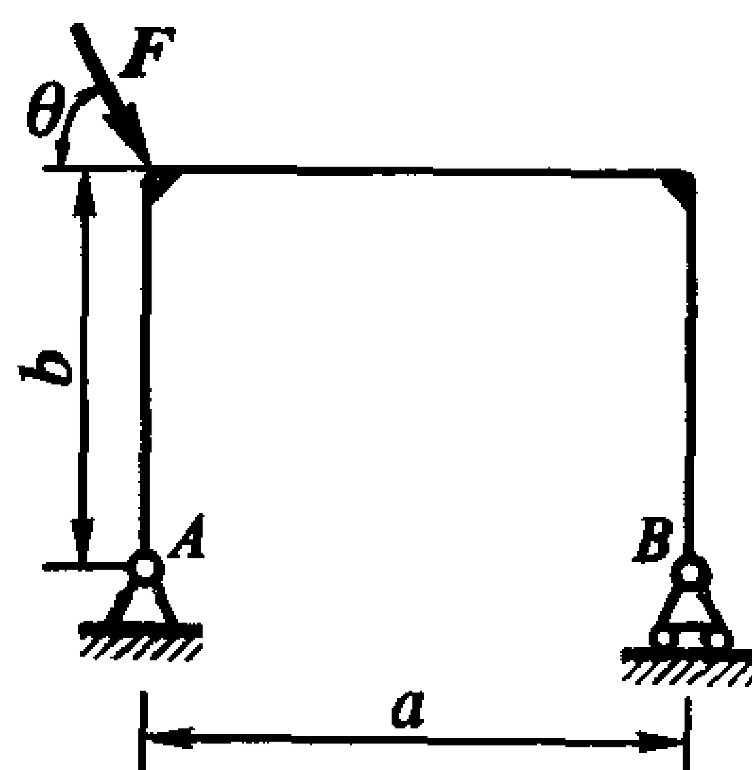


题 2-8 图

2-9　铰链四杆机构 $CABD$ 的 CD 边固定，在铰链 A，B 处有力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 作用，如图所示。该机构在图示位置平衡，杆重略去不计。求力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的关系。



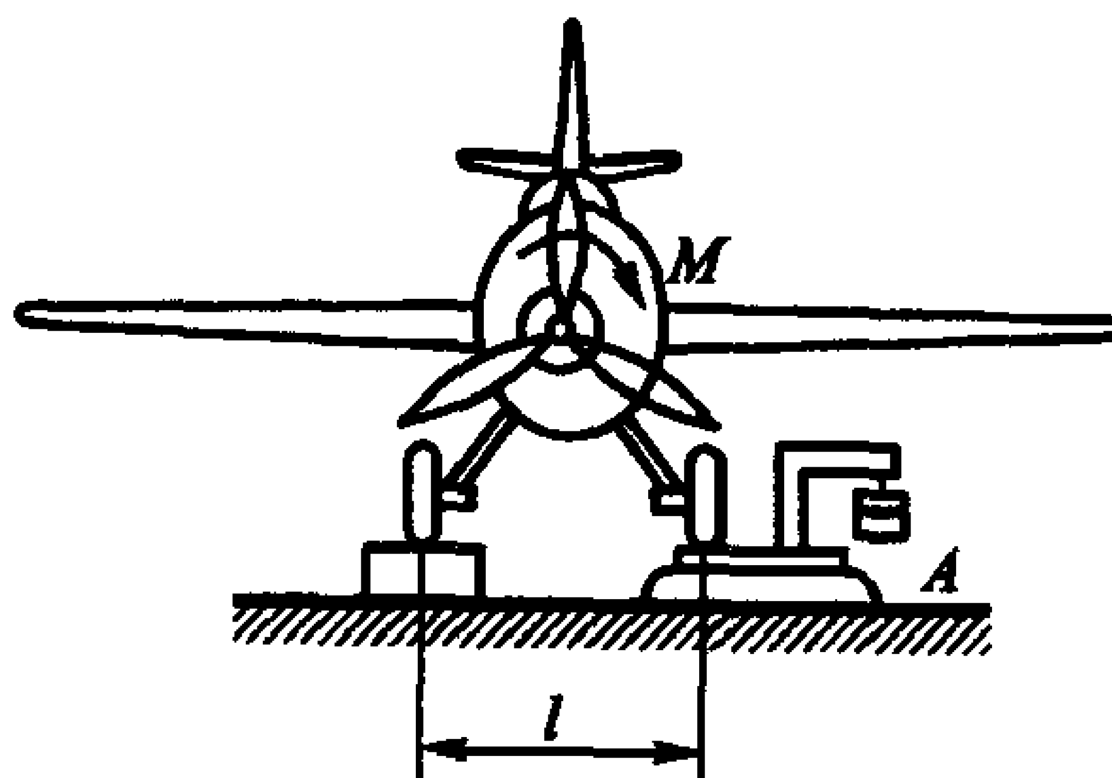
题 2-9 图



题 2-10 图

2-10　如图所示，刚架上作用力 $\boldsymbol{F}$。试分别计算力 $\boldsymbol{F}$ 对点 A 和 B 的力矩。

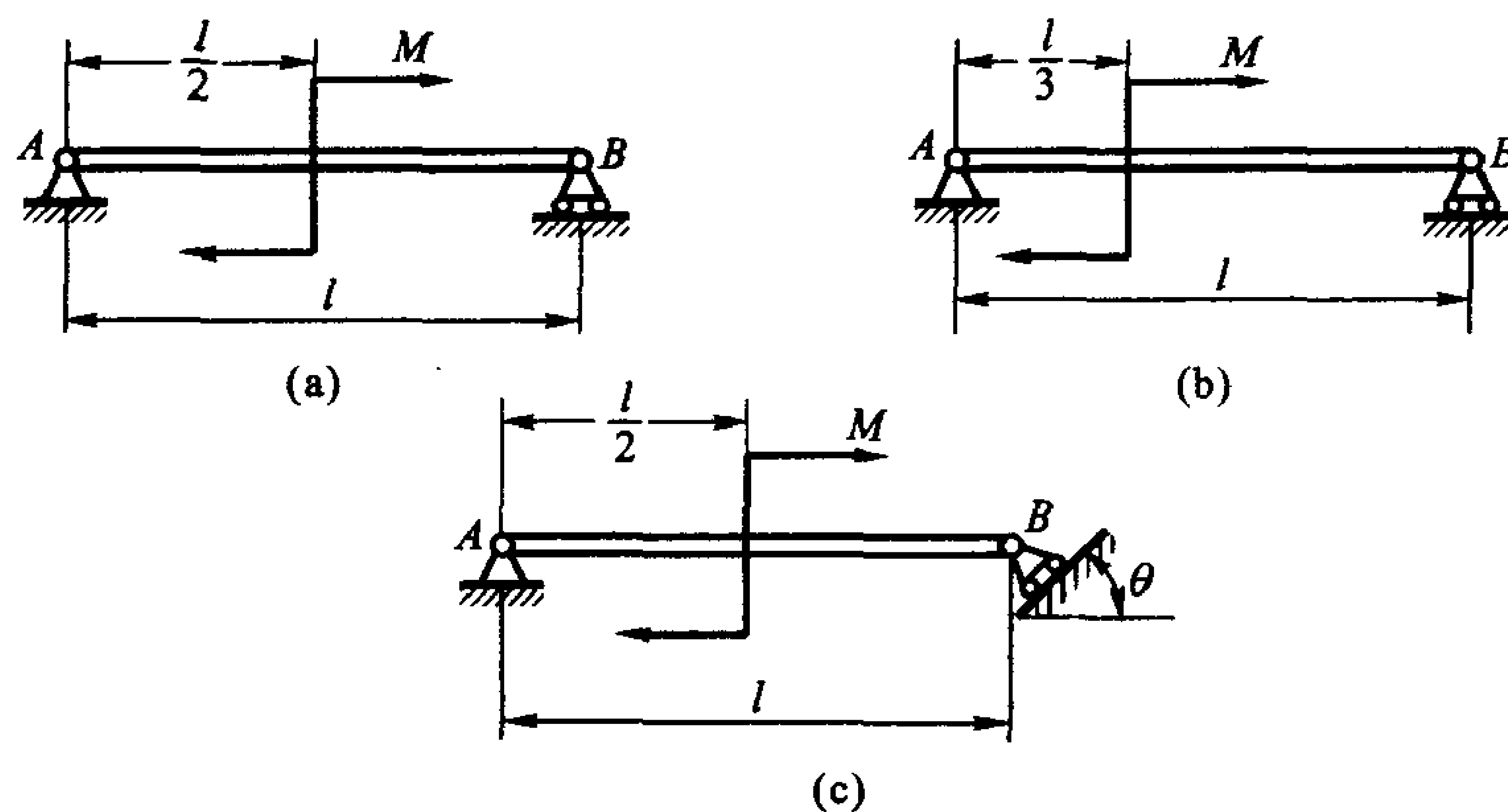
2-11　为了测定飞机螺旋桨所受的空气阻力偶，可将飞机水平放置，其一轮搁置在地秤上。当螺旋桨未转动时，测得地秤所受的压力为 4.6 kN，当螺旋桨转动时，测得地秤所受的压力为 6.4 kN。已知两轮间距离 $l=2.5$ m，求螺旋桨所受的空气阻力偶矩 M。



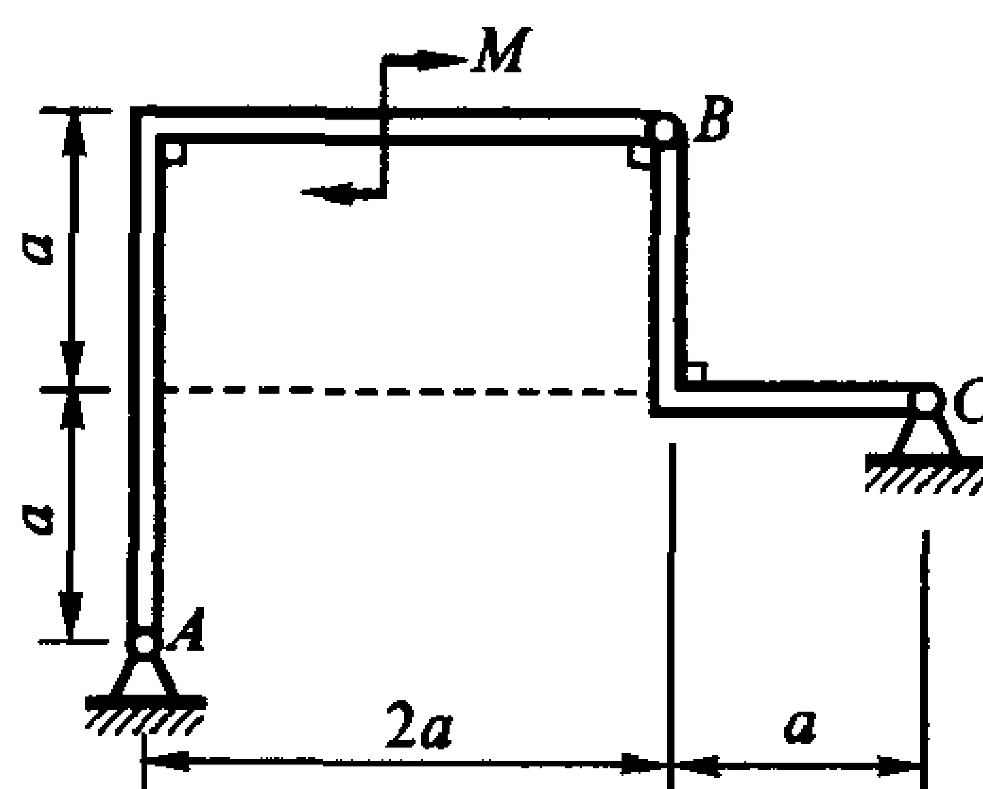
题 2-11 图

2-12　已知梁 AB 上作用一力偶，力偶矩为 M，梁长为 l，梁重不计。求在图 a，b，c 三种情况下，支座 A 和 B 的约束力。

2-13　在图示结构中，各构件的自重略去不计。在构件 AB 上作用一力偶矩为 M 的力偶，求支座 A 和 C 的约束力。

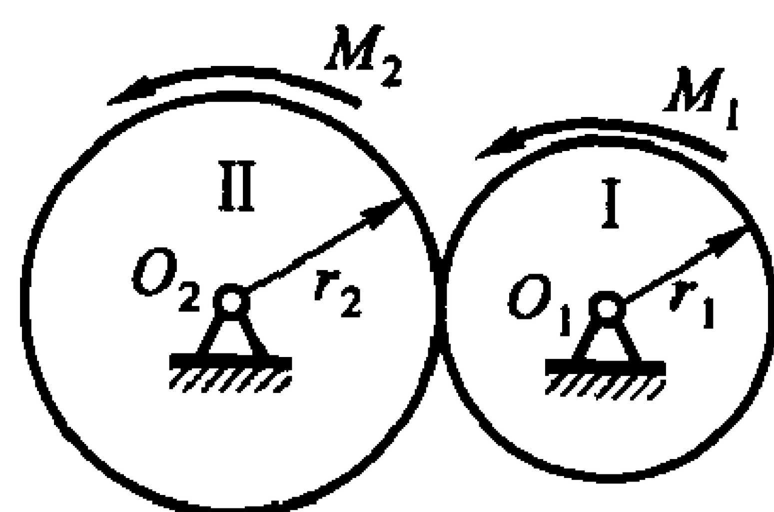


题 2-12 图

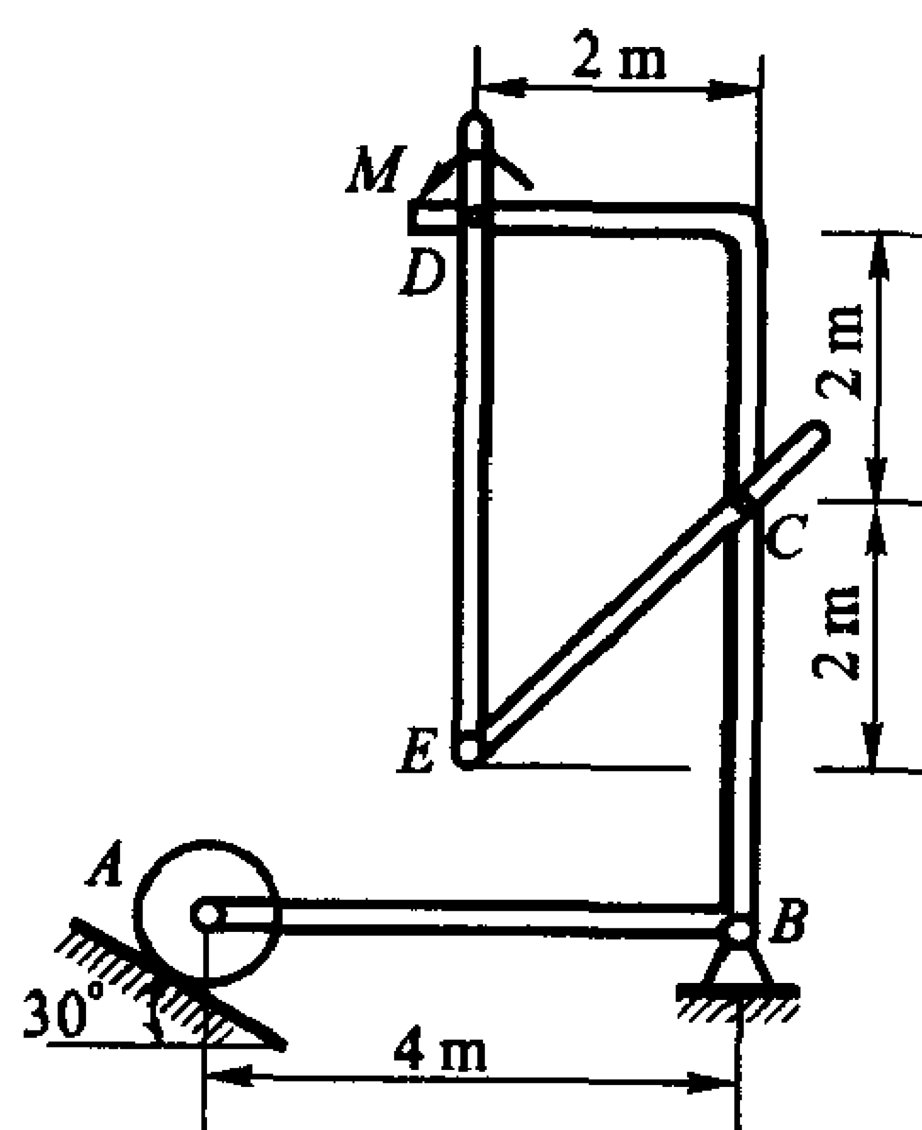


题 2-13 图

2-14 两齿轮的半径分别为 r_1，r_2，作用于轮 I 上的主动力偶的力偶矩为 M_1，齿轮的压力角为 θ，不计两齿轮的重量。求使二轮维持匀速转动时齿轮 II 的阻力偶之矩 M_2 及轴承 O_1，O_2 的约束力的大小和方向。



题 2-14 图

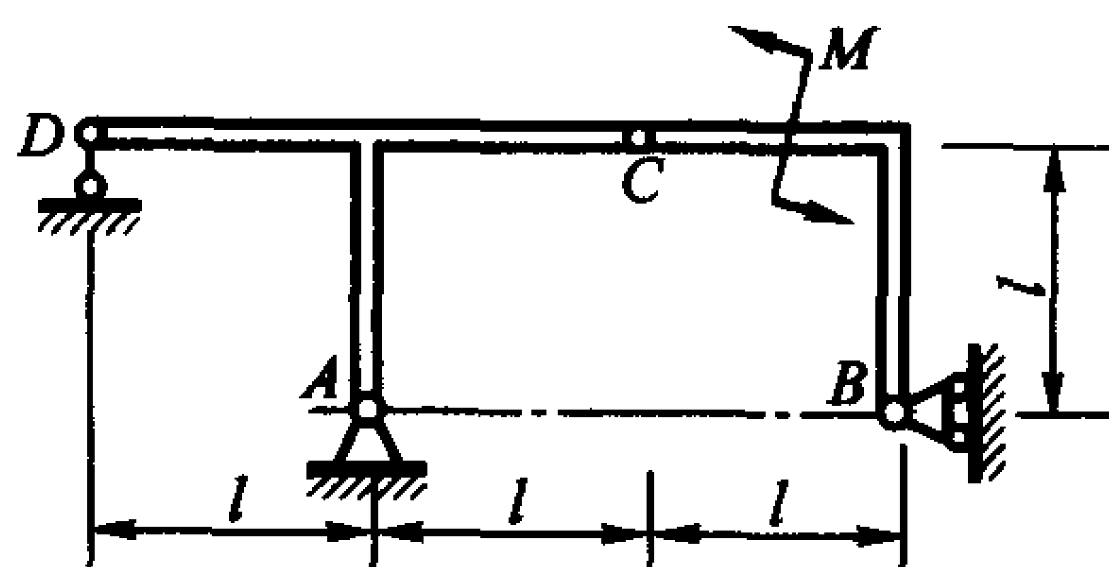


题 2-15 图

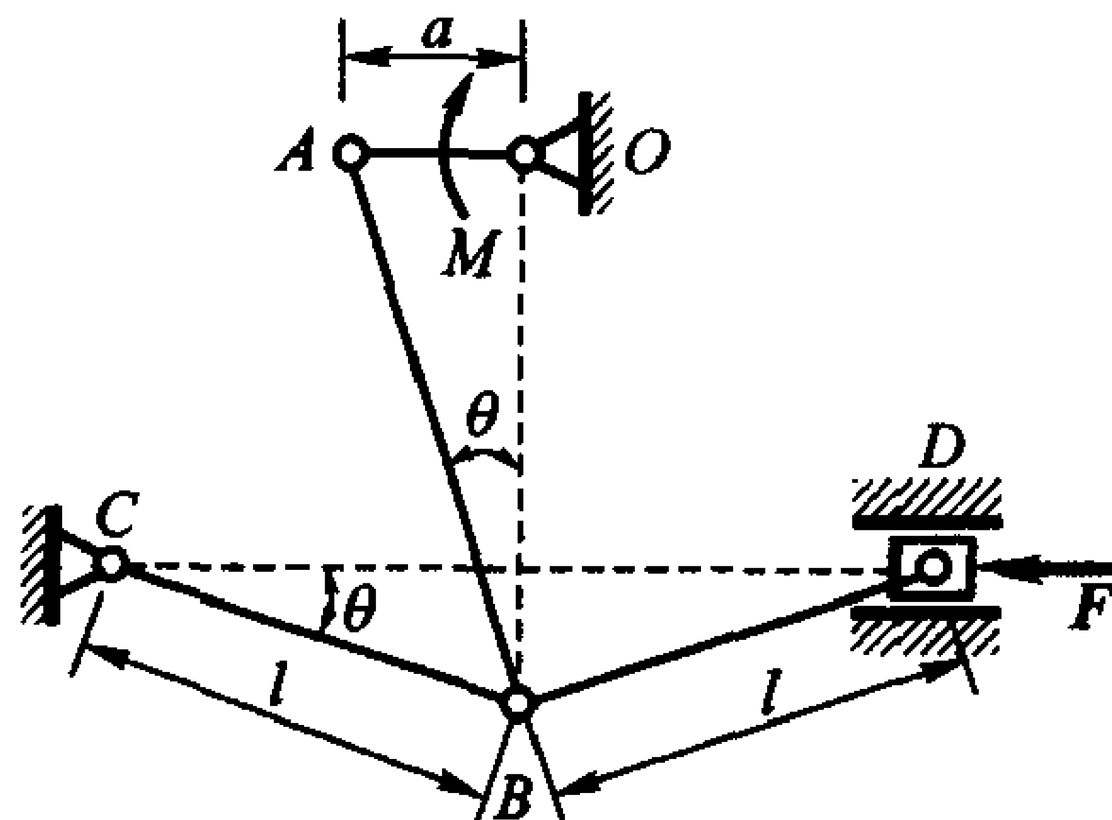
2-15 直角弯杆 *ABCD* 与直杆 *DE* 及 *EC* 铰接如图，作用在杆 *DE* 上力偶的力偶矩 *M*

$=40\ \text{kN}\cdot\text{m}$,不计各构件自重,不考虑摩擦,尺寸如图。求支座 A,B 处的约束力及杆 EC 的受力。

2-16　在图示结构中,各构件的自重略去不计,在构件 BC 上作用一力偶矩为 M 的力偶,各尺寸如图。求支座 A 的约束力。



题 2-16 图



题 2-17 图

2-17　在图示机构中,曲柄 OA 上作用一力偶,其矩为 M;另在滑块 D 上作用水平力 $\boldsymbol{F}$。机构尺寸如图所示,各杆重量不计。求当机构平衡时,力 F 与力偶矩 M 的关系。

第三章　平面任意力系

本章将在前面两章的基础上，详述平面任意力系的简化和平衡问题，并介绍平面简单桁架的内力计算。

§3-1　平面任意力系向作用面内一点简化

力系向一点简化是一种较为简便并具有普遍性的力系简化方法。此方法的理论基础是力的平移定理。

1．力的平移定理

定理：可以把作用在刚体上点 A 的力 $\boldsymbol{F}$ 平行移到任一点 B，但必须同时附加一个力偶，这个附加力偶的矩等于原来的力 $\boldsymbol{F}$ 对新作用点 B 的矩。

证明：刚体的点 A 作用力 $\boldsymbol{F}$（图 3-1a）。在刚体上任取一点 B，并在点 B 加上一对平衡力 $\boldsymbol{F}'$ 和 $\boldsymbol{F}''$，令 $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F}''$（图 3-1b）。显然，这三个力与原力 $\boldsymbol{F}$ 等效，这三个力又可视作一个作用在点 B 的力 $\boldsymbol{F}'$ 和一个力偶（$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}''$），这力偶称为附加力偶（图 3-1c）。显然，附加力偶的矩为

$$M=Fd=M_B(\boldsymbol{F})$$

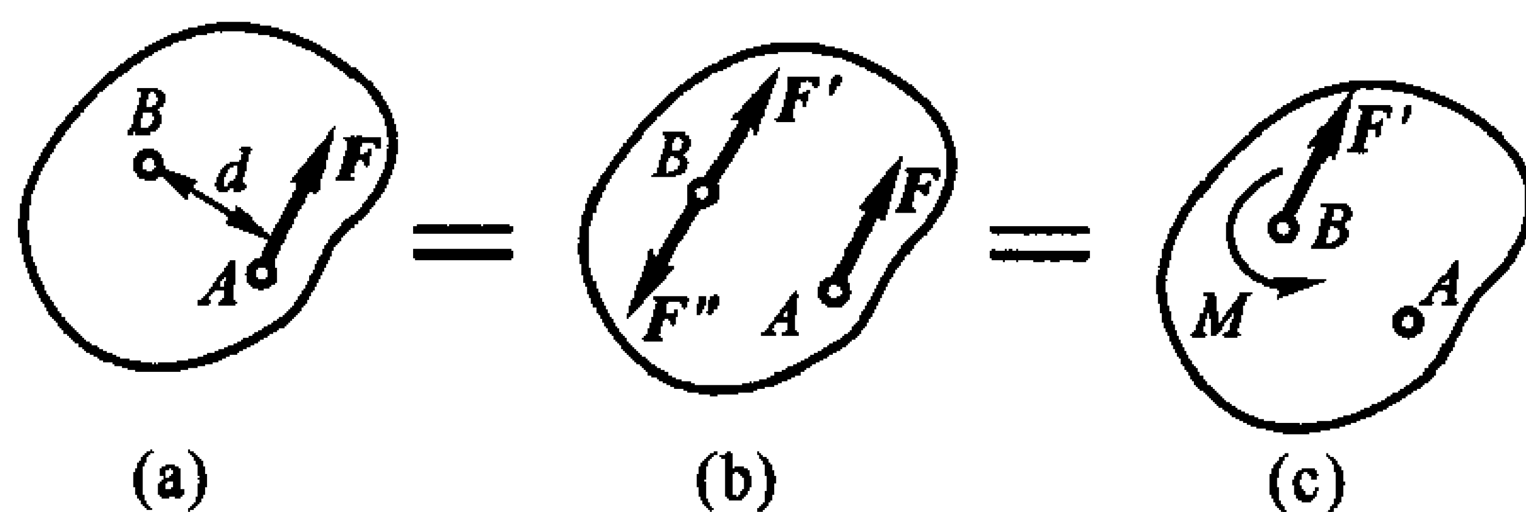


图 3-1

于是定理得证。

2．平面任意力系向作用面内一点简化·主矢和主矩

刚体上作用有 n 个力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 组成的平面任意力系，如图 3-2a 所示。在平面内任取一点 O，称为**简化中心**；应用力的平移定理，把各力都平移到点 O。这样，得到作用于点 O 的力 $\boldsymbol{F}'_1,\boldsymbol{F}'_2,\cdots,\boldsymbol{F}'_n$，以及相应的附加力偶，其矩分别为 $M_1,M_2,\cdots,M_n$，如图 3-2b 所示。这些附加力偶的矩分别为

$$M_i=M_O(\boldsymbol{F}_i)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

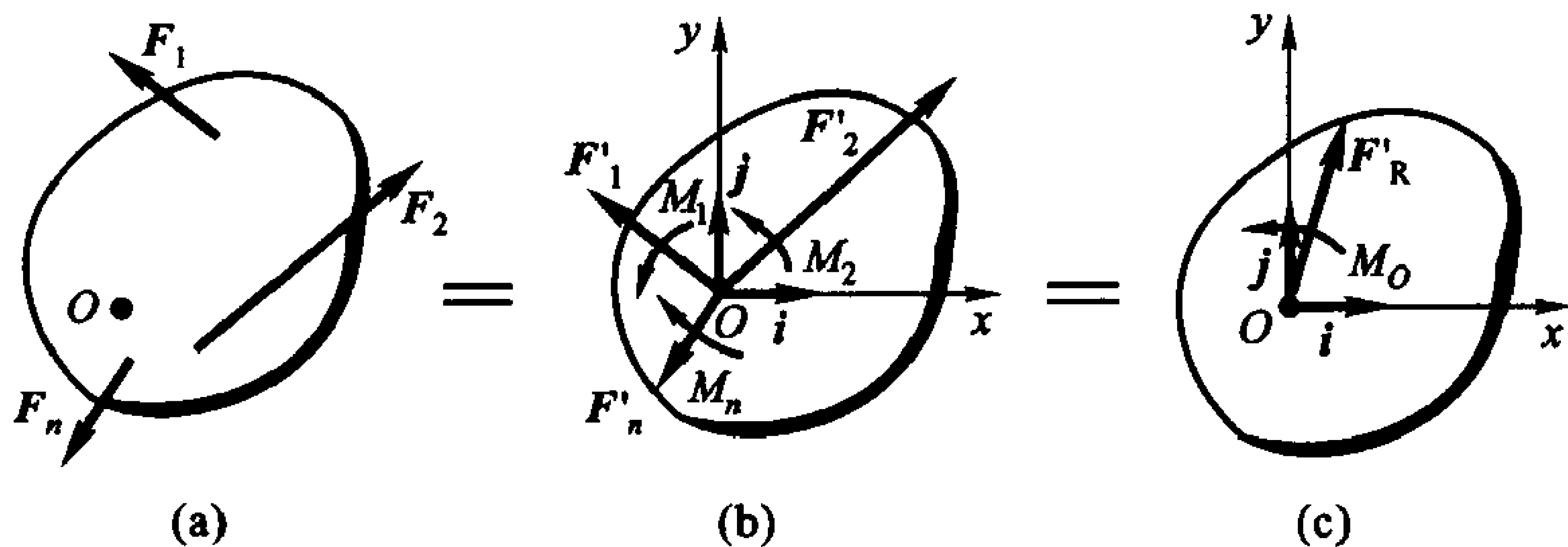


图 3-2

这样，平面任意力系等效为两个简单力系：平面汇交力系和平面力偶系。然后，再分别合成这两个力系。

平面汇交力系可合成为作用线通过点 O 的一个力 $\boldsymbol{F}'_R$，如图 3-2c 所示。因为各力矢 $\boldsymbol{F}'_i=\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$，所以

$$\boldsymbol{F}'_R=\boldsymbol{F}'_1+\boldsymbol{F}'_2+\cdots+\boldsymbol{F}'_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \tag{3-1}$$

即力矢 $\boldsymbol{F}'_R$ 等于原来各力的矢量和。

平面力偶系可合成为一个力偶，这个力偶的矩 M_O 等于各附加力偶矩的代数和，又等于原来各力对点 O 的矩的代数和。即

$$M_O=M_1+M_2+\cdots+M_n=\sum_{i=1}^{n}M_O(\boldsymbol{F}_i) \tag{3-2}$$

平面任意力系中所有各力的矢量和为 $\boldsymbol{F}'_R$，称为该力系的**主矢**；而这些力对于任选简化中心 O 的矩的代数和为 M_O，称为该力系对于简化中心的**主矩**。显然，主矢与简化中心无关，而主矩一般与简化中心有关，故必须指明力系是对于哪一点的主矩。

可见，在一般情形下，平面任意力系向作用面内任选一点 O 简化，可得一个力和一个力偶。这个力等于该力系的主矢，作用线通过简化中心 O。这个力偶的矩等于该力系对于点 O 的主矩。

取坐标系 Oxy，如图 3-2c 所示，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 为沿 x,y 轴的单位矢量，则力系主矢的解析表达式为

$$\boldsymbol{F}'_R=\boldsymbol{F}'_{Rx}+\boldsymbol{F}'_{Ry}=\sum F_x\boldsymbol{i}+\sum F_y\boldsymbol{j} \tag{3-3}$$

于是主矢 $\boldsymbol{F}'_R$ 的大小和方向余弦为

$$F'_R=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{F}'_R,\boldsymbol{i})=\frac{\sum F_x}{F'_R},\qquad \cos(\boldsymbol{F}'_R,\boldsymbol{j})=\frac{\sum F_y}{F'_R}$$

力系对点 O 的主矩的解析表达式为

$$M_O=\sum_{i=1}^{n}M_O(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{i=1}^{n}(x_iF_{yi}-y_iF_{xi}) \tag{3-4}$$

其中 x_i,y_i 为力 $\boldsymbol{F}_i$ 作用点的坐标。

图 3-3a 表示一物体的一端完全固定在另一物体上，这种约束称为**固定端**或插入端支座。

固定端支座对物体的作用，是在接触面上作用了一群约束力。在平面问题中，这些力为一平面任意力系，如图 3-3b 所示。将这群力向作用平面内点 A 简化得到一个力和一个力偶，如图 3-3c 所示。一般情况下这个力的大小和方向均为未知量。可用两个未知分力来代替。因此，在平面力系情况下，固定端 A 处的约束作用力可简化为两个约束力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$，$\boldsymbol{F}_{Ay}$ 和一个矩为 M_A 的约束力偶，如图 3-3d 所示。

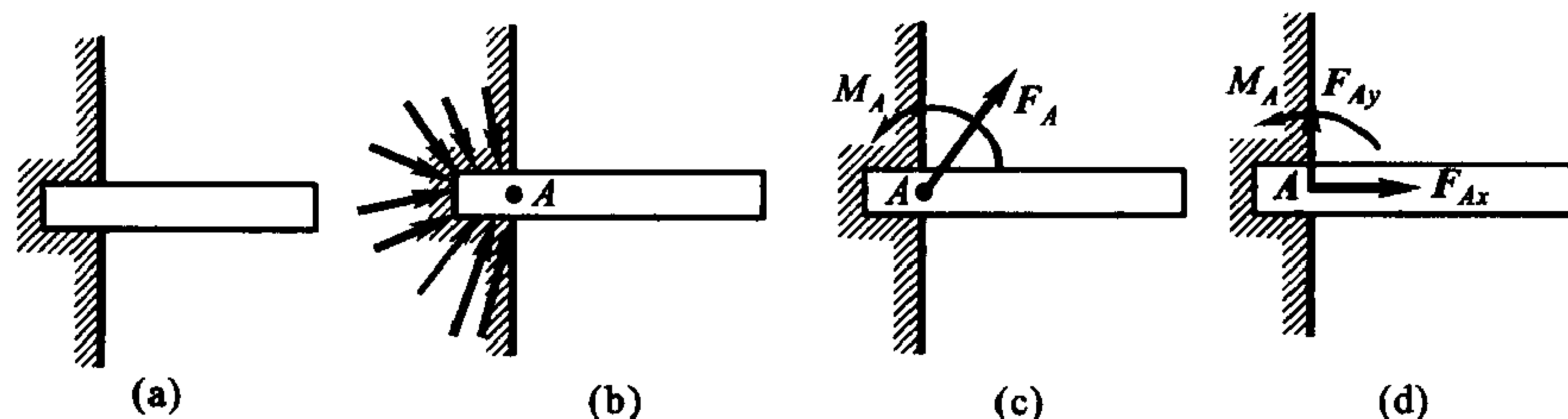


图 3-3

比较固定端支座与固定铰链支座的约束性质可见，固定端支座除了限制物体在水平方向和铅直方向移动外，还能限制物体在平面内转动。因此，除了约束力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$，$\boldsymbol{F}_{Ay}$ 外，还有矩为 M_A 的约束力偶。而固定铰链支座没有约束力偶，因为它不能限制物体在平面内转动。

3. 平面任意力系的简化结果分析

平面任意力系向作用面内一点简化的结果，可能有四种情况，即：(1) $\boldsymbol{F}'_R=0,M_O\neq0$；(2) $\boldsymbol{F}'_R\neq0,M_O=0$；(3) $\boldsymbol{F}'_R\neq0,M_O\neq0$；(4) $\boldsymbol{F}'_R=0,M_O=0$。下面对这几种情况作进一步的分析讨论。

(1) 平面任意力系简化为一个力偶的情形

如果力系的主矢等于零，而主矩 M_O 不等于零，即

$$\boldsymbol{F}'_R=0,\quad M_O\neq0$$

则原力系合成为合力偶。合力偶矩为

$$M_O=\sum_{i=1}^{n}M_O(\boldsymbol{F}_i)$$

因为力偶对于平面内任意一点的矩都相同,因此当力系合成为一个力偶时,主矩与简化中心的选择无关。

(2) 平面任意力系简化为一个合力的情形·合力矩定理

如果主矩等于零,主矢不等于零,即

$$F'_R \neq 0, \quad M_O = 0$$

此时附加力偶系互相平衡,只有一个与原力系等效的力 F'_R。显然,F'_R 就是原力系的合力,而合力的作用线恰好通过选定的简化中心 O。

如果平面力系向点 O 简化的结果是主矢和主矩都不等于零,如图 3-4a 所示,即

$$F'_R \neq 0, \quad M_O \neq 0$$

现将矩为 M_O 的力偶用两个力 F_R 和 F''_R 表示,并令 $F'_R = F_R = -F''_R$(图 3-4b)。再去掉一对平衡力 F'_R 与 F''_R,于是就将作用于点 O 的力 F'_R 和力偶(F_R,F''_R)合成为一个作用在点 O' 的力 F_R,如图 3-4c 所示。

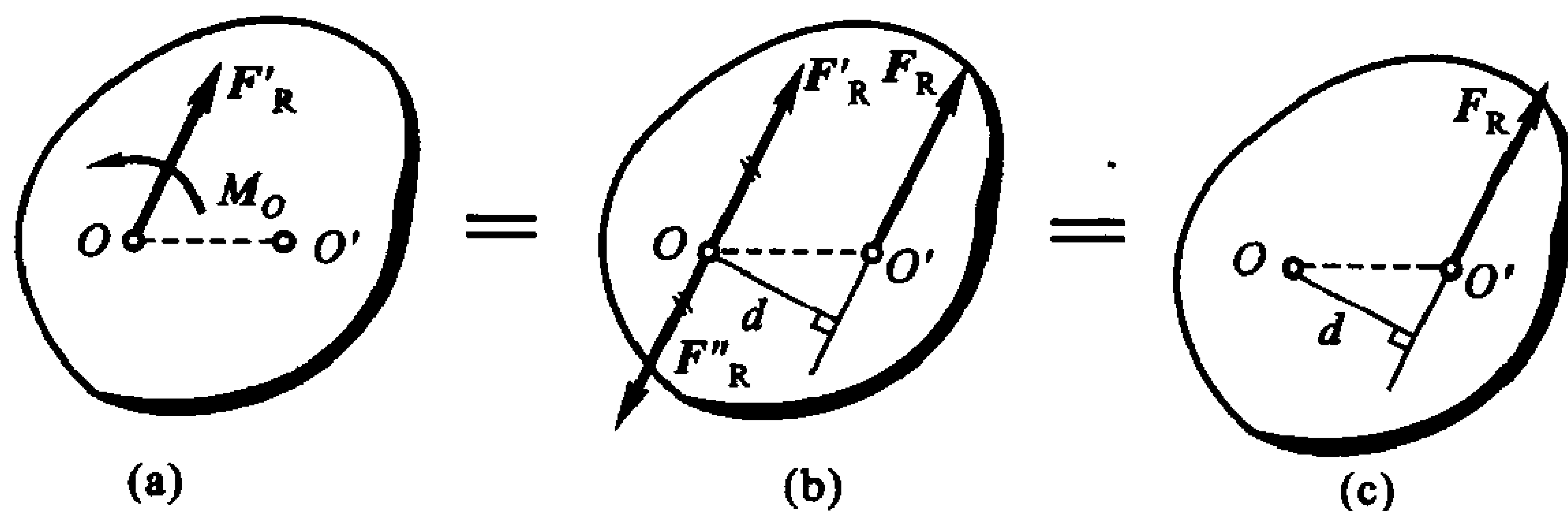


图 3-4

这个力 F_R 就是原力系的合力。合力矢等于主矢;合力的作用线在点 O 的哪一侧,需根据主矢和主矩的方向确定;合力作用线到点 O 的距离 d 为

$$d = \frac{M_O}{F_R}$$

下面证明,平面任意力系的合力矩定理。由图 3-4b 易见,合力 F_R 对点 O 的矩为

$$M_O(F_R) = F_R d = M_O$$

由式(3-2)有

$$M_O = \sum M_O(F_i)$$

所以得证

$$M_O(F_R) = \sum M_O(F_i) \tag{3-5}$$

由于简化中心 O 是任意选取的,故上式有普遍意义,可叙述如下:平面任意力系的合力对作用面内任一点的矩等于力系中各力对同一点的矩的代数和。这就是

合力矩定理。

(3) 平面任意力系平衡的情形

如果力系的主矢,主矩均等于零,即

$$F'_{R}=0, \quad M_{O}=0$$

则原力系平衡,这种情形将在下节详细讨论。

例 3-1 重力坝受力情形如图 3-5a 所示。已知:$P_1=450$ kN,$P_2=200$ kN,$F_1=300$ kN,$F_2=70$ kN。求力系向点 O 简化的结果,合力与基线 OA 的交点到点 O 的距离 x,以及合力作用线方程。

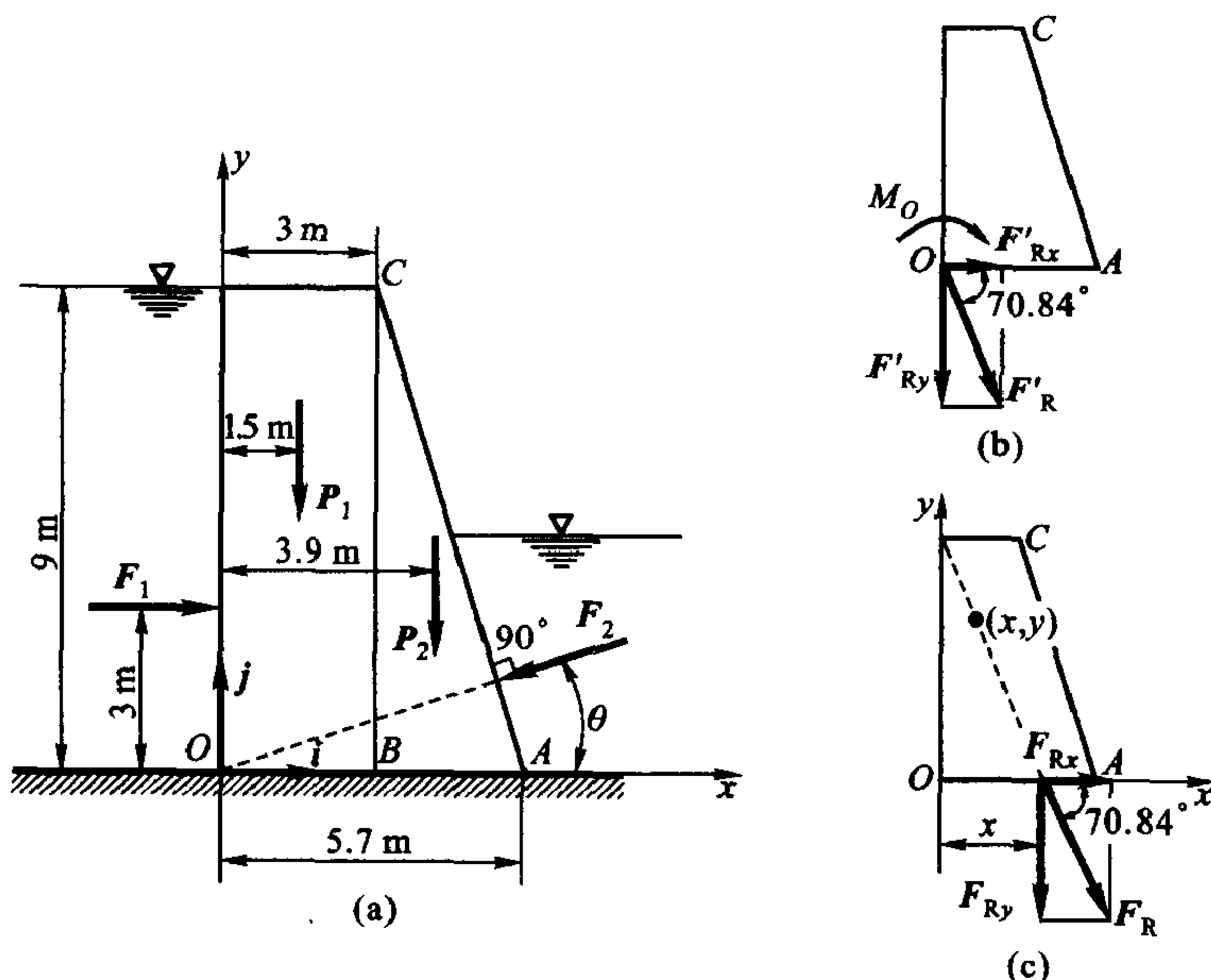


图 3-5

解: (1) 先将力系向点 O 简化,求得其主矢 F'_{R} 和主矩 M_O(图 3-5b)。由图 3-5a,有

$$\theta=\angle ACB=\arctan\frac{AB}{CB}=16.7^{\circ}$$

主矢 F'_{R} 在 x,y 轴上的投影为

$$\sum F_x=F_1-F_2\cos\theta=232.9\ \text{kN}$$

$$\sum F_y=-P_1-P_2-F_2\sin\theta=-670.1\ \text{kN}$$

主矢 F'_{R} 的大小为

$$F'_{R}=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2}=709.4\ \text{kN}$$

主矢 F'_{R} 的方向余弦为

$$\cos(F'_{R},i)=\frac{\sum F_x}{F'_{R}}=0.3283, \quad \cos(F'_{R},j)=\frac{\sum F_y}{F'_{R}}=-0.944\ 6$$

则有

$$\angle(\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}},\boldsymbol{i})=\pm 70.84^\circ,\quad \angle(\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}},\boldsymbol{j})=180^\circ\pm 19.16^\circ$$

故主矢 $\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}$ 在第四象限内，与 x 轴的夹角为 -70.84°。

力系对点 O 的主矩为

$$M_O=\sum M_O(\boldsymbol{F})=-3\mathrm{m}\cdot F_1-1.5\mathrm{m}\cdot P_1-3.9\mathrm{m}\cdot P_2=-2\ 355\ \mathrm{kN\cdot m}$$

(2) 合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 的大小和方向与主矢 $\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}$ 相同。其作用线位置的 x 值可根据合力矩定理求得(图 3-5c)，由于 $M_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}x})=0$ 故

$$M_O=M_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}})=M_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}x})+M_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}y})=\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}y}\cdot x$$

解得

$$x=\frac{M_O}{F_{\mathrm{R}y}}=\frac{2\ 355\ \mathrm{kN\cdot m}}{670.1\ \mathrm{kN}}=3.514\ \mathrm{m}$$

(3) 设合力作用线上任一点的坐标为(x,y)，将合力作用于此点(图 3-5c)，则合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 对坐标原点的矩的解析表达式为

$$M_O=M_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}})=xF_{\mathrm{R}y}-yF_{\mathrm{R}x}=x\sum F_y-y\sum F_x$$

将已求得的 $M_O,\sum F_x,\sum F_y$ 的代数值代入上式，得合力作用线方程为

$$670.1\ \mathrm{kN}\cdot x+232.9\ \mathrm{kN}\cdot y-2\ 355\ \mathrm{kN\cdot m}=0$$

上式中，若令 $y=0$，可得 $x=3.514\ \mathrm{m}$，与前述结果相同。

§3-2　平面任意力系的平衡条件和平衡方程

现在讨论静力学中最重要的情形，即平面任意力系的主矢和主矩都等于零的情形：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}&=0\\ M_O&=0\end{aligned}\right\}\qquad(3-6)$$

显然，主矢等于零，表明作用于简化中心 O 的汇交力系为平衡力系；主矩等于零，表明附加力偶系也是平衡力系，所以原力系必为平衡力系。因此，式(3-6)为平面任意力系平衡的充分条件。

由上一节分析结果可见：若主矢和主矩有一个不等于零，则力系应简化为合力或合力偶；若主矢与主矩都不等于零时，可进一步简化为一个合力。上述情况下力系都不能平衡，只有当主矢和主矩都等于零时，力系才能平衡，因此，式(3-6)又是平面任意力系平衡的必要条件。

于是，平面任意力系平衡的必要和充分条件是：力系的主矢和对于任一点的主矩都等于零。

这些平衡条件可用解析式表示。将式(3-2)和(3-3)代入式(3-6)，可得

$$\sum F_{xi}=0,\quad \sum F_{yi}=0,\quad \sum M_O(\boldsymbol{F}_i)=0\qquad(3-7)$$

由此可得结论，平面任意力系平衡的解析条件是：所有各力在两个任选的坐标轴

上的投影的代数和分别等于零，以及各力对于任意一点的矩的代数和也等于零。式(3-7)称为平面任意力系的平衡方程(为便于书写，下标 i 可略去)。

例 3-2　起重机重 $P_1=10\ \text{kN}$，可绕铅直轴 AB 转动；起重机的挂钩上挂一重为 $P_2=40\ \text{kN}$ 的重物，如图 3-6 所示。起重机的重心 C 到转动轴的距离为 1.5 m，其他尺寸如图所示。求在止推轴承 A 和轴承 B 处的约束力。

解：　以起重机为研究对象，它所受的主动力有 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$。由于对称性，约束力和主动力都位于同一平面内。止推轴承 A 处有两个约束力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$，$\boldsymbol{F}_{Ay}$，轴承 B 处只有一个与转轴垂直的约束力 $\boldsymbol{F}_B$，约束力方向如图 3-6 所示。

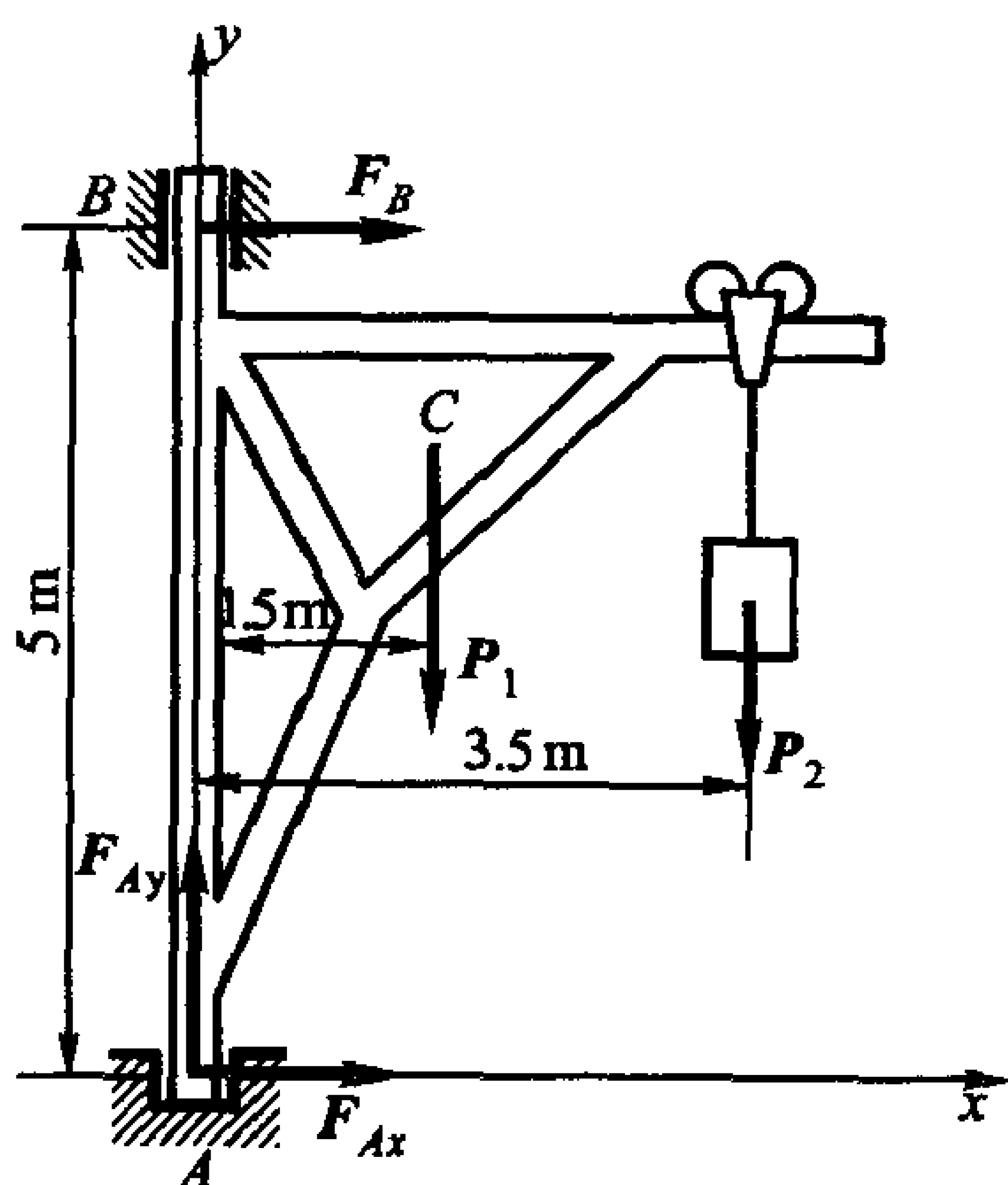


图 3-6

取坐标系如图 3-6 所示，列平面任意力系的平衡方程，即

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_B=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-P_1-P_2=0$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad -F_B\cdot 5\ \text{m}-P_1\cdot 1.5\ \text{m}-P_2\cdot 3.5\ \text{m}=0$$

求解以上方程，得

$$F_{Ay}=P_1+P_2=50\ \text{kN}$$

$$F_B=-0.3P_1-0.7P_2=-31\ \text{kN}$$

$$F_{Ax}=-F_B=31\ \text{kN}$$

F_B 为负值，说明它的方向与假设的方向相反，即应指向左。

例 3-3　图 3-7 所示的水平横梁 AB，A 端为固定铰链支座，B 端为一滚动支座。梁的长为 $4a$，梁重 P，作用在梁的中点 C。在梁的 AC 段上受均布载荷 q 作用，在梁的 BC 段上受力偶作用，力偶矩 $M=Pa$。试求 A 和 B 处的支座约束力。

解：　选梁 AB 为研究对象。它所受的主动力有：均布载荷 q，重力 $\boldsymbol{P}$ 和矩为 M 的力偶。它所受的约束力有：铰链 A 的两个分力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Ay}$，滚动支座 B 处铅直向上的约束力 $\boldsymbol{F}_B$。取坐标系如图 3-7 所示，列出平衡方程：

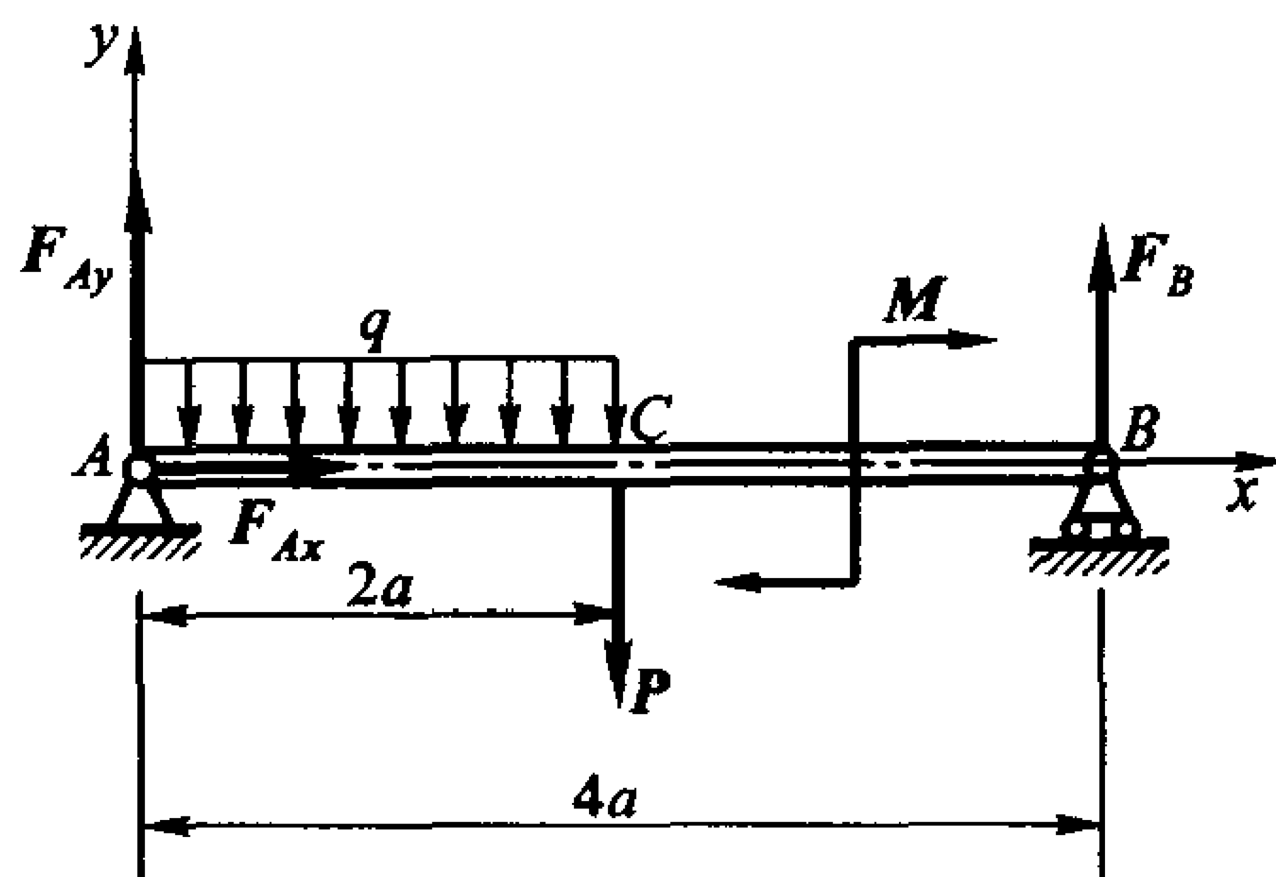


图 3－7

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad F_B\cdot 4a-M-P\cdot 2a-q\cdot 2a\cdot a=0$$
$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}=0$$
$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-q\cdot 2a-P+F_B=0$$

解上述方程，得

$$F_B=\frac{3}{4}P+\frac{1}{2}qa,\quad F_{Ax}=0,\quad F_{Ay}=\frac{P}{4}+\frac{3}{2}qa$$

例 3－4 自重为 $P=100$ kN 的 T 字形刚架 ABD，置于铅垂面内，载荷如图 3－8a 所示。其中 $M=20$ kN·m，$F=400$ kN，$q=20$ kN/m，$l=1$ m。试求固定端 A 的约束力。

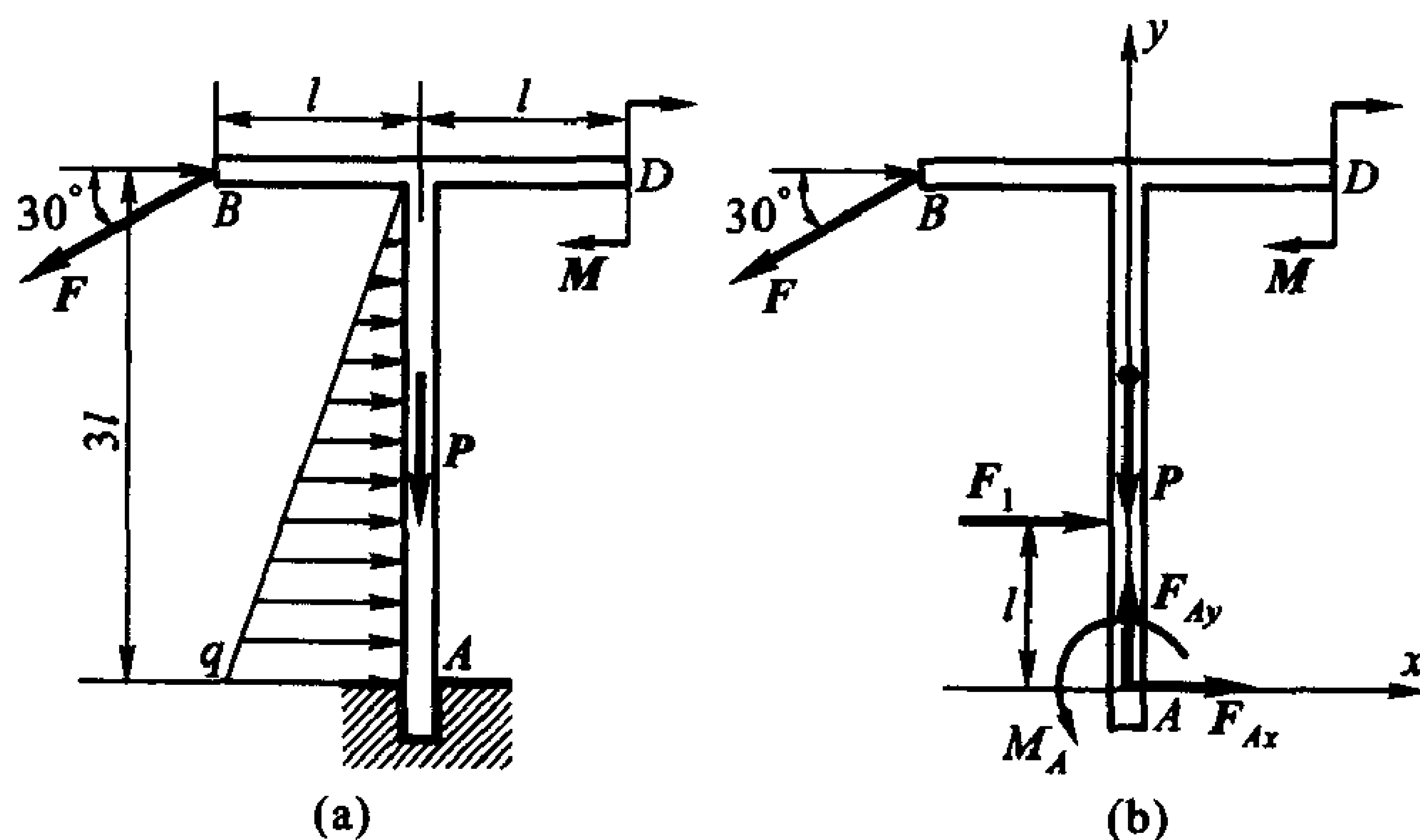


图 3－8

解： 取 T 字形刚架为研究对象，其上除受主动力外，还受有固定端 A 处的约束力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$，$\boldsymbol{F}_{Ay}$ 和约束力偶 M_A。线性分布载荷可视为一组平行力系，将其简化为一集中力 $\boldsymbol{F}_1$，其大小为 $F_1=\frac{1}{2}q\times 3l=30$ kN，其作用线可利用合力矩定理确定：

$$F_1 h=\int_0^{3l}\frac{q}{3l}(3l-y)y\mathrm{d}y$$

式中，h 为点 A 到集中力 $\boldsymbol{F}_1$ 的距离，由上式求得 $h=l$，即集中力作用于三角形分布载荷的几

何中心。刚架受力图如图 3-8b 所示。

按图示坐标，列平衡方程：

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_1-F\sin 60^\circ=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-P-F\cos 60^\circ=0$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad M_A-M-F_1 l+F\cos 60^\circ\cdot l+F\sin 60^\circ\cdot 3l=0$$

解方程，求得

$$F_{Ax}=F\sin 60^\circ-F_1=316.4\ \text{kN}$$

$$F_{Ay}=P+F\cos 60^\circ=300\ \text{kN}$$

$$M_A=M+F_1 l-Fl\cos 60^\circ-3Fl\sin 60^\circ=-1\ 188\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

负号说明图中所设方向与实际情况相反，即 M_A 应为顺时针转向。

从上述例题可见，选取适当的坐标轴和力矩中心，可以减少每个平衡方程中的未知量的数目。在平面任意力系情形下，矩心应取在多个未知力的交点上，而坐标轴应当与尽可能多的未知力相垂直。

在例 3-3 中，若以方程 $\sum M_B(\boldsymbol{F})=0$ 取代方程 $\sum F_y=0$，可以不解联立方程直接求得 F_{Ay} 值。因此在计算某些问题时，采用力矩方程往往比投影方程简便。下面介绍平面任意力系平衡方程的其他两种形式。

3 个平衡方程中有两个力矩方程和一个投影方程，即

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad \sum M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad \sum F_x=0 \tag{3-8}$$

其中 x 轴不得垂直于 A，B 两点的连线。

为什么上述形式的平衡方程也能满足力系平衡的必要和充分条件呢？这是因为，如果力系对点 A 的主矩等于零，则这个力系不可能简化为一个力偶；但可能有两种情形：这个力系或者是简化为经过点 A 的一个力，或者平衡。如果力系对另一点 B 的主矩也同时为零，则这个力系或有一合力沿 A、B 两点的连线，或者平衡（图 3-9）。如果再加上 $\sum F_x=0$，那么力系如有合力，则此合力必与 x 轴垂直。式(3-8)的附加条件（x 轴不得垂直连线 AB）完全排除了力系简化为一个合力的可能性，故所研究的力系必为平衡力系。

同理，也可写出三个力矩式的平衡方程，即

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad \sum M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad \sum M_C(\boldsymbol{F})=0 \tag{3-9}$$

其中 A，B，C 三点不得共线。为什么必须有这个附加条件，读者可自行证明。

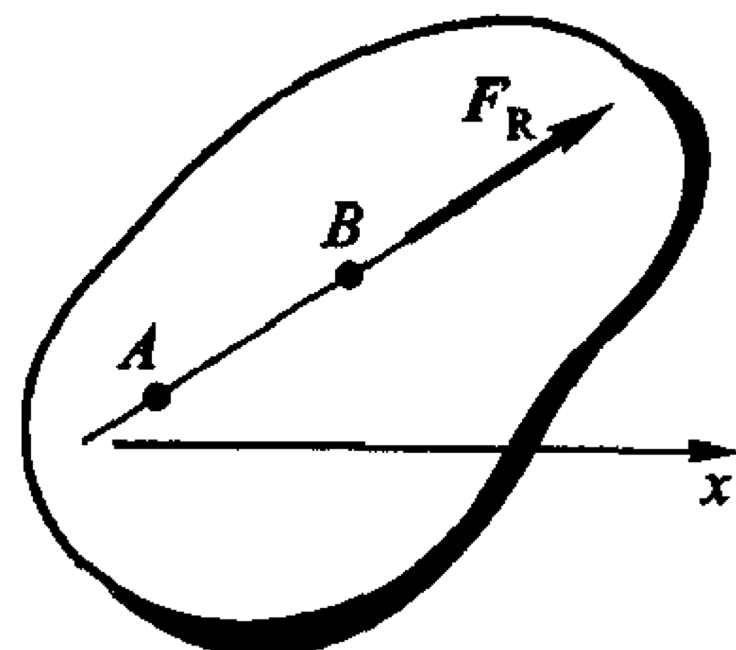


图 3-9

上述三组方程(3-7)、(3-8)、(3-9)，究竟选用哪一组方程，须根据具体条件确定。对于受平面任意力系作用的单个刚体的平衡问题，只可以写出 3 个独立的平衡方程，求解 3 个未知量。任何第四个方程只是前 3 个方程的线性组合，因而不

是独立的。我们可以利用这个方程来校核计算的结果。

平面平行力系是平面任意力系的一种特殊情形。

如图 3－10 所示，设物体受平面平行力系 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 的作用。如选取 x 轴与各力垂直，则不论力系是否平衡，每一个力在 x 轴上的投影恒等于零，即 $\sum F_x\equiv 0$。于是，平行力系的独立平衡方程的数目只有两个，即

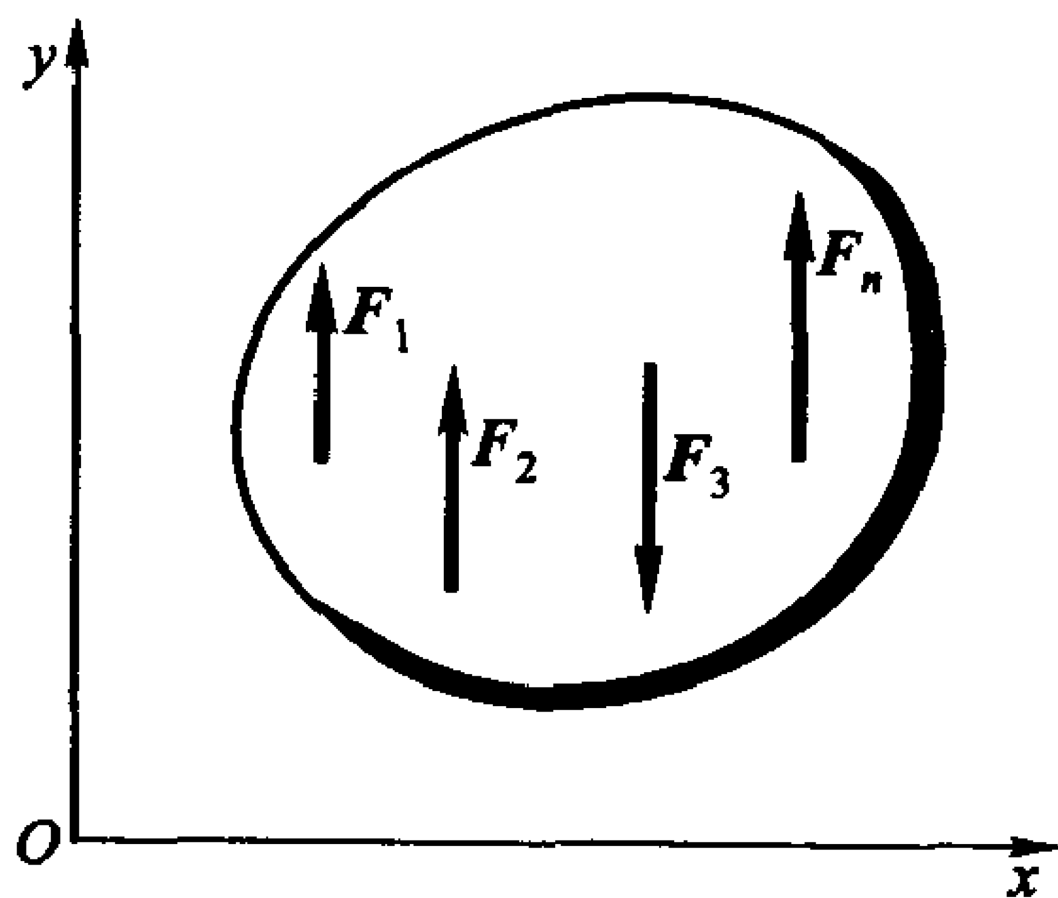


图 3－10

$$\left.\begin{aligned}\sum F_y&=0\\ \sum M_O(\boldsymbol{F})&=0\end{aligned}\right\}\tag{3-10}$$

平面平行力系的平衡方程，也可用两个力矩方程的形式，即

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\qquad \sum M_B(\boldsymbol{F})=0\tag{3-11}$$

§3－3　物体系的平衡·静定和超静定问题

工程中，如组合构架、三铰拱等结构，都是由几个物体组成的系统。当物体系平衡时，组成该系统的每一个物体都处于平衡状态，因此对于每一个受平面任意力系作用的物体，均可写出三个平衡方程。如物体系由 n 个物体组成，则共有 $3n$ 个独立方程。如系统中有的物体受平面汇交力系或平面平行力系作用时，则系统的平衡方程数目相应减少。当系统中的未知量数目等于独立平衡方程的数目时，则所有未知数都能由平衡方程求出，这样的问题称为**静定**问题。显然前面列举的各例都是静定问题。在工程实际中，有时为了提高结构的刚度和坚固性，常常增加多余的约束，因而使这些结构的未知量的数目多于平衡方程的数目，未知量就不能全部由平衡方程求出，这样的问题称为**超静定**问题。对于超静定问题，必须考虑物体因受力作用而产生的变形，加列某些补充方程后，才能使方程的数目等于未知量的数目。超静定问题已超出刚体静力学的范围，须在材料力学和结构力学中研究。

下面举出一些静定和超静定问题的例子。

图 3-11a、b 所示，重物分别用绳子悬挂，均受平面汇交力系作用，均有两个平衡方程。在图 a 中，有两个未知约束力，故是静定的；而在图 b 中，有三个未知约束力，因此是超静定的。

图 3-11c，d 所示，轴分别由轴承支承，均受平面平行力系作用，均有两个平衡方程。图 c 中有两个未知约束力，故为静定；而在图 d 中，有三个未知约束力，因此为超静定。

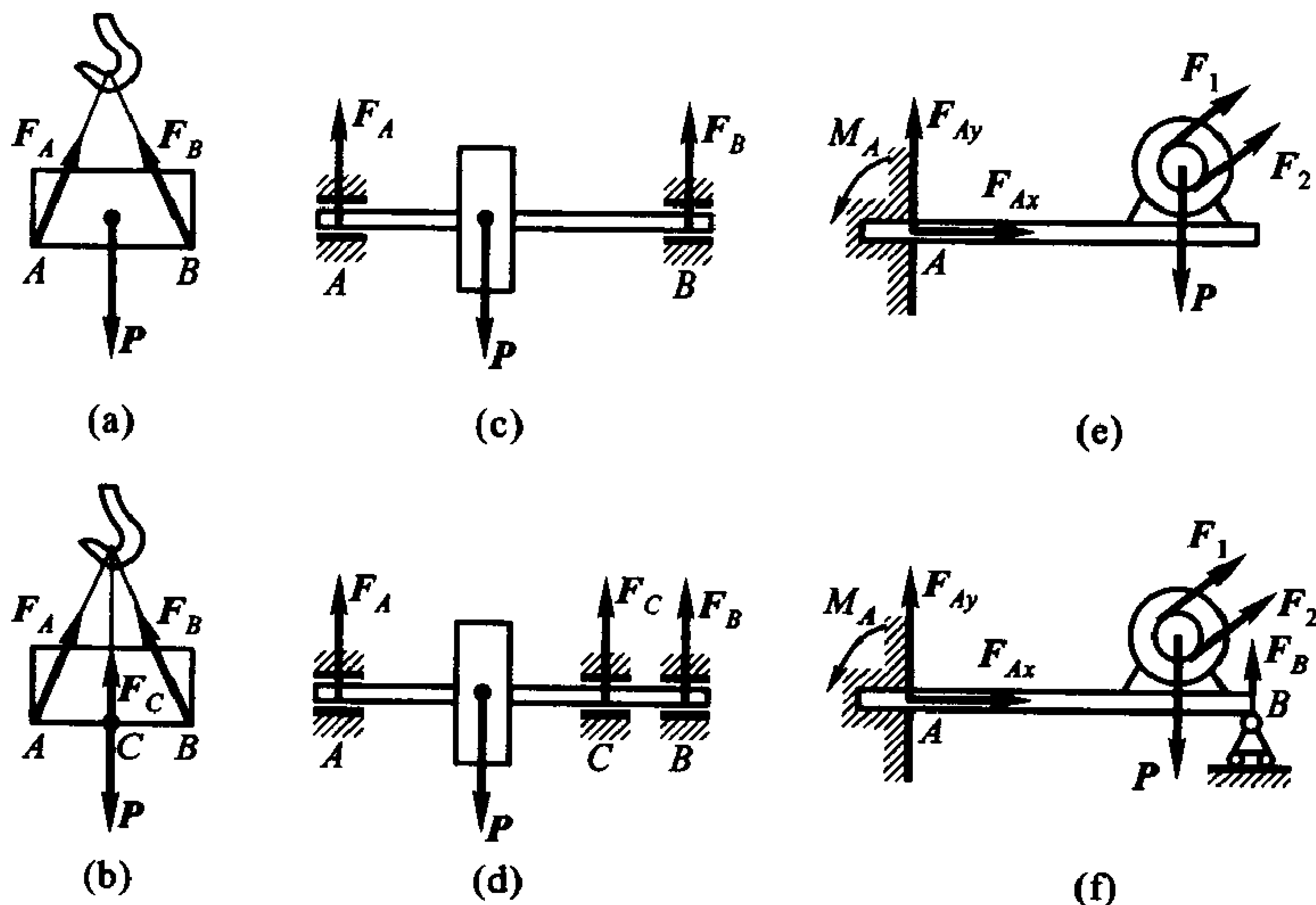


图 3-11

图 3-11e 和 f 所示的平面任意力系，均有 3 个平衡方程，图(e)中有 3 个未知数，因此是静定的；而图(f)中有四个未知数，因此是超静定的。图 3-12 所示的梁由两部分铰接组成，每部分有 3 个平衡方程，共有 6 个平衡方程。未知量除了图中所画的 3 个约束力和 1 个约束力偶外，尚有铰链 C 处的 2 个未知力，共计 6 个。因此，也是静定的。若将 B 处的滚动支座改为固定铰支，则系统共有 7 个未知数，因此系统将是超静定的。

求解静定物体系的平衡问题时，可以选每个物体为研究对象，列出全部平衡方程，然后求解；也可先取整个系统为研究对象，列出平衡方程，这样的方程因不包含内力，式中未知量较少，解出部分未知量后，再从系统中选取某些物体作为研究对象，列出另外的平衡方程，直至求出所有的未知量为止。在选择

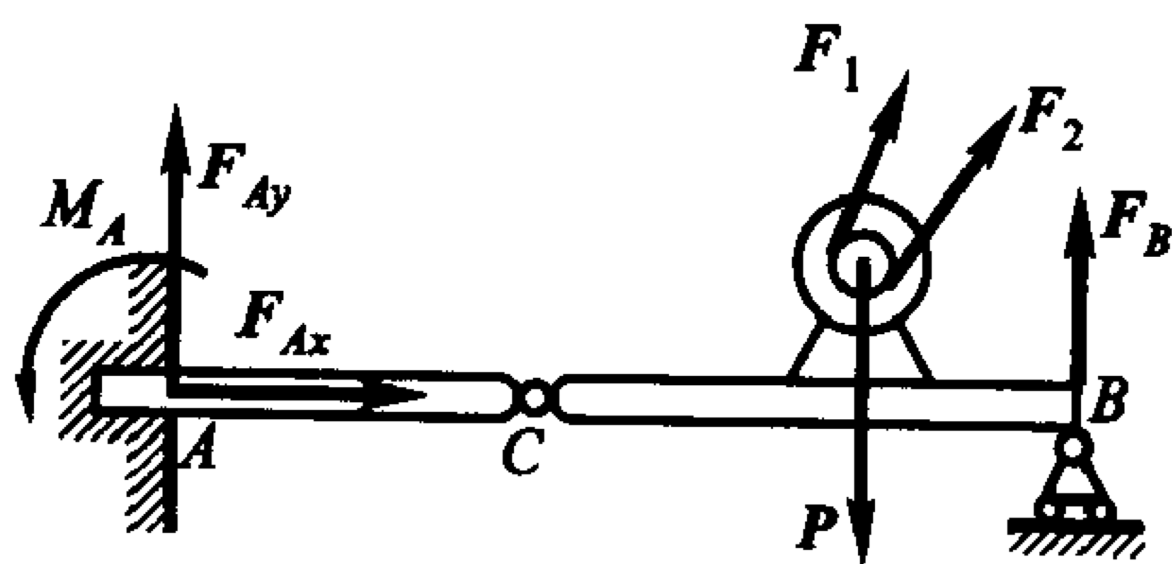


图 3-12

研究对象和列平衡方程时，应使每一个平衡方程中的未知量个数尽可能少，最好是只含有一个未知量，以避免求解联立方程。

例 3-5 图 3-13a 所示为曲轴冲床简图，由轮 I、连杆 AB 和冲头 B 组成。$OA=R$，$AB=l$。忽略摩擦和自重，当 OA 在水平位置、冲压力为 $\boldsymbol{F}$ 时系统处于平衡状态。求：(1) 作用在轮 I 上的力偶之矩 M 的大小；(2)轴承 O 处的约束力；(3) 连杆 AB 受的力；(4)冲头给导轨的侧压力。

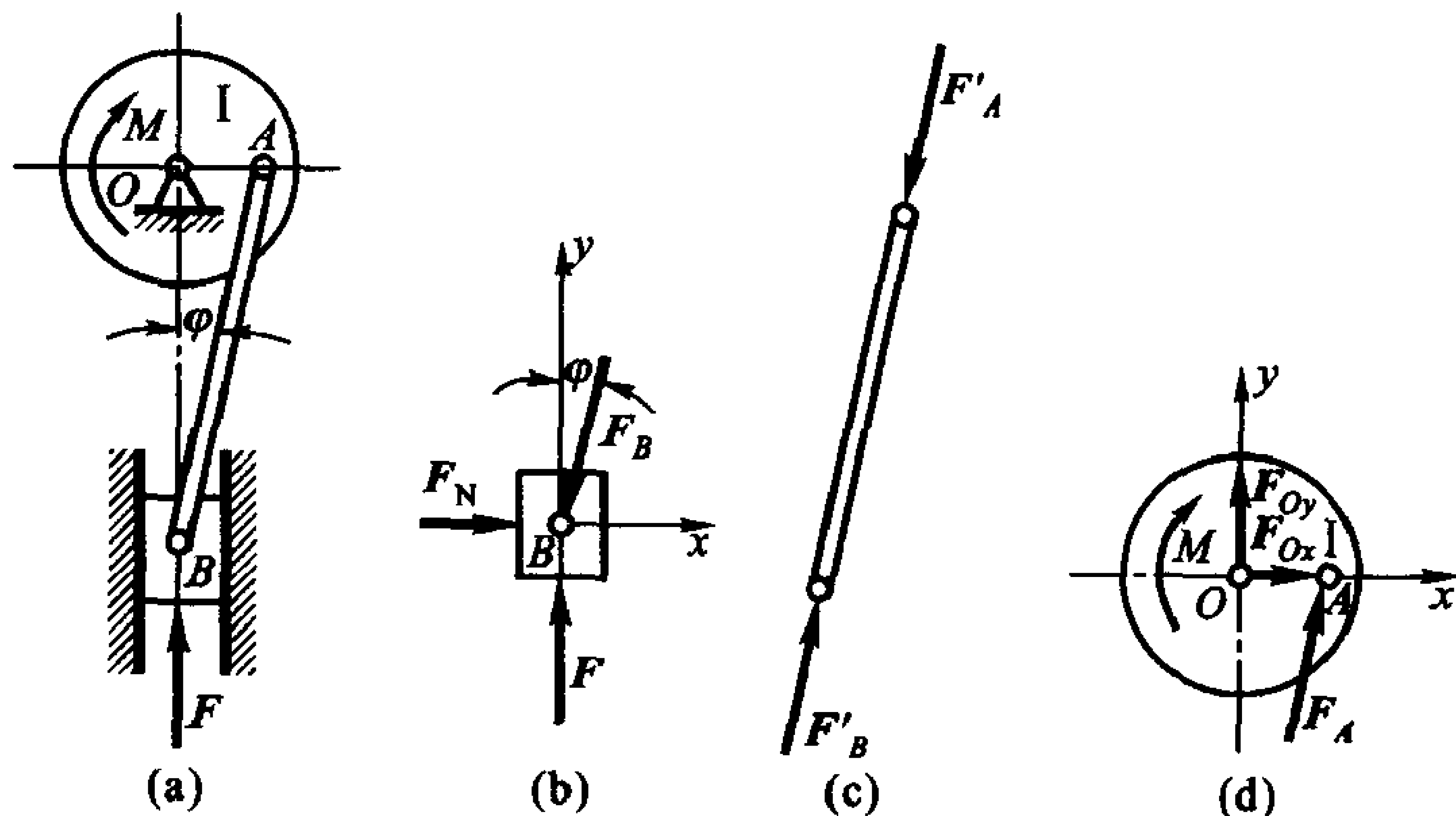


图 3-13

解： (1) 首先以冲头为研究对象。冲头受冲压阻力 $\boldsymbol{F}$、导轨约束力 $\boldsymbol{F}_N$ 以及连杆(二力杆)的作用力 $\boldsymbol{F}_B$ 作用，受力如图 3-13b 所示，为一平面汇交力系。

设连杆与铅直线间的夹角为 φ，按图示坐标轴列平衡方程：

$$\sum F_x=0,\quad F_N-F_B\sin\varphi=0 \tag{a}$$

$$\sum F_y=0,\quad F-F_B\cos\varphi=0 \tag{b}$$

由式(b)得

$$F_B=\frac{F}{\cos\varphi}$$

F_B 为正值，说明假设的 $\boldsymbol{F}_B$ 的方向是对的，即连杆受压力(图 3-13c)。代入式(a)得

$$F_N=F\tan\varphi=F\frac{R}{\sqrt{l^2-R^2}}$$

冲头对导轨的侧压力的大小等于 F_N，方向相反。

(2) 再以轮 I 为研究对象。轮 I 受平面任意力系作用，包括矩为 M 的力偶，连杆作用力 $\boldsymbol{F}_A$ 以及轴承的约束力 $\boldsymbol{F}_{Ox}$，$\boldsymbol{F}_{Oy}$(图 3-13d)。按图示坐标轴列平衡方程：

$$\sum M_O(\boldsymbol{F})=0,\quad F_A\cos\varphi\cdot R-M=0 \tag{c}$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ox}+F_A\sin\varphi=0 \tag{d}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Oy}+F_A\cos\varphi=0 \tag{e}$$

由式(c)得

$$M=FR$$

由式(d)得

$$F_{Ox} = -F_A \sin\varphi = -F\frac{R}{\sqrt{l^2-R^2}}$$

由式(e)得

$$F_{Oy} = -F_A\cos\varphi = -F$$

负号说明，力 $\boldsymbol{F}_{Ox}$，$\boldsymbol{F}_{Oy}$ 的方向与图示假设的方向相反。

此题也可先取整个系统为研究对象，再取冲头或轮 I 为研究对象，列平衡方程求解。

例 3-6　图 3　14a 所示的组合梁(不计自重)由 AC 和 CD 铰接而成。已知：$F=20$ kN，均布载荷 $q=10$ kN/m，$M=20$ kN·m，$l=1$m。试求插入端 A 及滚动支座 B 的约束力。

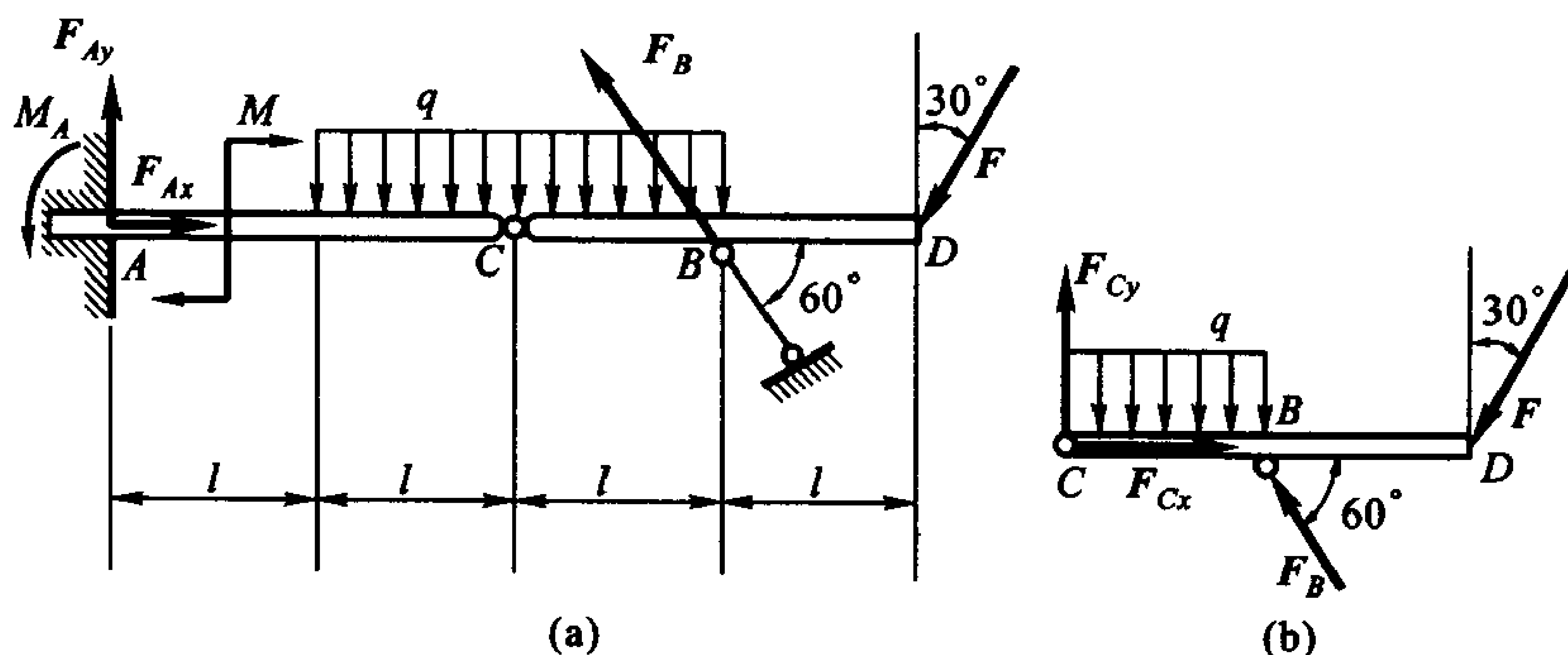


图 3-14

解：　先以整体为研究对象，组合梁在主动力 M，$\boldsymbol{F}$，q 和约束力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$，$\boldsymbol{F}_{Ay}$，M_A 及 $\boldsymbol{F}_B$ 作用下平衡，受力如图 3-14a 所示。其中均布载荷的合力通过点 C，大小为 $2ql$。列平衡方程：

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}-F_B\cos 60^\circ - F\sin 30^\circ = 0 \tag{a}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}+F_B\sin 60^\circ - 2ql - F\cos 30^\circ = 0 \tag{b}$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad M_A - M - 2ql\cdot 2l + F_B\sin 60^\circ\cdot 3l - F\cos 30^\circ\cdot 4l = 0 \tag{c}$$

以上三个方程中包含有四个未知量，必须再补充方程才能求解。为此可取梁 CD 为研究对象，受力如图 3-14b，由

$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0,\quad F_B\sin 60^\circ\cdot l - ql\frac{l}{2} - F\cos 30^\circ\cdot 2l = 0 \tag{d}$$

由式(d)得

$$F_B = 45.77\ \text{kN}$$

代入式(a)，(b)，(c)得

$$F_{Ax}=32.89\ \text{kN},\ F_{Ay}=-2.32\ \text{kN},\quad M_A = 10.37\ \text{kN·m}$$

此题也可先取梁 CD 为研究对象，求得 $\boldsymbol{F}_B$ 后，再以整体为研究对象，求出 $\boldsymbol{F}_{Ax}$，$\boldsymbol{F}_{Ay}$ 及 M_A。

注意：此题在研究整体平衡时，可将均布载荷作为合力通过点 C，但在研究梁 CD 或 AC 平衡时，必然分别受一半的均布载荷。

例 3-7　齿轮传动机构如图 3-15a 所示。齿轮Ⅰ的半径为 r，自重为 P_1。齿轮Ⅱ的半径为 $R=2r$，其上固结一半径为 r 的塔轮Ⅲ，轮Ⅱ与Ⅲ共重 $P_2=2P_1$。齿轮压力角为 $\theta=20^\circ$，物体 C 重为 $P=20P_1$。求：(1) 保持物体 C 匀速上升时，作用于轮Ⅰ上力偶的矩 M；(2) 光滑轴承 A，B 的约束力。

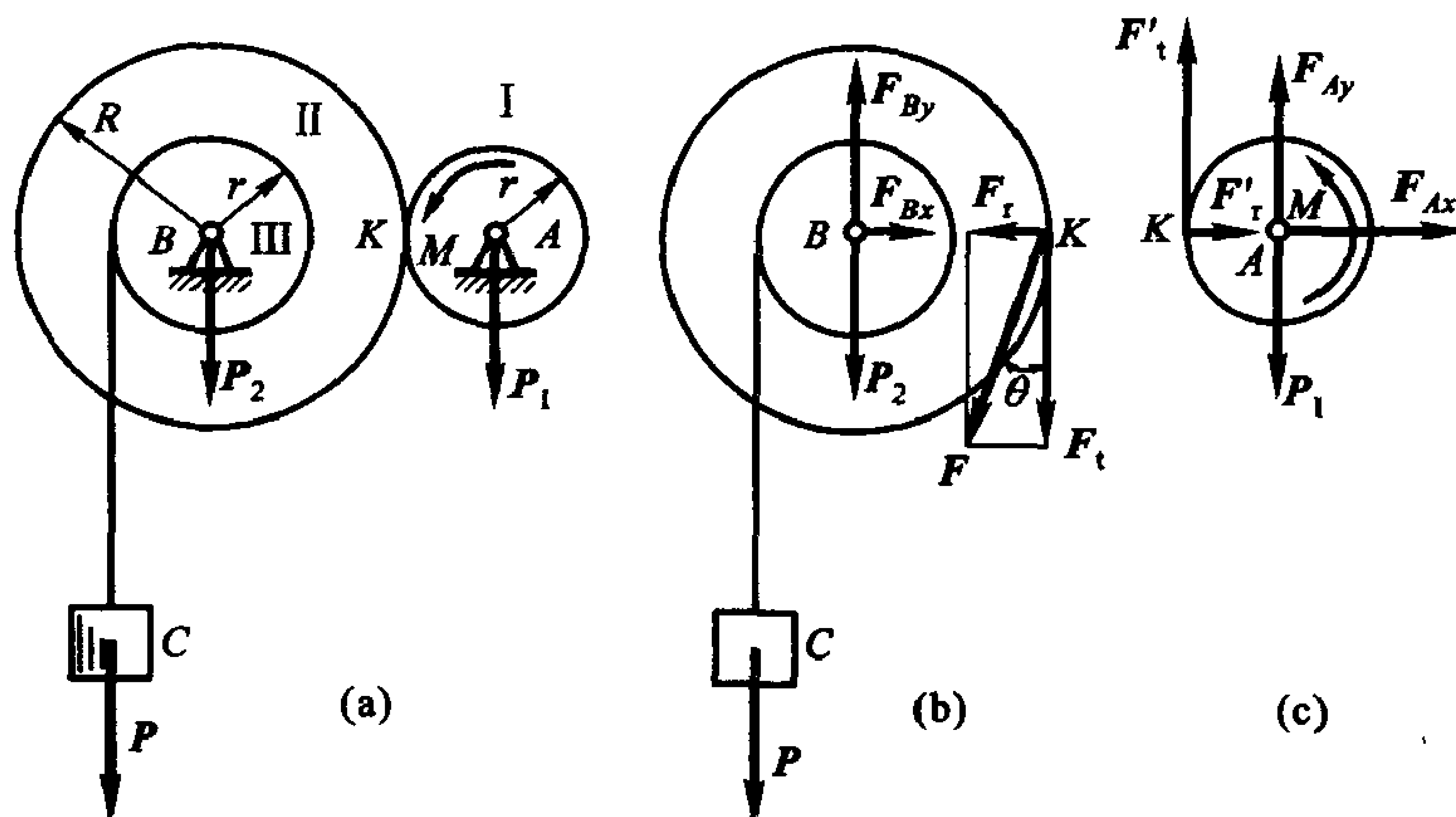


图 3-15

解：先取轮Ⅱ，Ⅲ及重物 C 为研究对象，受力如图 3-15b 所示。齿轮间的啮合力 $\boldsymbol{F}$ 可沿节圆的切向及径向分解为圆周力 $\boldsymbol{F}_t$ 和径向力 $\boldsymbol{F}_r$。列平衡方程：

$$\sum F_x=0,\quad F_{Bx}-F_r=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{By}-P-F_t-P_2=0$$

$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad Pr-F_tR=0$$

由以上三式及压力角定义

$$\tan\theta=\frac{F_r}{F_t},\quad 且\ \theta=20^\circ$$

解出

$$F=\frac{Pr}{R}=10P_1,\quad F_r=F_t\tan\theta=3.64P_1$$

$$F_{Bx}=F_r=3.64P_1,\quad F_{By}=P+P_2+F=32P_1$$

再取轮Ⅰ为研究对象，受力如图 3-15c 所示。列方程：

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F'_r=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}+F'_t-P_1=0$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad M-F'_tr=0$$

解得

$$F_{Ax}=-F'_r=-3.64P_1,\quad F_{Ay}=P_1-F'_t=-9P_1$$

$$M=F'_tr=10P_1r$$

例 3-8　图 3-16a 所示为钢结构拱架，拱架由两个相同的钢架 AC 和 BC 铰接，吊车梁

支承在钢架的 D,E 上。设两钢架各重为 $P=60\ \mathrm{kN}$；吊车梁重为 $P_1=20\ \mathrm{kN}$，其作用线通过点 C；载荷为 $P_2=10\ \mathrm{kN}$；风力 $F=10\ \mathrm{kN}$。尺寸如图所示。D,E 两点在力 $\boldsymbol{P}$ 的作用线上。求固定铰支座 A 和 B 的约束力。

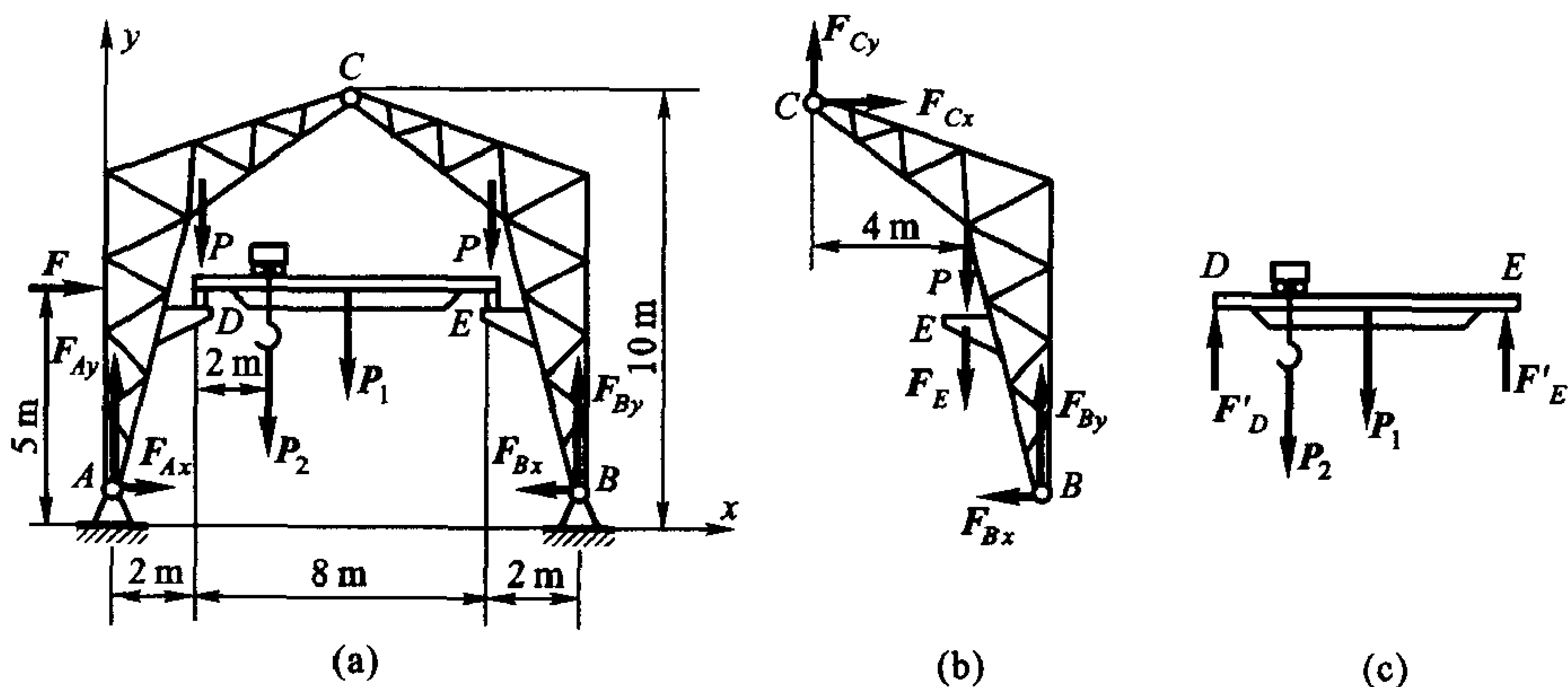


图 3-16

解：(1) 选整个拱架为研究对象。拱架在主动力 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{F}$ 和铰链 A,B 的约束力 $\boldsymbol{F}_{Ax},\boldsymbol{F}_{Ay},\boldsymbol{F}_{Bx},\boldsymbol{F}_{By}$ 作用下平衡，受力如图 3-16a 所示。列出平衡方程：

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad 12\ \mathrm{m}\cdot F_{By}-5\ \mathrm{m}\cdot F-2\ \mathrm{m}\cdot P-10\ \mathrm{m}\cdot P-4\ \mathrm{m}\cdot P_2-6\ \mathrm{m}\cdot P_1=0 \tag{a}$$

$$\sum F_x=0,\quad F+F_{Ax}-F_{Bx}=0 \tag{b}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}+F_{By}-P_2-P_1-2P=0 \tag{c}$$

以上三个方程包含四个未知数，欲求得全部解答，必须再补充方程。

(2) 选右边钢架为研究对象，其受力如图 3-16b 所示。为了减少方程中的未知量数目，采用力矩方程，即

$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0,\quad 6\ \mathrm{m}\cdot F_{By}-10\ \mathrm{m}\cdot F_{Bx}-4\ \mathrm{m}\cdot(P+F_E)=0 \tag{d}$$

这时又出现了一个未知数 F_E。为求得该力的大小，可再考虑吊车梁的平衡。

(3) 选吊车梁为研究对象，其受力如图 3-16c 所示。为求得 F'_E 可列如下方程：

$$\sum M_D(\boldsymbol{F})=0,\quad 8\ \mathrm{m}\cdot F'_E-4\ \mathrm{m}\cdot P_1-2\ \mathrm{m}\cdot P_2=0 \tag{e}$$

由式(e)解得

$$F'_E=12.5\ \mathrm{kN}$$

由式(a)求得

$$F_{By}=77.5\ \mathrm{kN}$$

将 F_{By} 和 F_E 的值代入式(d)得

$$F_{Bx}=17.5\ \mathrm{kN}$$

代入式(b)得

$$F_{Ax}=7.5\ \mathrm{kN}$$

代入式(c)得

$$F_{Ay}=72.5\ \text{kN}$$

例 3-9 编号为 1,2,3,4 的四根杆件组成的平面结构,其中 A,C,E 为光滑铰链,B,D 为光滑接触,E 为中点,如图 3-17a 所示。各杆自重不计。在水平杆 2 上作用力 $\boldsymbol{F}$。试证:无论力 F 的位置 x 如何改变,其竖杆 1 总是受到大小等于 F 的压力。

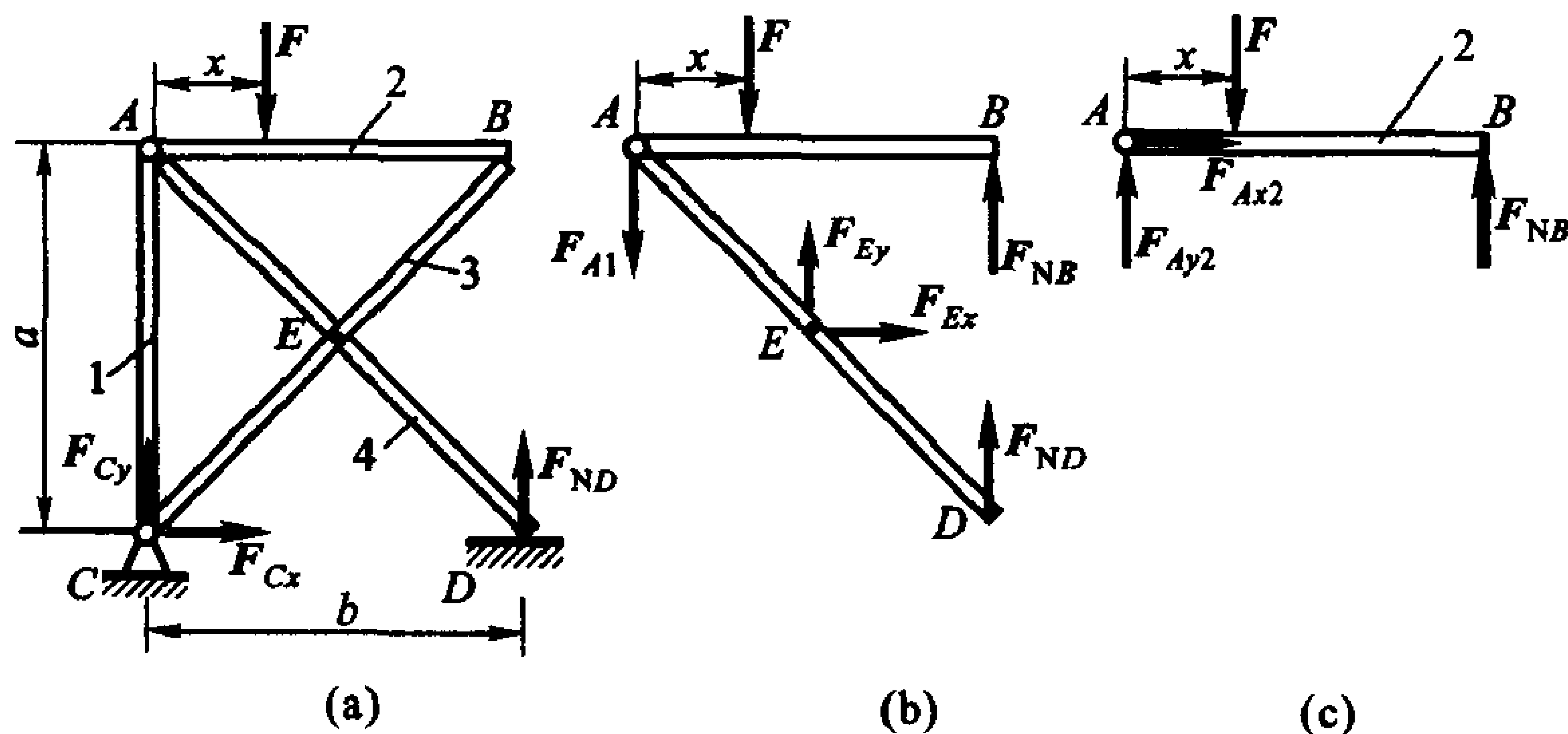


图 3-17

解: 本题为求二力杆(杆 1)的内力 F_{A1} 或 F_{C1}。为此,先取杆 2,4 及销钉 A 为研究对象,受力如图 3-17b 所示。由

$$\sum M_E(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{A1}\frac{b}{2}+F\left(\frac{b}{2}-x\right)+F_{NB}\frac{b}{2}+F_{ND}\frac{b}{2}=0 \tag{a}$$

上式中 F_{ND} 与 F_{NB} 为未知量,必须先求得;为此再分别取整体及杆 2 为研究对象。

取整体,受力如图 3-17a 所示,由

$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{ND}\cdot b-Fx=0 \tag{b}$$

再取水平杆 2,受力如图 3-17c 所示,A 处不含销钉,其中 $\boldsymbol{F}_{Ax2}$ 与 $\boldsymbol{F}_{Ay2}$ 是销钉 A 对杆 2 的约束力。由

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{NB}b-Fx=0 \tag{c}$$

由式(b),(c)求得

$$F_{ND}=F_{NB}=\frac{Fx}{b}$$

代入式(a)求得

$$F_{A1}=-F$$

F_{A1} 为负 F 值,说明杆 1 受压,且与 x 无关。此题还可取其他研究对象求解,请读者自解。

§3-4 平面简单桁架的内力计算

工程中,房屋建筑、桥梁、起重机、电视塔等结构物常用桁架结构。

桁架是一种由杆件彼此在两端用铰链连接而成的结构,它在受力后几何形状不变。桁架中杆件的铰链接头称为节点。

桁架的优点是：杆件主要承受拉力或压力，可以充分发挥材料的作用，节约材料，减轻结构的重量。为了简化桁架的计算，工程实际中采用以下几个假设：

(1) 桁架的杆件都是直的；

(2) 杆件用光滑的铰链连接；

(3) 桁架所受的力（载荷）都作用在节点上，而且在桁架的平面内；

(4) 桁架杆件的重量略去不计，或平均分配在杆件两端的节点上。

这样的桁架，称为理想桁架。

实际的桁架，当然与上述假设有差别，如桁架的节点不是铰接的，杆件的中心线也不可能是绝对直的。但上述假设能够简化计算，而且所得的结果符合工程实际的需要。根据这些假设，桁架的杆件都看成为二力杆件。

本节只研究平面桁架中的静定桁架，如图 3－18 所示。此桁架是以三角形框架为基础，每增加一个节点需增加两根杆件，这样构成的桁架又称为平面简单桁架。容易证明，平面简单桁架是静定的。

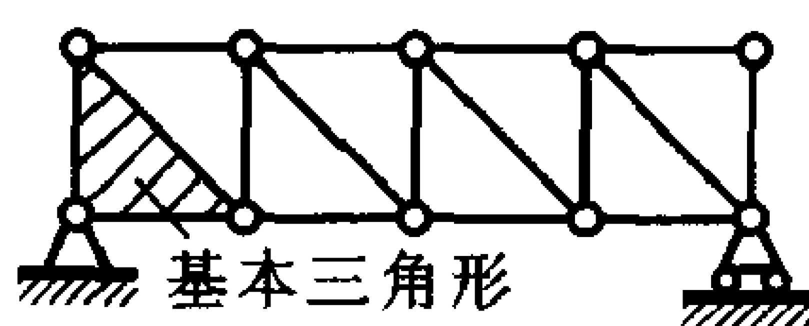


图 3－18

下面介绍两种计算桁架杆件内力的方法：**节点法**和**截面法**。

1．节点法

桁架的每个节点都受一个平面汇交力系的作用。为了求每个杆件的内力，可以逐个地取节点为研究对象，由已知力求出全部未知的杆件内力，这就是节点法。

例 3－10　平面桁架的尺寸和支座如图 3－19a 所示。在节点 D 处受一集中载荷 $F=10$ kN 的作用。试求桁架各杆件的内力。

解： (1) 求支座约束力

以桁架整体为研究对象，受力如图 3－19a 所示。列平衡方程：

$$\sum F_x=0,\quad F_{Bx}=0$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{By}\cdot 4\ \mathrm{m}-P\cdot 2\ \mathrm{m}=0$$

$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad P\cdot 2\ \mathrm{m}-F_{Ay}\cdot 4\ \mathrm{m}=0$$

解得

$$F_{Bx}=0,\quad F_{Ay}=F_{By}=5\ \mathrm{kN}$$

(2) 依次取一个节点为研究对象，计算各杆内力

假定各杆均受拉力，各节点受力如图 3－19b 所示，为计算方便，最好逐次列出只含两个未知力的节点的平衡方程。

先取节点 A，杆的内力 F_1 和 F_2 未知。列平衡方程：

$$\sum X=0,\quad F_2+F_1\cos 30^\circ=0$$

$$\sum Y=0,\quad F_{Ay}+F_1\sin 30^\circ=0$$

代入 F_{Ay} 的值后，解得

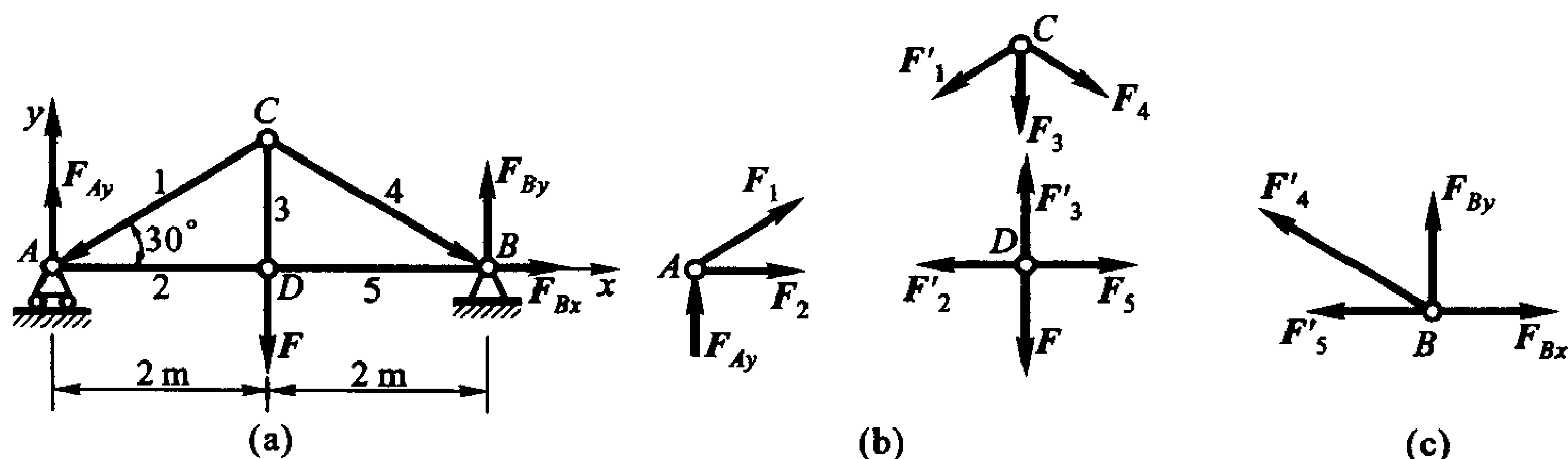


图 3－19

$$F_1 = -10\ \text{kN},\quad F_2 = 8.66\ \text{kN}$$

次取节点 C，杆的内力 F_3 和 F_4 未知。列平衡方程：

$$\sum F_x = 0,\quad F_4\cos 30° - F'_1\cos 30° = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad -F_3 - (F'_1 + F_4)\sin 30° = 0$$

代入 $F'_1 = F_1 = -10\text{kN}$，解得

$$F_4 = -10\ \text{kN},\quad F_3 = 10\ \text{kN}$$

再取节点 D，只有一个杆的内力 F_5 未知。列平衡方程：

$$\sum F_x = 0,\quad F_5 - F'_2 = 0$$

代入 $F'_2 = F_2$ 值后，得

$$F_5 = 8.66\ \text{kN}$$

(3) 判断各杆受拉力或受压力

原假定各杆均受拉力，计算结果 F_2, F_5, F_3 为正值，表明杆 2,5,3 确受拉力；内力 F_1 和 F_4 的结果为负值，表明杆 1 和 4 承受压力。

(4) 校核计算结果

解出各杆内力之后，可用尚余节点的平衡方程校核已得的结果。例如，对节点 B 列出平衡方程(图 3－19c)，将 $F'_4 = -10\ \text{kN}, F'_5 = 8.66\ \text{kN}$ 代入，若平衡方程

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$$

得到满足(用计算机解题时，看是否满足精度要求的微量。)，则计算正确。

2. 截面法

如只要求计算桁架内某几个杆件所受的内力，可以适当地选取一截面，假想地把桁架截开，再考虑其中任一部分的平衡，求出这些被截杆件的内力，这就是截面法。

例 3－11　如图 3－20a 所示平面桁架，各杆件的长度都等于 1 m。在节点 E, G, F 上分别作用载荷 $F_E = 10\ \text{kN}, F_G = 7\ \text{kN}, F_F = 5\ \text{kN}$。试计算杆 1,2 和 3 的内力。

解：　先求桁架的支座反力，以桁架整体为研究对象，受力如图 3－20a。列出平衡方程：

$$\sum F_x = 0,\quad F_{Ax} + F_F = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_{Ay} + F_{By} - F_E - F_G = 0$$

$$\sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_E\cdot 2\ \text{m} + F_G\cdot 1\ \text{m} - F_{Ay}\cdot 3\ \text{m} - F_F\sin 60°\cdot 1\ \text{m} = 0$$

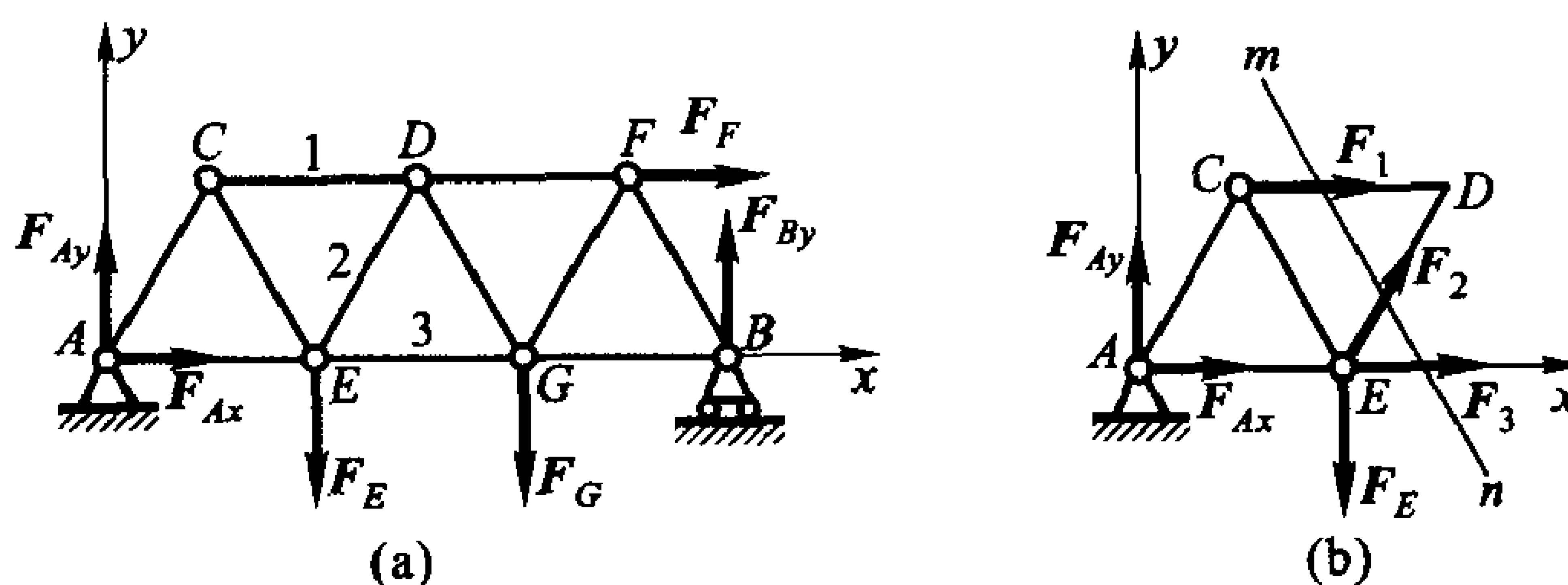


图 3-20

解得

$$F_{Ax}=-5\ \mathrm{kN},\quad F_{Ay}=7.557\ \mathrm{kN},\quad F_{By}=9.44\ \mathrm{kN}$$

为求杆 1,2 和 3 的内力,可作一截面 $m-n$ 将三杆截断。选取桁架左半部为研究对象。假定所截断的三杆都受拉力,受力如图 3-20b 所示,为一平面任意力系。列平衡方程:

$$\sum M_E(\boldsymbol{F})=0,\quad -F_1\sin 60^\circ\cdot 1\ \mathrm{m}-F_{Ay}\cdot 1\ \mathrm{m}=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}+F_2\sin 60^\circ-\boldsymbol{P}_1=0$$

$$\sum M_D(\boldsymbol{F})=0,\quad F_E\cdot\frac{1}{2}\ \mathrm{m}+F_3\cdot\sin 60^\circ\cdot 1\ \mathrm{m}-F_{Ay}\cdot 1.5\ \mathrm{m}+F_{Ax}\sin 60^\circ\cdot\ 1\ \mathrm{m}=0$$

解得

$$F_1=-8.726\ \mathrm{kN}(\text{压力}),\quad F_2=2.821\ \mathrm{kN}(\text{拉力}),\quad F_3=12.32\ \mathrm{kN}(\text{拉力})$$

如选取桁架的右半部为研究对象,可得同样的结果。

同样,可以用截面截断另外三根杆件,计算其他各杆的内力,或用以校核已求得的结果。

由上例可见,采用截面法时,选择适当的力矩方程,常可较快地求得某些指定杆件的内力。当然,应注意到,平面任意力系只有三个独立的平衡方程,因而,作截面时每次最好只截断三根内力未知的杆件。

小　　结

1. 力的平移定理:平移一力的同时必须附加一力偶,附加力偶的矩等于原来的力对新作用点的矩。

2. 平面任意力系向平面内任选一点 O 简化,一般情况下,可得一个力和一个力偶,这个力等于该力系的主矢,即

$$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=\sum_{i=1}^{n}F_x\boldsymbol{i}+\sum_{i=1}^{n}F_y\boldsymbol{j}$$

作用线通过简化中心 O。这个力偶的矩等于该力系对于点 O 的主矩,即

$$M_O=\sum_{i=1}^{n}M_O(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{i=1}^{n}(x_iF_{yi}-y_iF_{xi})$$

3. 平面任意力系向一点简化,可能出现的四种情况。

主矢	主矩	合成结果	说　　明
$F'_R \neq 0$	$M_O = 0$	合力	此力为原力系的合力，合力作用线通过简化中心
	$M_O \neq 0$	合力	合力作用线离简化中心的距离 $d = \frac{M_O}{F'_R}$
$F'_R = 0$	$M_O \neq 0$	合力偶	此力偶为原力系的合力偶，在这种情况下，主矩与简化中心的位置无关
	$M_O = 0$	平衡	

4. 平面任意力系平衡的必要和充分条件是：力系的主矢和对于任一点的主矩都等于零，即

$$F'_R = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = 0, \quad M_O = \sum_{i=1}^{n} M_O(\boldsymbol{F}_i) = 0$$

平面任意力系平衡方程的一般形式为

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_O(\boldsymbol{F}_i) = 0$$

二矩式为 $\sum_{i=1}^{n} M_A(\boldsymbol{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\boldsymbol{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0$

其中 x 轴不得垂直 A，B 两点连线；

三矩式为 $\sum_{i=1}^{n} M_A(\boldsymbol{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\boldsymbol{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_C(\boldsymbol{F}_i) = 0$

其中，A，B，C 三点不得共线。

5. 其他各种平面力系都是平面任意力系的特殊情形，它们的平衡方程如下：

力系名称	平衡方程	独立方程的数目
共线力系	$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = 0$	1
平面力偶系	$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0$	1
平面汇交力系	$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0$	2
平面平行力系	$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_O(\boldsymbol{F}_i) = 0$	2

6. 桁架由二力杆铰接构成。求平面静定桁架各杆内力的两种方法：

(1) 节点法：逐个考虑桁架中所有节点的平衡，应用平面汇交力系的平衡方程求出各杆的内力。

(2) 截面法：截断待求内力的杆件，将桁架截割为两部分，取其中的一部分为研究对象，应用平面任意力系的平衡方程求出被截割各杆件的内力。

思　考　题

3-1　某平面力系向 A,B 两点简化的主矩皆为零，此力系简化的最终结果可能是一个力吗？可能是一个力偶吗？可能平衡吗？

3-2　平面汇交力系向汇交点以外一点简化，其结果可能是一个力吗？可能是一个力偶吗？可能是一个力和一个力偶吗？

3-3　某平面力系向同平面内任一点简化的结果都相同，此力系简化的最终结果可能是什么？

3-4　用力系向一点简化的分析方法，证明图示二同向平行力简化的最终结果为一合力 $\boldsymbol{F}_R$（图 3-21）。且有

$$F_R=F_1+F_2,\quad \frac{F_1}{F_2}=\frac{CB}{AC}$$

若 $F_1>F_2$，且二者方向相反，简化结果又如何？

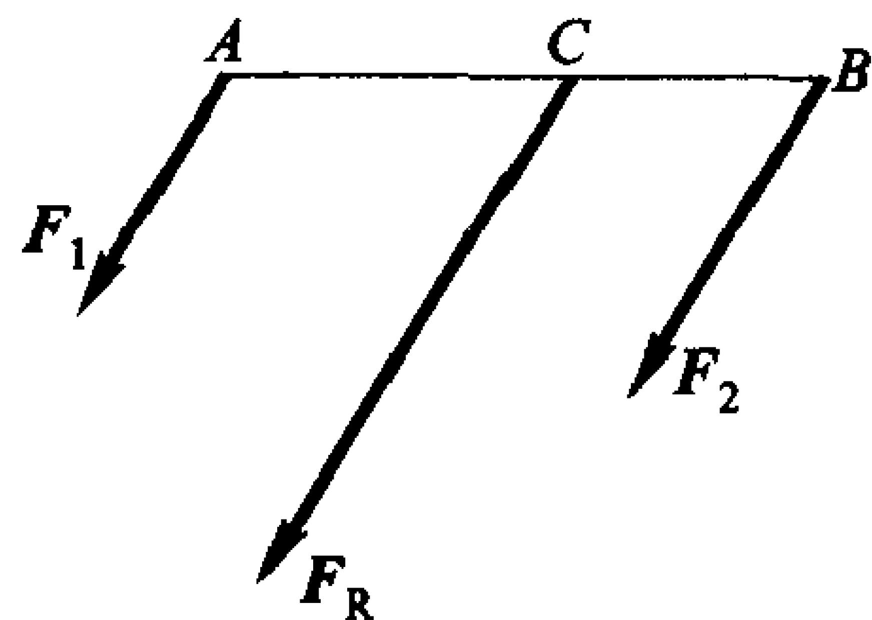


图 3-21

3-5　在刚体上 A,B,C 三点分别作用三个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$，各力的方向如图 3-22 所示，大小恰好与 $\triangle ABC$ 的边长成比例。问该力系是否平衡？为什么？

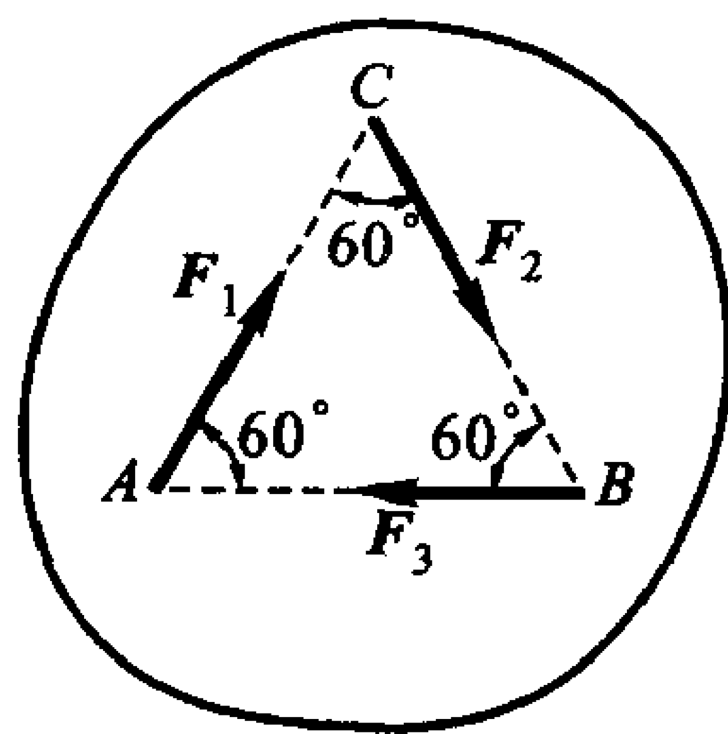


图 3-22

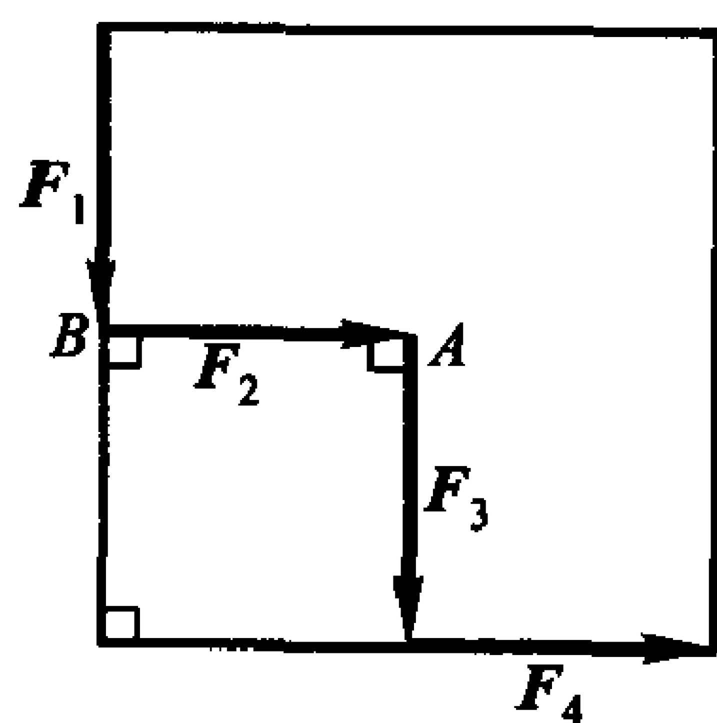


图 3-23

3-6　力系如图 3-23 所示。且 $F_1=F_2=F_3=F_4$。问力系向点 A 和 B 简化的结果是什么？二者是否等效？

3-7　平面汇交力系的平衡方程中，可否取两个力矩方程，或一个力矩方程和一个投影方程？这时，其矩心和投影轴的选择有什么限制？

3-8　你从哪些方面去理解平面任意力系只有 3 个独立的平衡方程？为什么说任何第四个方程只是前三个方程的线性组合？

3-9　图示三铰拱，在构件 CB 上分别作用一力偶 M（图 3-24a）或力 $\boldsymbol{F}$（图 3-24b）。

当求铰链 A,B,C 的约束力时,能否将力偶 M 或力 F 分别移到构件 AC 上?为什么?

3-10 怎样判断静定和超静定问题?图 3-25 所示的 6 种情形中哪些是静定问题,哪些是超静定问题?

3-11 能否直接找出图 3-26 所示桁架中内力为零的杆件?

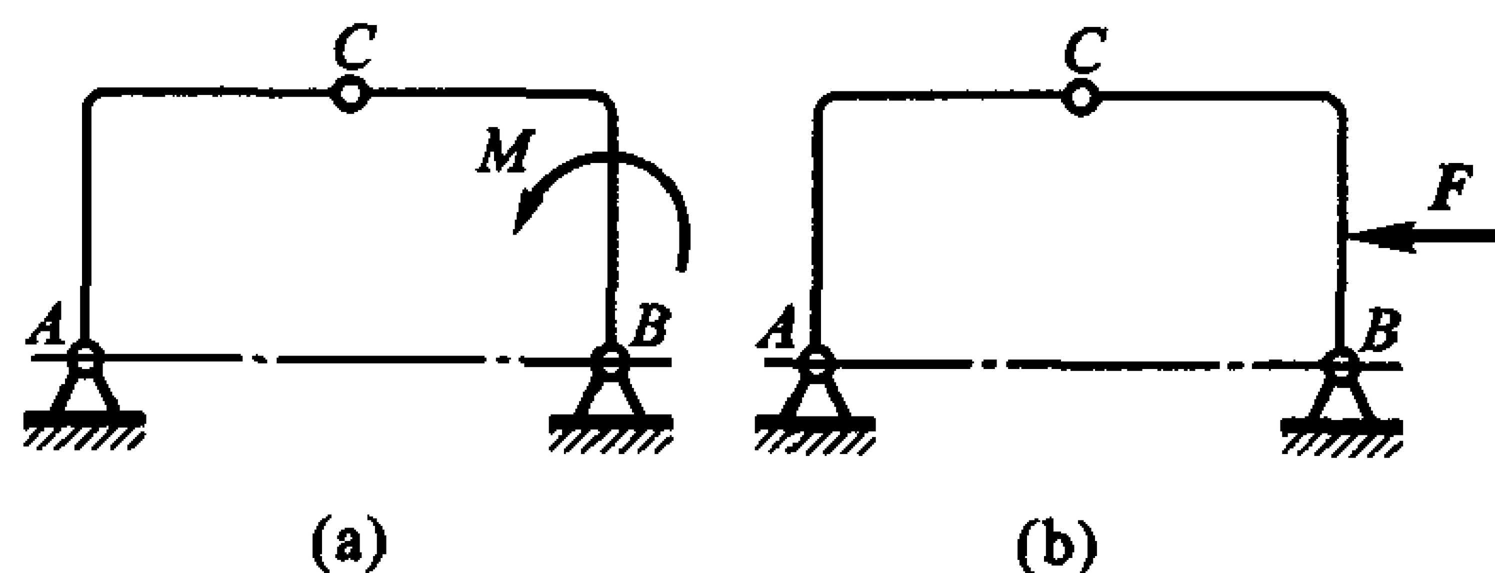


图 3-24

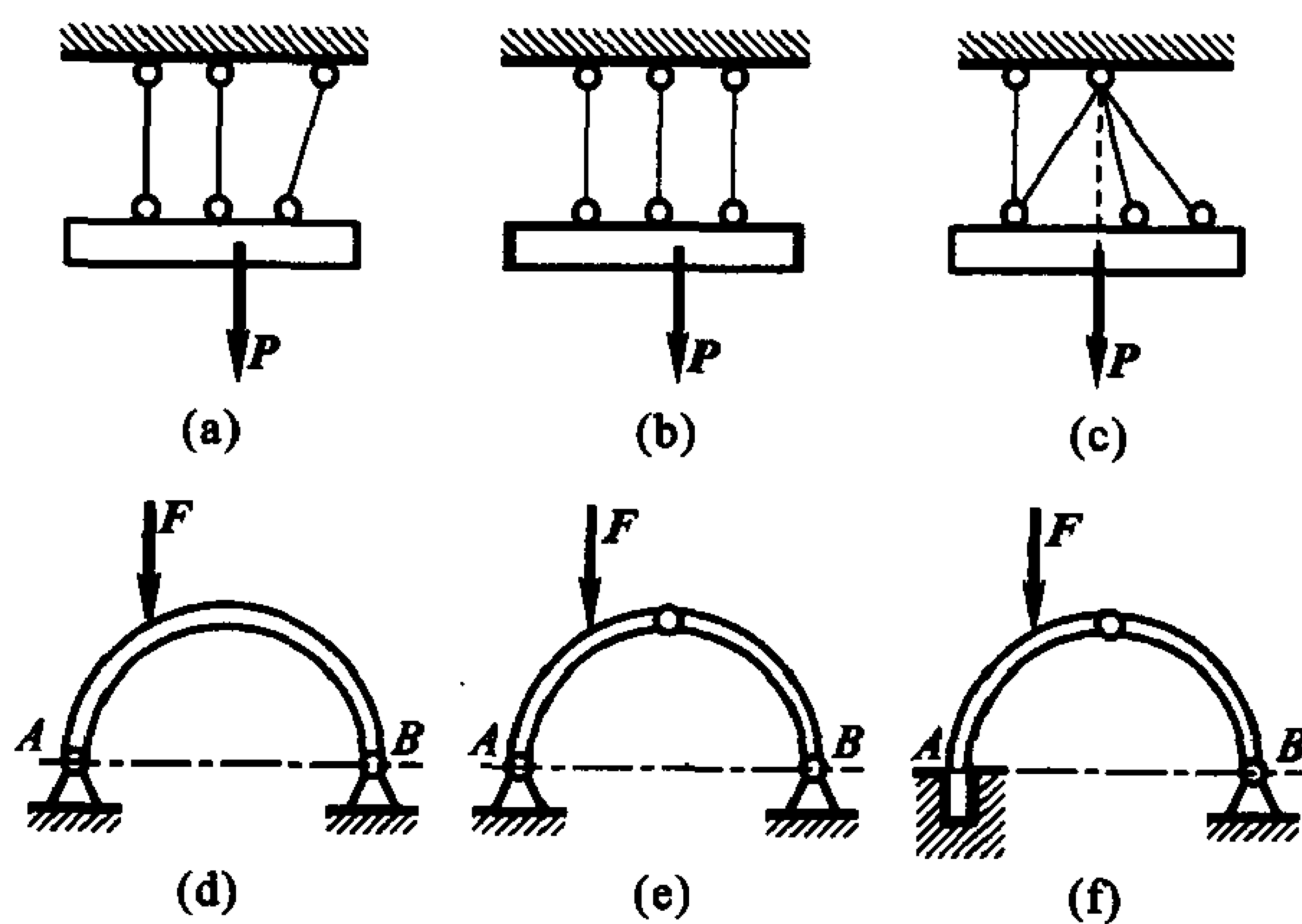


图 3-25

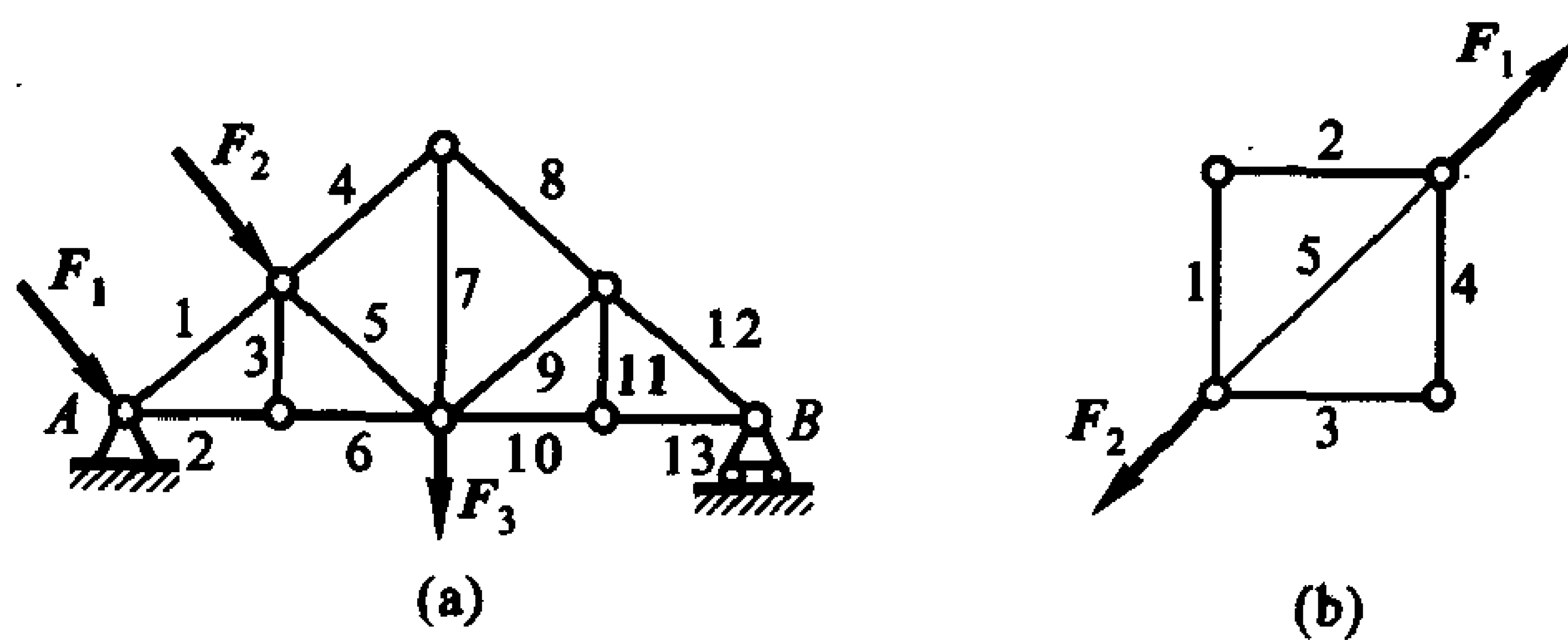
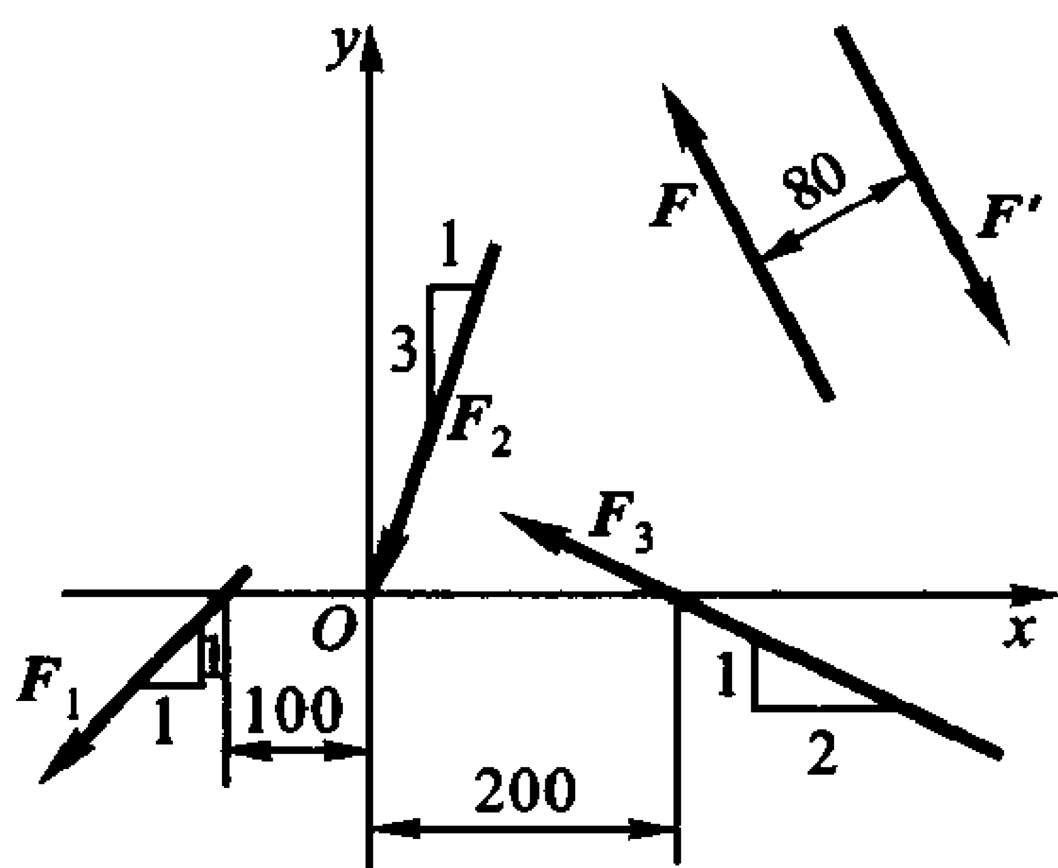


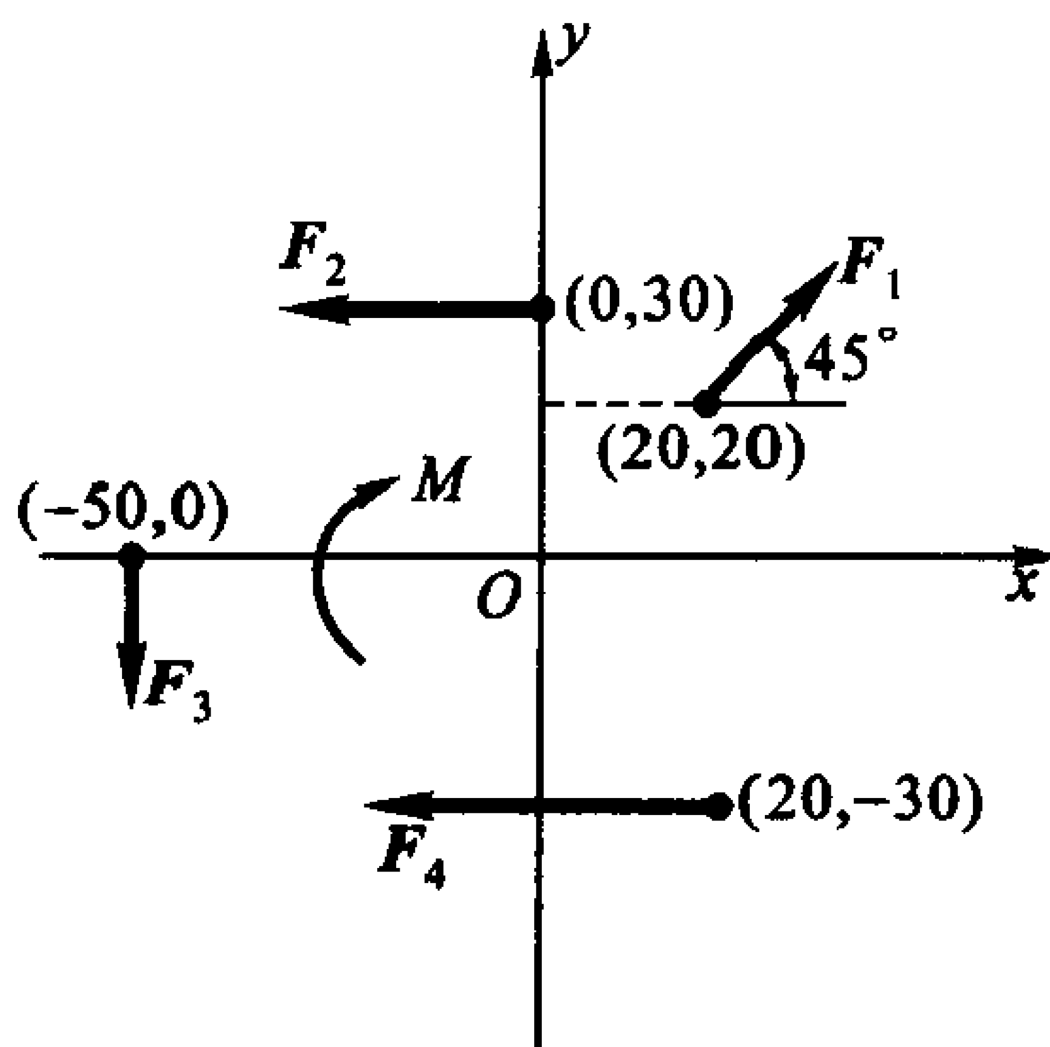
图 3-26

习　题

3-1　已知 $F_1=150$ N, $F_2=200$ N, $F_3=300$ N, $F=F'=200$ N。求力系向点 O 的简化结果,并求力系合力的大小及其与原点 O 的距离 d。



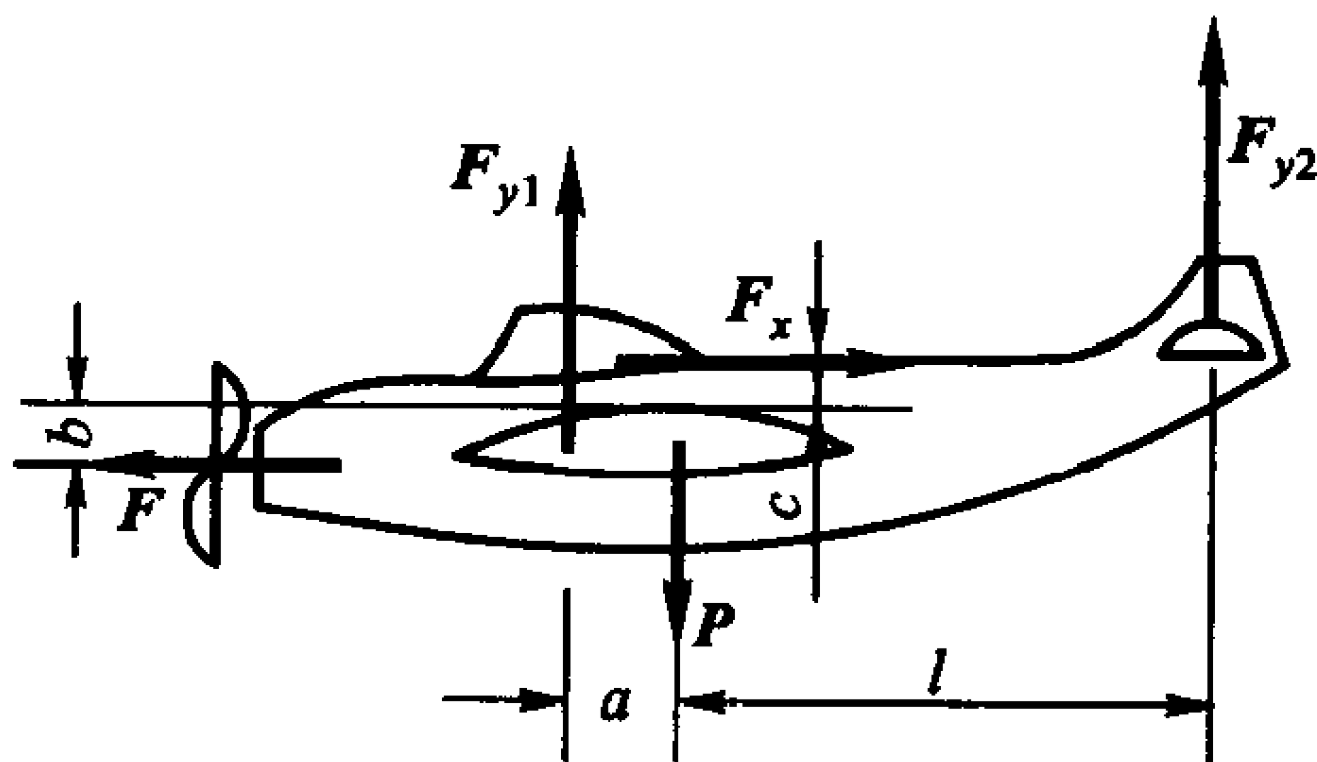
题 3-1 图



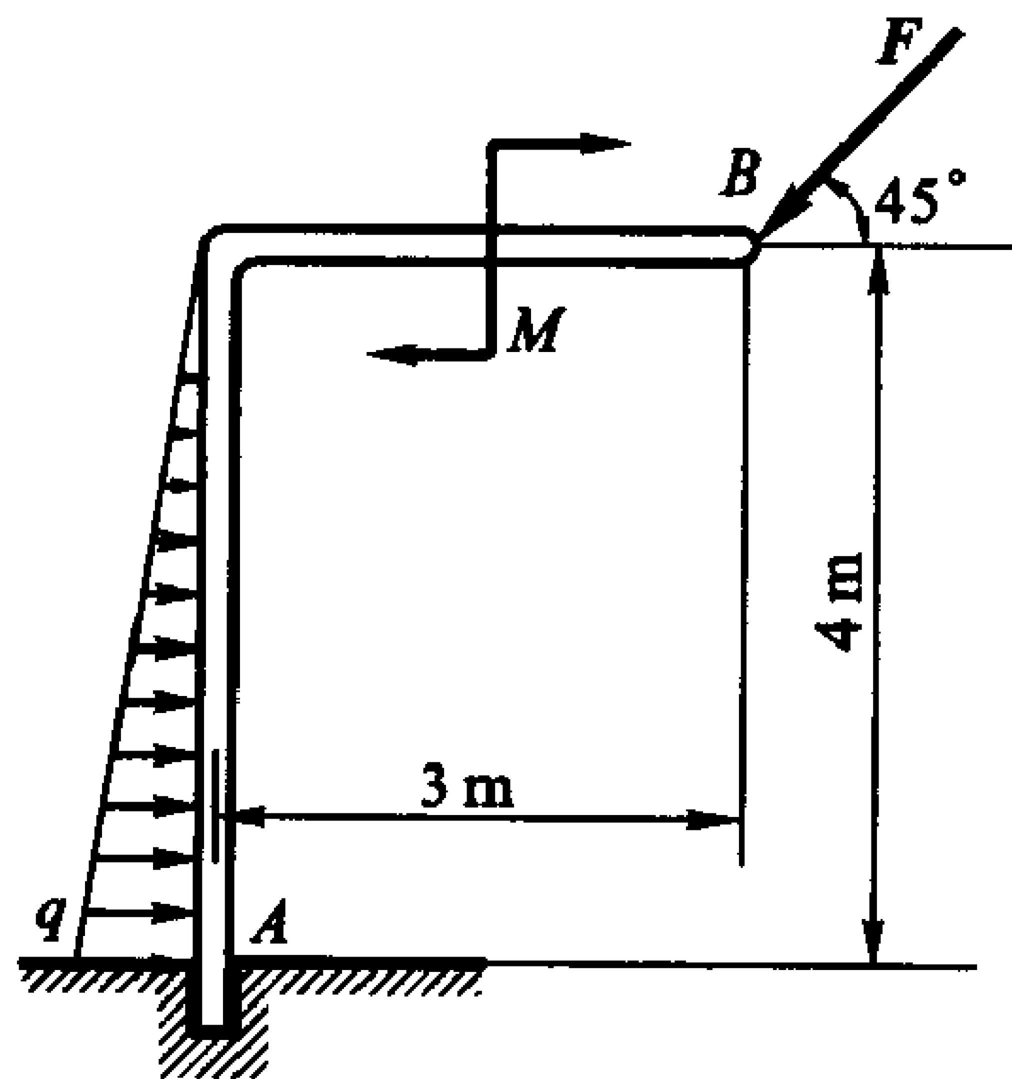
题 3-2 图

3-2　图示平面任意力系中 $F_1=40\sqrt{2}$ N, $F_2=80$ N, $F_3=40$ N, $F_4=110$ N, $M=2\ 000$ N·mm。各力作用位置如图所示①。求:(1) 力系向点 O 简化的结果;(2) 力系的合力的大小、方向及合力作用线方程。

3-3　如图所示,当飞机作稳定航行时,所有作用在它上面的力必须相互平衡。已知飞机的重量为 $P=30$ kN,螺旋桨的牵引力 $F=4$ kN。飞机的尺寸:$a=0.2$ m, $b=0.1$ m, $c=0.05$ m, $l=5$m。求阻力 $\boldsymbol{F}_x$、机翼升力 $\boldsymbol{F}_{y1}$ 和尾部的升力 $\boldsymbol{F}_{y2}$。



题 3-3 图



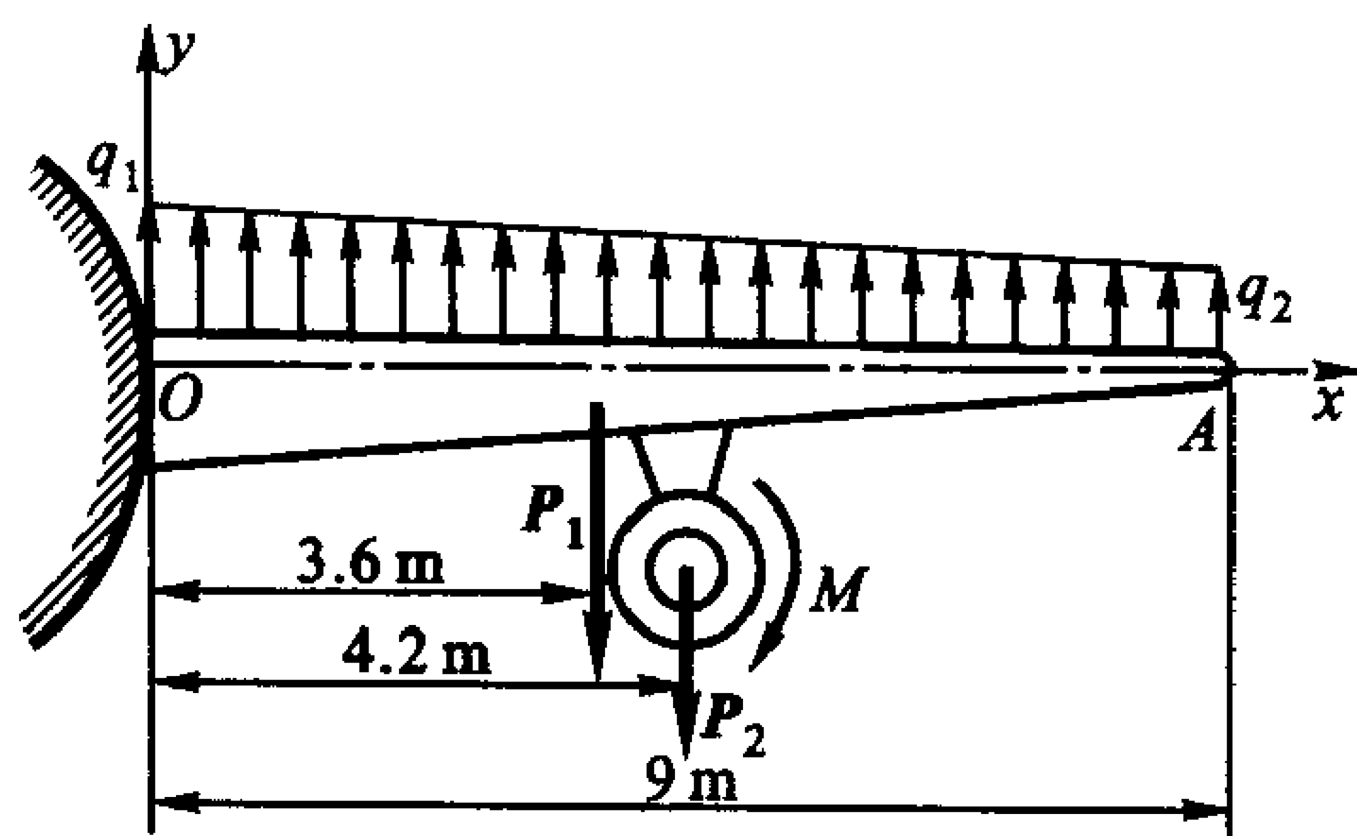
题 3-4 图

3-4　在图示刚架中,已知 $q=3$ kN/m, $F=6\sqrt{2}$ kN, $M=10$ kN·m,不计刚架自重。求

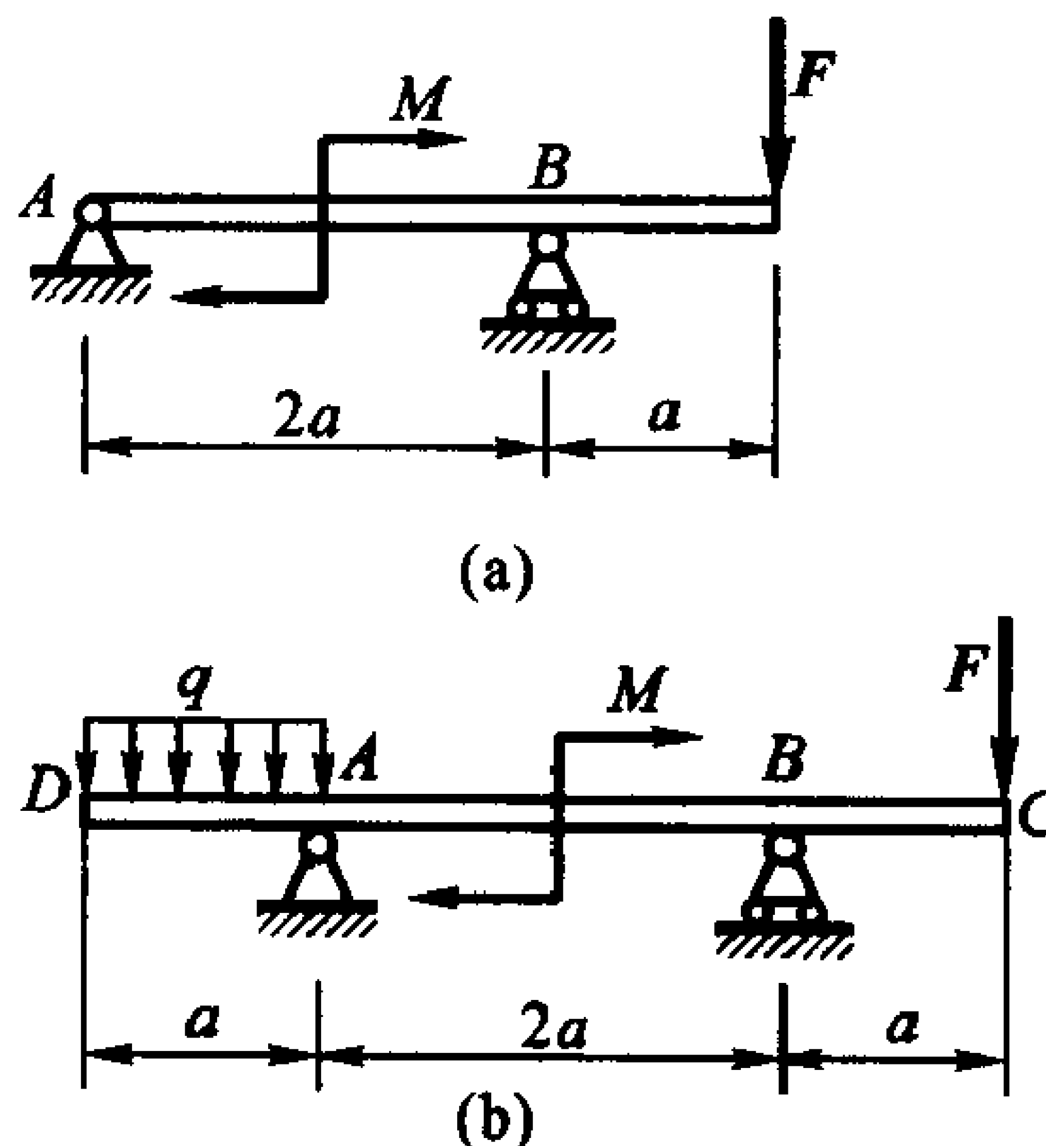
① 本书各图中按有关机械制图尺寸注法规定,尺寸单位为 mm 时,不需标注其单位 mm。

固定端 A 处的约束力。

3-5　如图所示，飞机机翼上安装一台发动机，作用在机翼 OA 上的气动力按梯形分布：$q_1=60\ \mathrm{kN/m}$，$q_2=40\ \mathrm{kN/m}$，机翼重 $P_1=45\ \mathrm{kN}$，发动机重 $P_2=20\ \mathrm{kN}$，发动机螺旋桨的反作用力偶矩 $M=18\ \mathrm{kN\cdot m}$。求机翼处于平衡状态时，机翼根部固定端 O 所受的力。



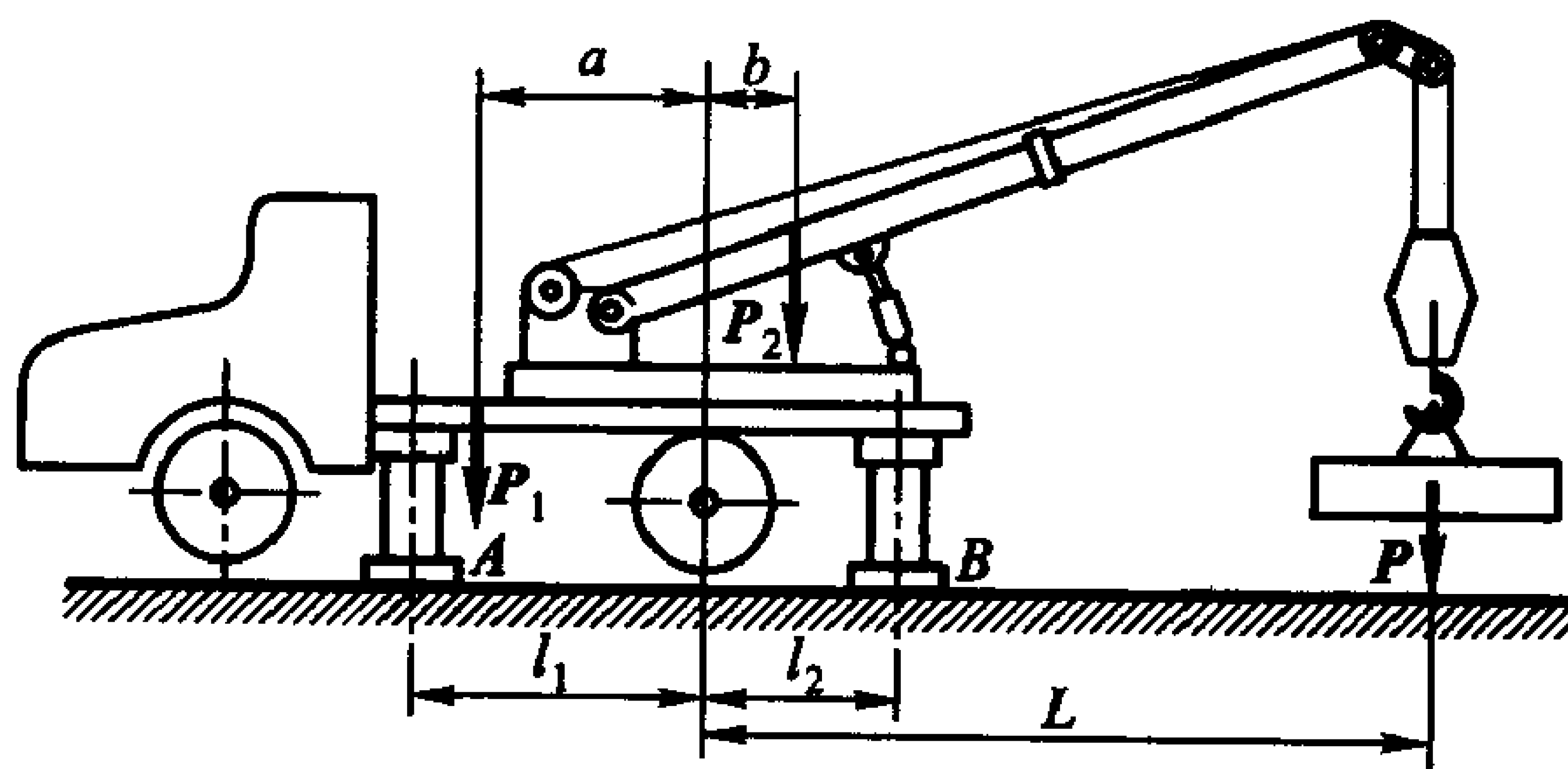
题 3-5 图



题 3-6 图

3-6　无重水平梁的支承和载荷如图 a，b 所示。已知力 F、力偶矩为 M 的力偶和强度为 q 的均布载荷。求支座 A 和 B 处的约束力。

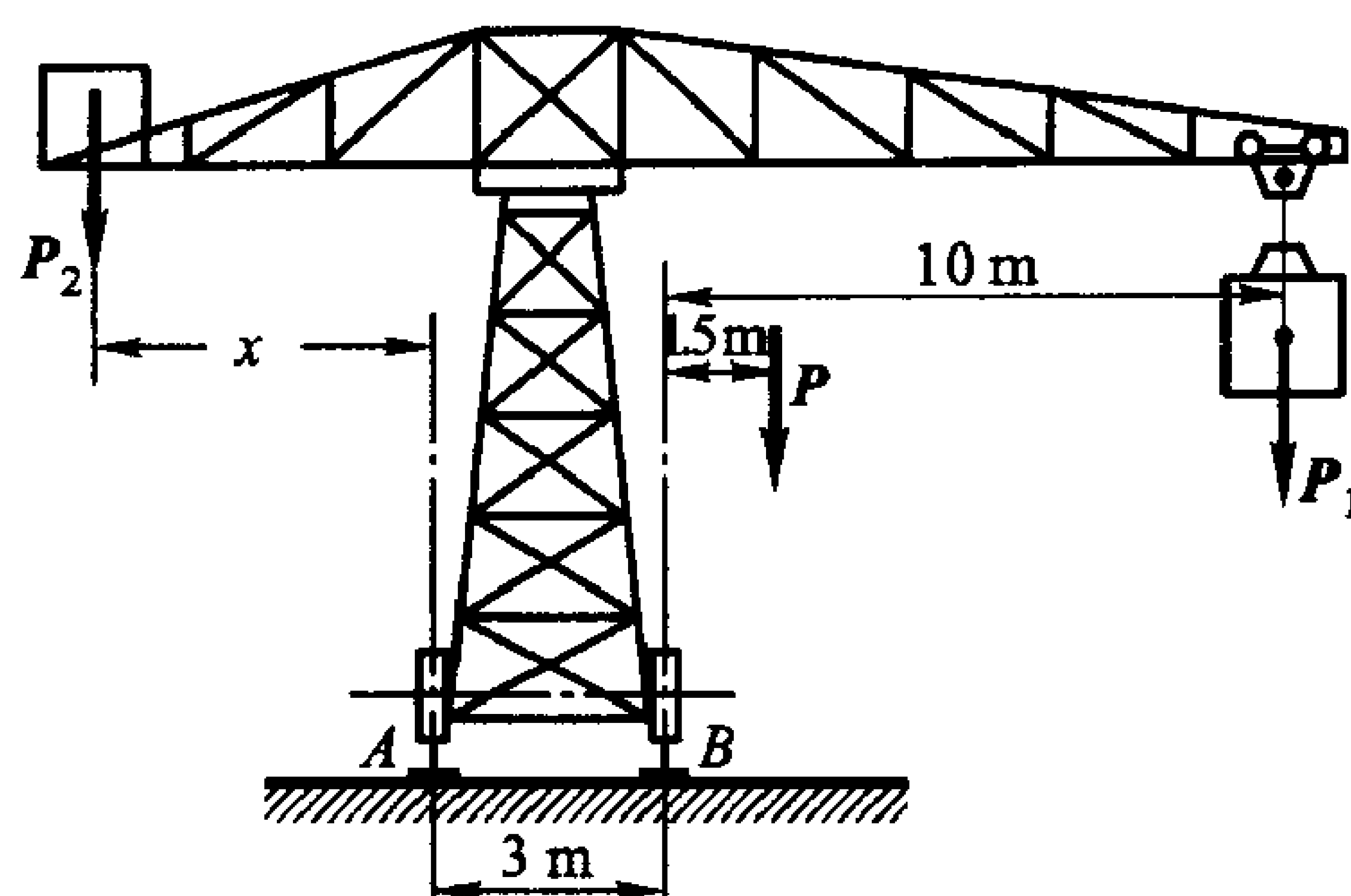
3-7　如图所示，液压式汽车起重机全部固定部分（包括汽车自重）总重 $P_1=60\ \mathrm{kN}$，旋转部分总重 $P_2=20\ \mathrm{kN}$，$a=1.4\ \mathrm{m}$，$b=0.4\ \mathrm{m}$，$l_1=1.85\ \mathrm{m}$，$l_2=1.4\ \mathrm{m}$。求：(a) 当 $R=3\ \mathrm{m}$，起吊重量 $P=50\ \mathrm{kN}$ 时，支撑腿 A，B 所受地面的支承反力；(b) 当 $R=5\ \mathrm{m}$ 时，为了保证起重机不致翻倒，问最大起重量为多大？



题 3-7 图

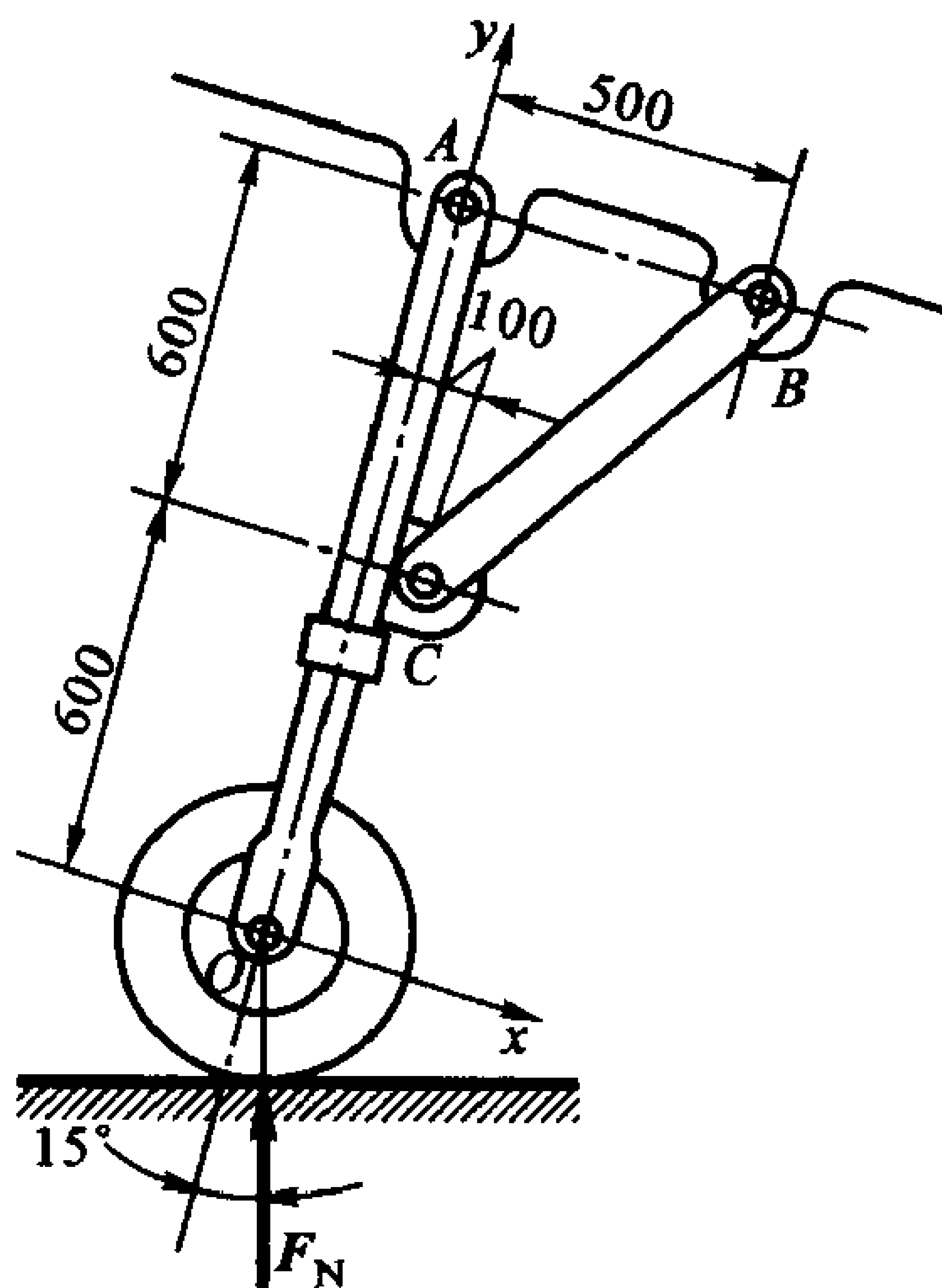
3-8　如图所示，行动式起重机不计平衡锤的重为 $P=500\ \mathrm{kN}$，其重心在离右轨 1.5 m 处。起重机的起重量为 $P_1=250\ \mathrm{kN}$，突臂伸出离右轨 10 m。跑车本身重量略去不计，欲使跑车满载或空载时起重机均不致翻倒，求平衡锤的最小重量 P_2 以及平衡锤到左轨的最大距离 x。

3-9　飞机起落架，尺寸如图所示。A，B，C 均为铰链，杆 OA 垂直于 A，B 连线。当飞

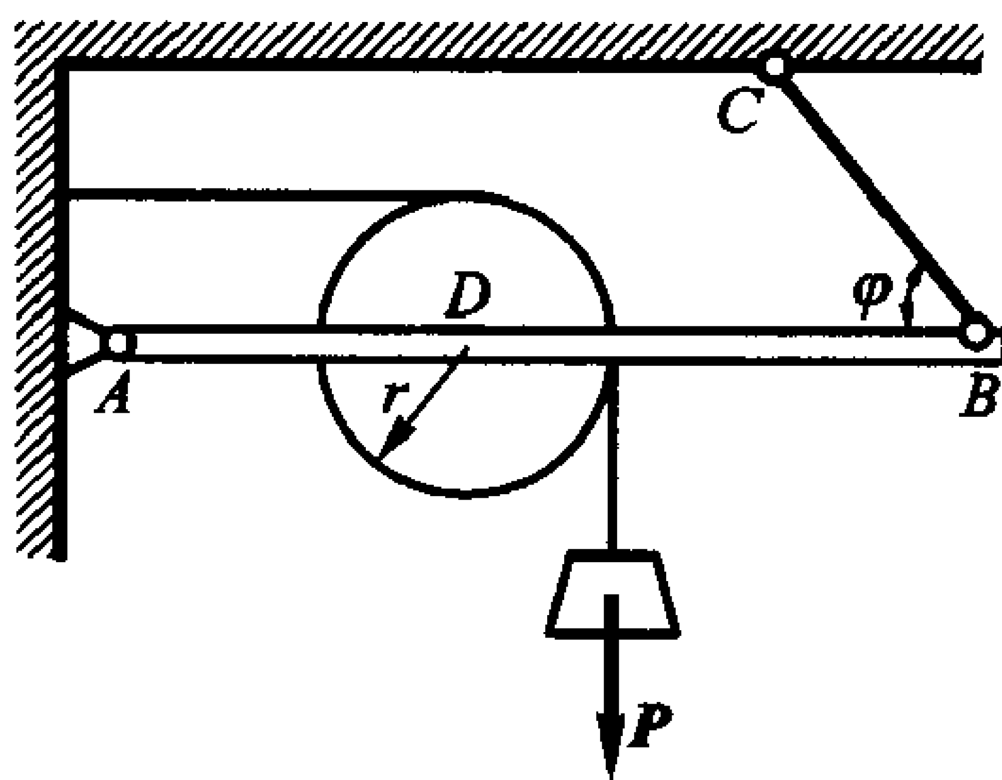


题 3-8 图

机等速直线滑行时，地面作用于轮上的铅直正压力 $F_N = 30$ kN，水平摩擦力和各杆自重都比较小，可略去不计。求 A，B 两处的约束力。



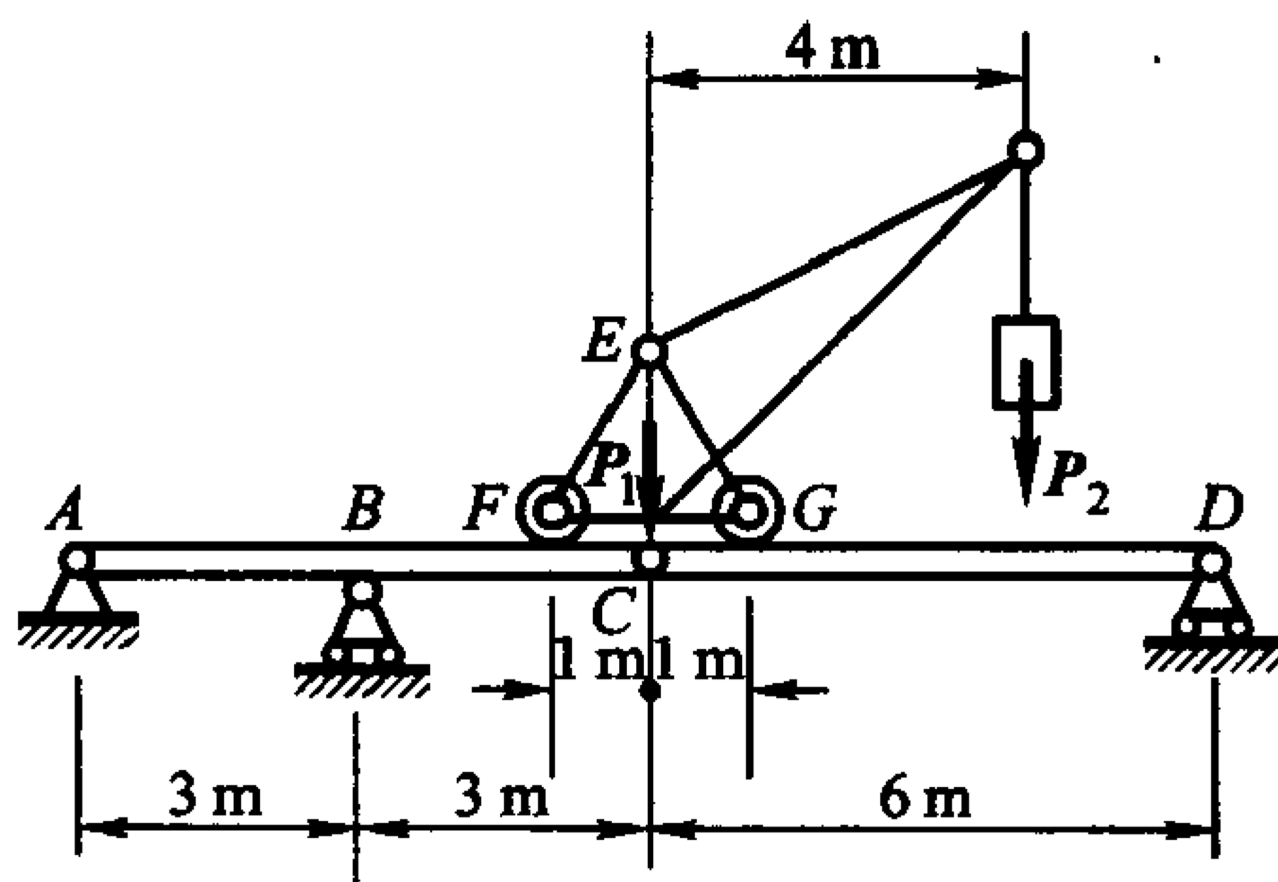
题 3-9 图



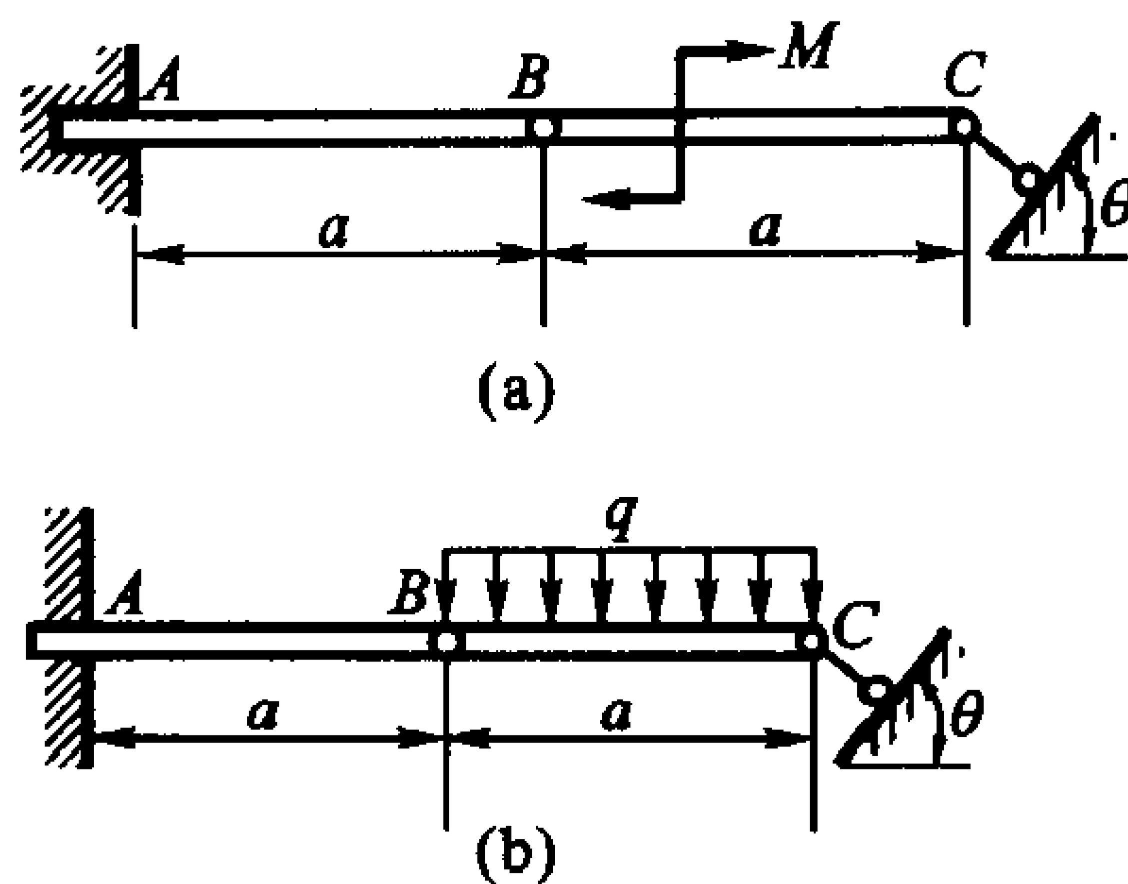
题 3-10 图

3-10　水平梁 AB 由铰链 A 和杆 BC 所支持，如图所示。在梁上 D 处用销子安装半径为 $r = 0.1$ m 的滑轮。有一跨过滑轮的绳子，其一端水平地系于墙上，另一端悬挂有重 $P = 1\,800$ N的重物。如 $AD = 0.2$ m，$BD = 0.4$ m，$\varphi = 45°$，且不计梁、杆、滑轮和绳的重量。求铰链 A 和杆 BC 对梁的约束力。

3-11　如图所示，组合梁由 AC 和 DC 两段铰接构成，起重机放在梁上。已知起重机重 $P_1 = 50$ kN，重心在铅直线 EC 上，起重载荷 $P_2 = 10$ kN。如不计梁重，求支座 A，B 和 D 三处的约束力。



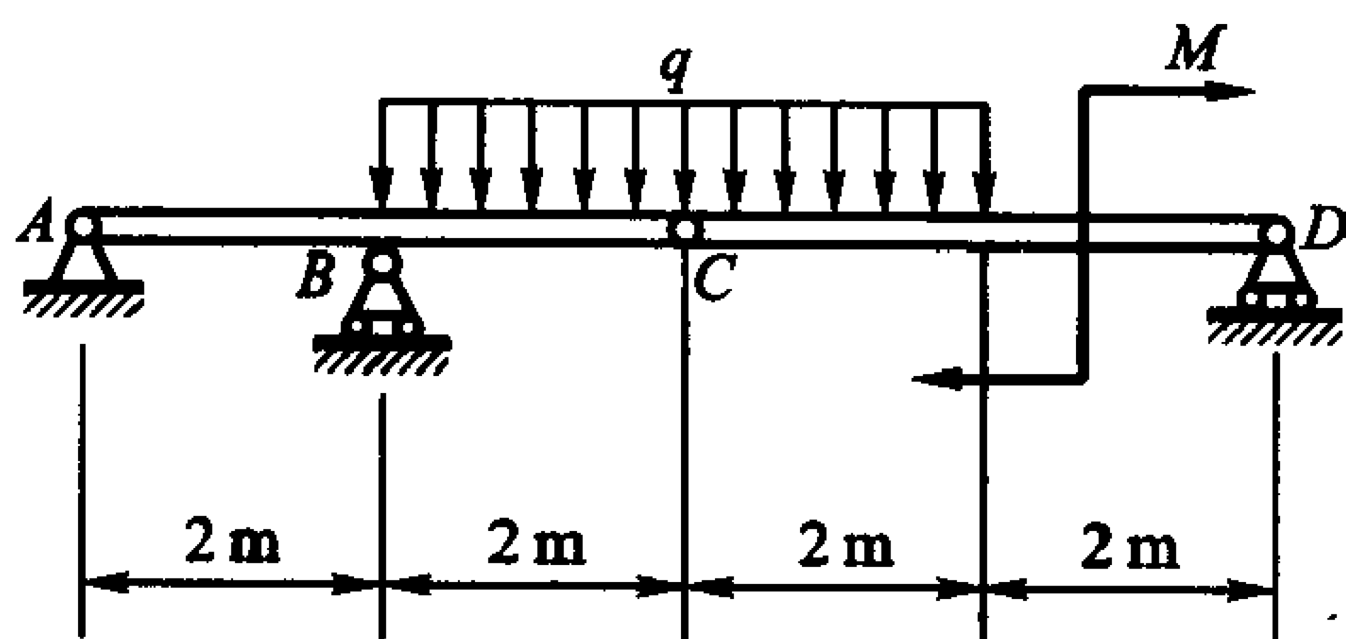
题 3－11 图



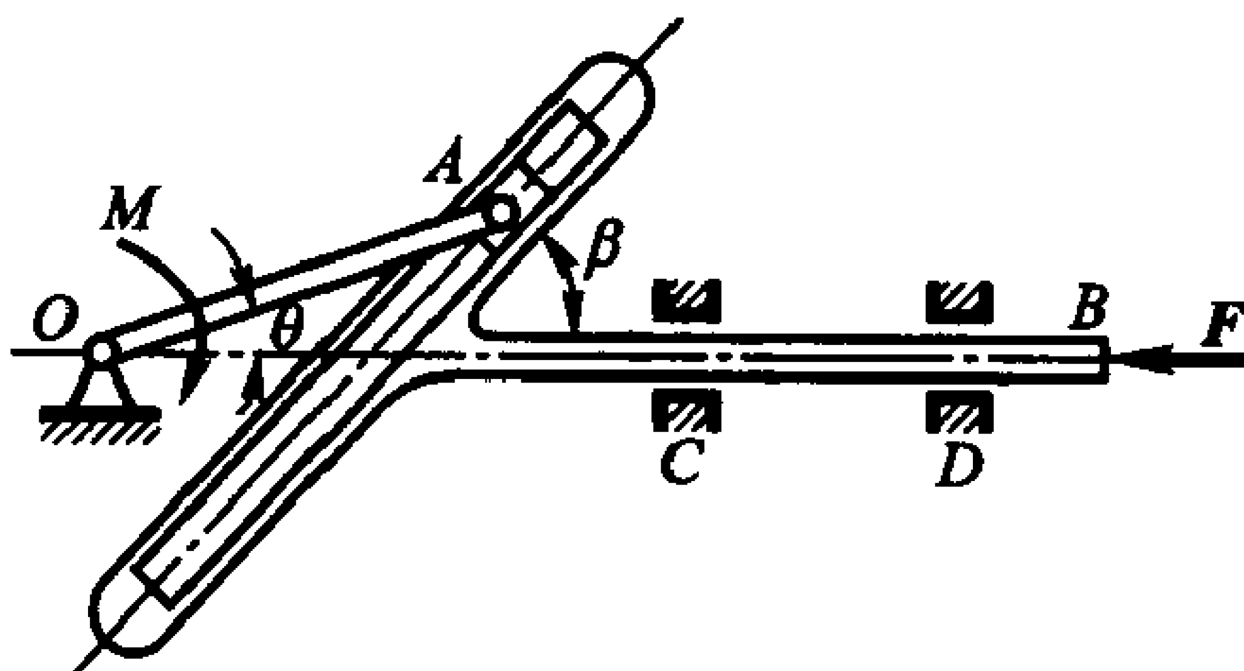
题 3－12 图

3－12 在图示 a,b 两连续梁中,已知 q,M,a 及 θ,不计梁的自重,求各连续梁在 A,B, C 三处的约束力。

3－13 由 AC 和 CD 构成的组合梁通过铰链 C 连接。它的支承和受力如图所示。已知均布载荷强度 $q=10$ kN/m,力偶矩 $M=40$ kN·m,不计梁重。求支座 A,B,D 的约束力和铰链 C 处所受的力。



题 3－13 图



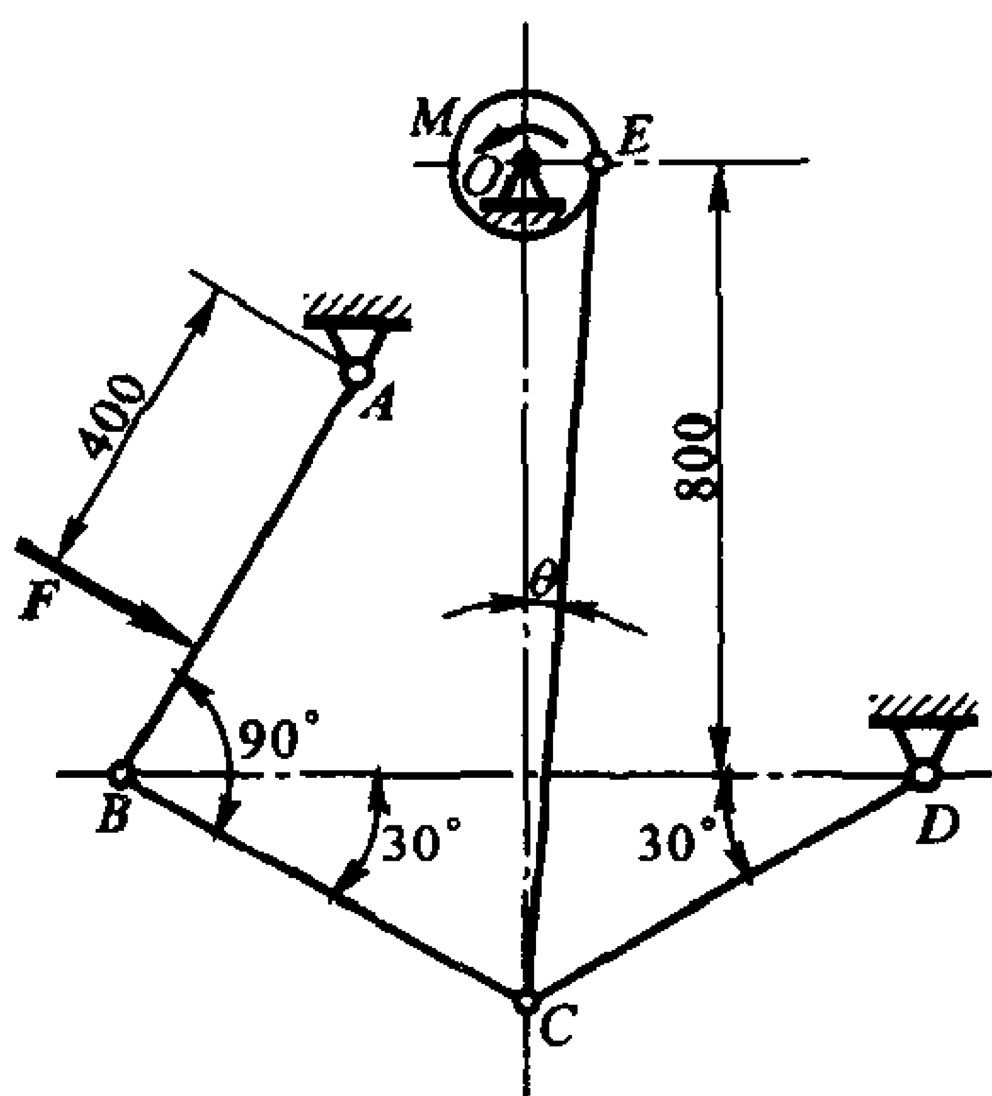
题 3－14 图

3－14 图示一滑道连杆机构,在滑道连杆上作用着水平力 $\boldsymbol{F}$。已知 $OA=r$,滑道倾角为 β,机构重量和各处摩擦均不计。试求当机构平衡时,作用在曲柄 OA 上的力偶矩 M 与角 θ 之间的关系。

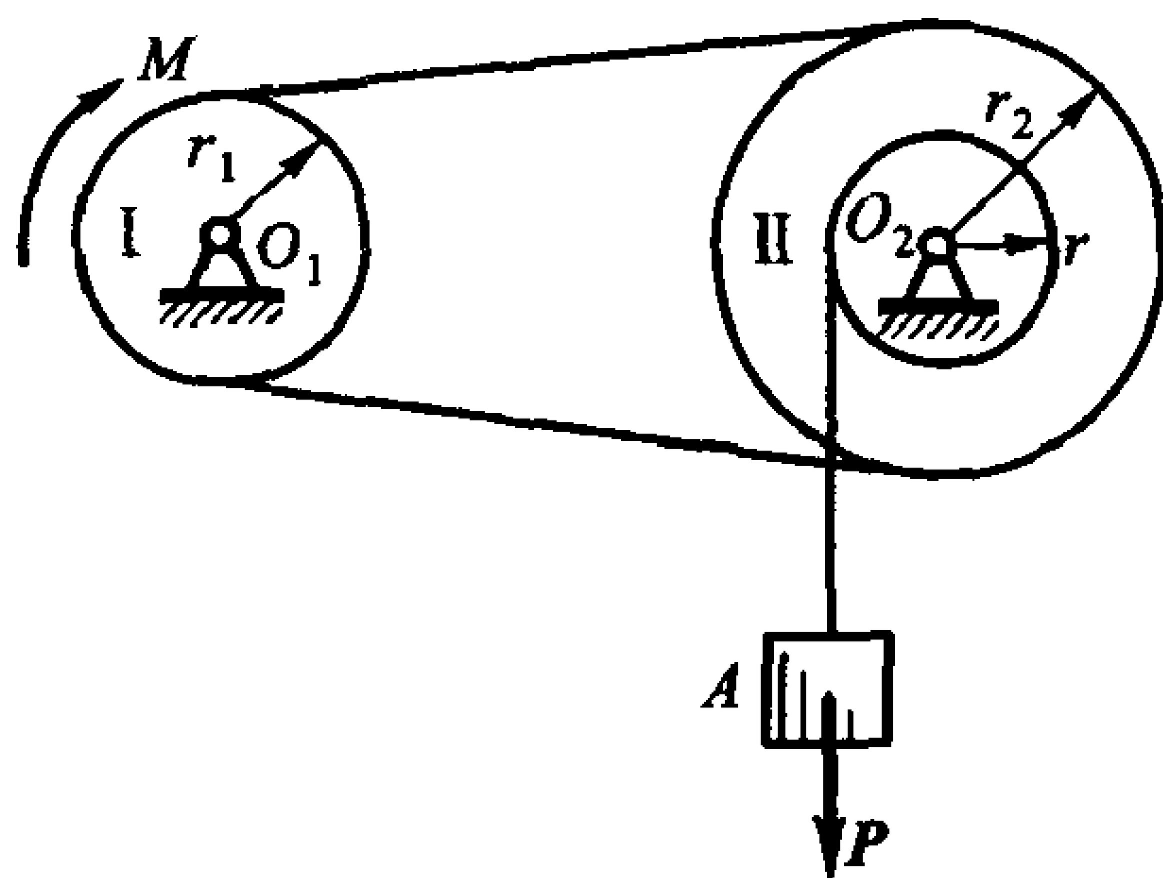
3－15 如图所示,轧碎机的活动颚板 AB 长 600 mm。设机构工作时石块施于板的垂直力 $F=1000$ N。又 $BC=CD=600$ mm, $OE=100$ mm。略去各杆的重量,试根据平衡条件计算在图示位置时电机作用力偶矩 M 的大小。

3－16 图示传动机构,已知带轮Ⅰ,Ⅱ的半径各为 r_1,r_2,鼓轮半径为 r,物体 A 重为 $\boldsymbol{P}$,两轮的重心均位于转轴上。求匀速提升 A 物时在Ⅰ轮上所需施加的力偶矩 M 的大小。

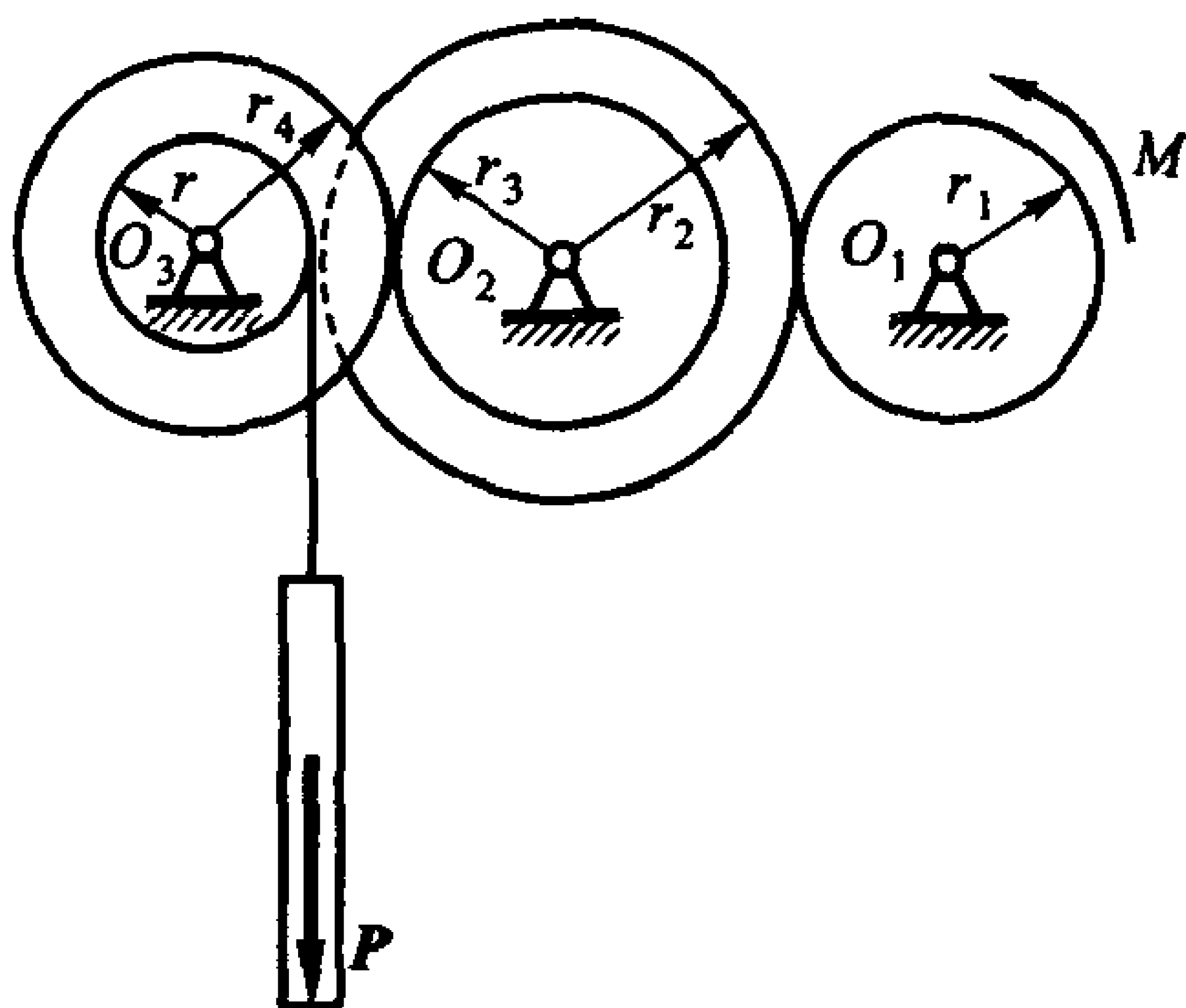
3－17 图示为一种闸门启闭设备的传动系统。已知各齿轮的半径分别为 r_1,r_2,r_3, r_4,鼓轮的半径为 r,闸门重 $\boldsymbol{P}$,齿轮的压力角为 θ,不计各齿轮的自重。求最小的启门力偶矩 M 及轴 O_3 的约束力。



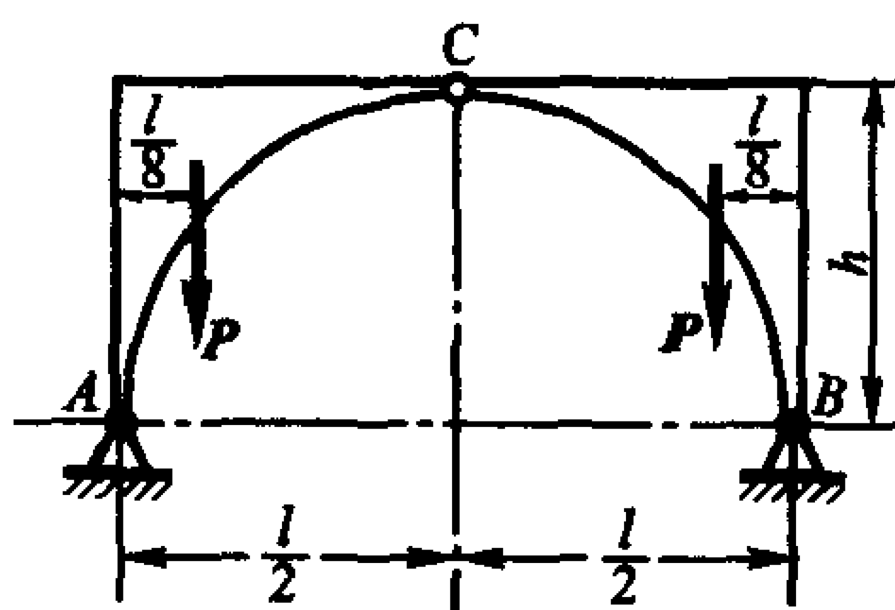
题 3－15 图



题 3－16 图



题 3－17 图



题 3－18 图

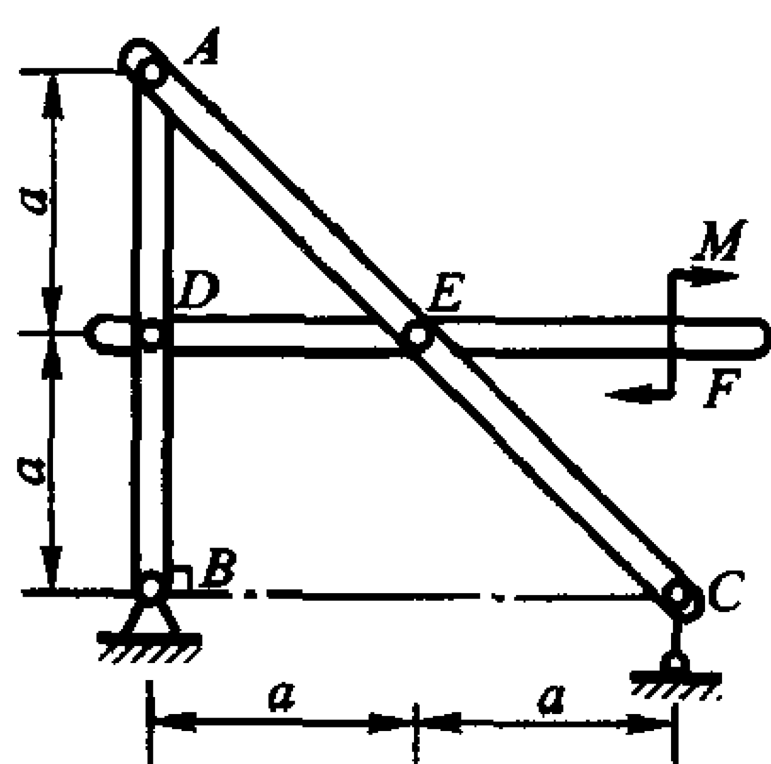
3－18　如图所示，三铰拱由两半拱和三个铰链 A,B,C 构成，已知每半拱重 $P=300$ kN，$l=32$ m，$h=10$ m。求支座 A,B 的约束力。

3－19　构架由杆 AB,AC 和 DF 铰接而成，如图所示，在杆 DEF 上作用一力偶矩为 M 的力偶，不计各杆的重量。求杆 AB 上铰链 A,D 和 B 所受的力。

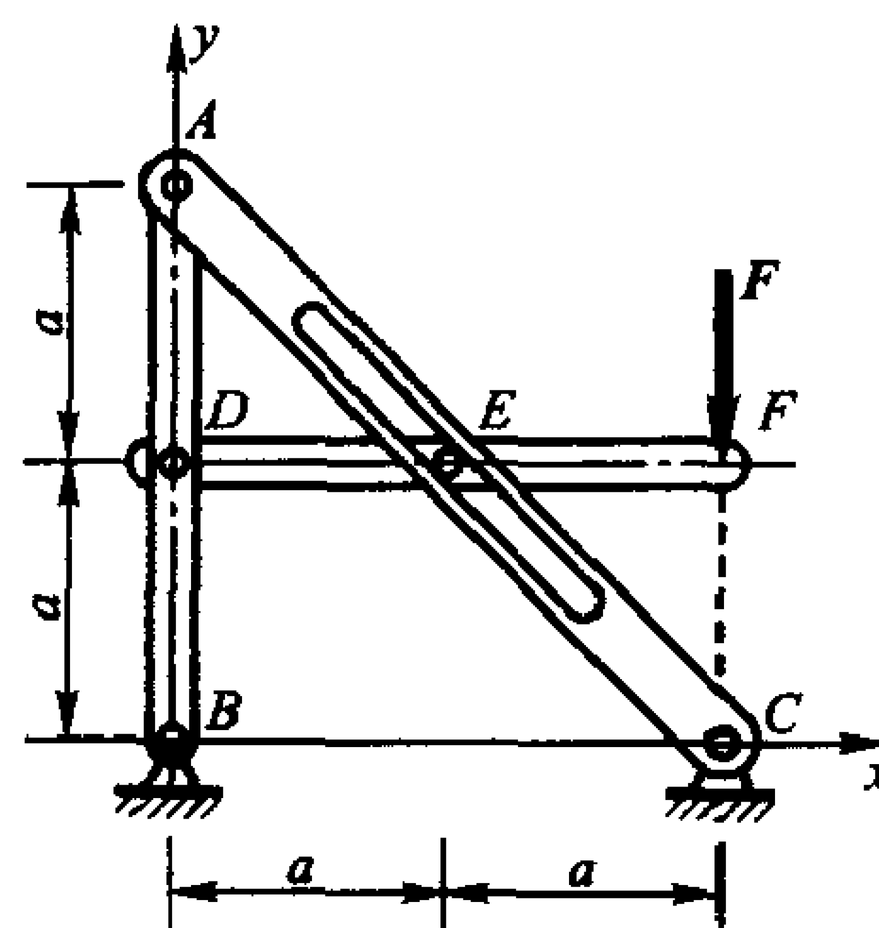
3－20　构架由杆 AB,AC 和 DF 组成，如图所示。杆 DF 上的销子 E 可在杆 AC 的光滑槽内滑动，不计各杆的重量，在水平杆 DF 的一端作用铅直力 $\boldsymbol{F}$。求铅直杆 AB 上铰链 A,D 和 B 所受的力。

3－21　图示构架中，物体重 1 200 N，由细绳跨过滑轮 E 而水平系于墙上，尺寸如图，不计杆和滑轮的重量。求支承 A 和 B 处的约束力，以及杆 BC 的内力 F_{BC}。

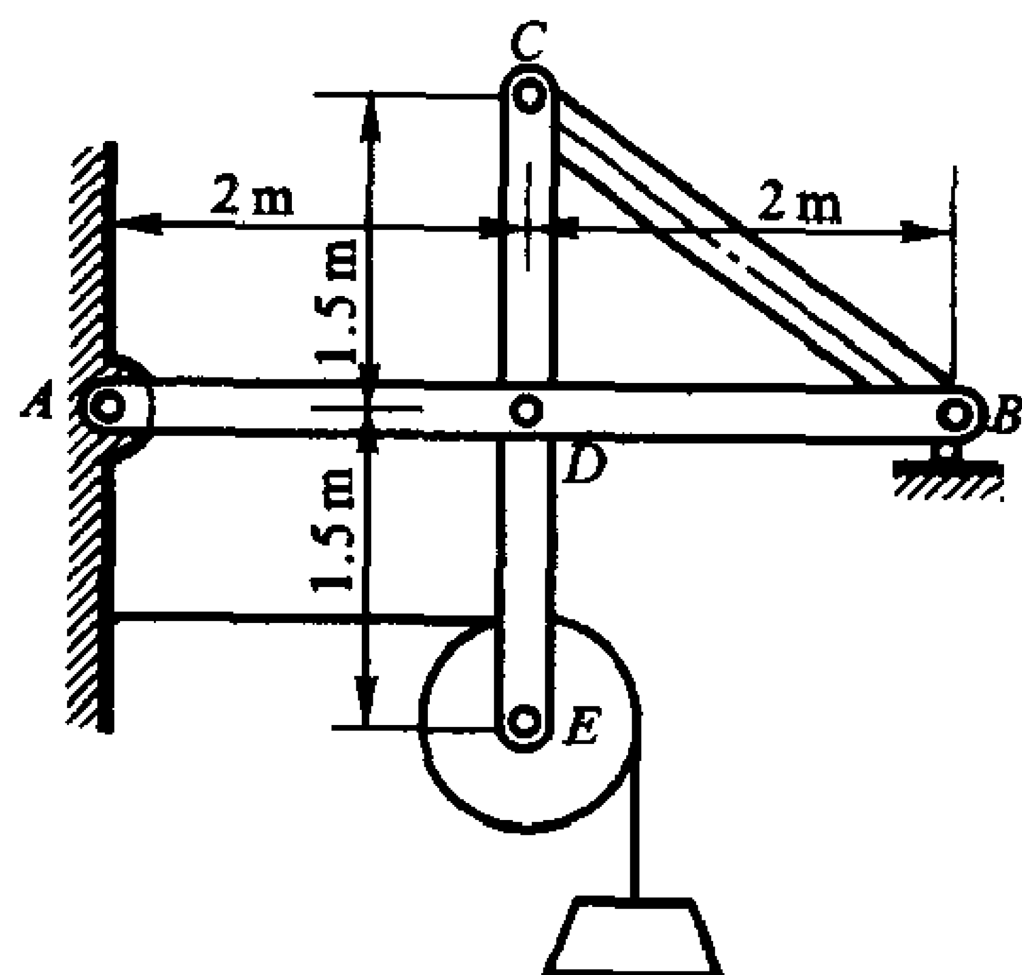
3－22　如图所示两等长杆 AB 与 BC 在点 B 用铰链连接，又在杆的 D,E 两点连一弹簧。弹簧的刚度系数为 k，当距离 AC 等于 a 时，弹簧内拉力为零。点 C 作用一水平力 $\boldsymbol{F}$，设 $AB=l$，$BD=b$，杆重不计。求系统平衡时距离 AC 之值。



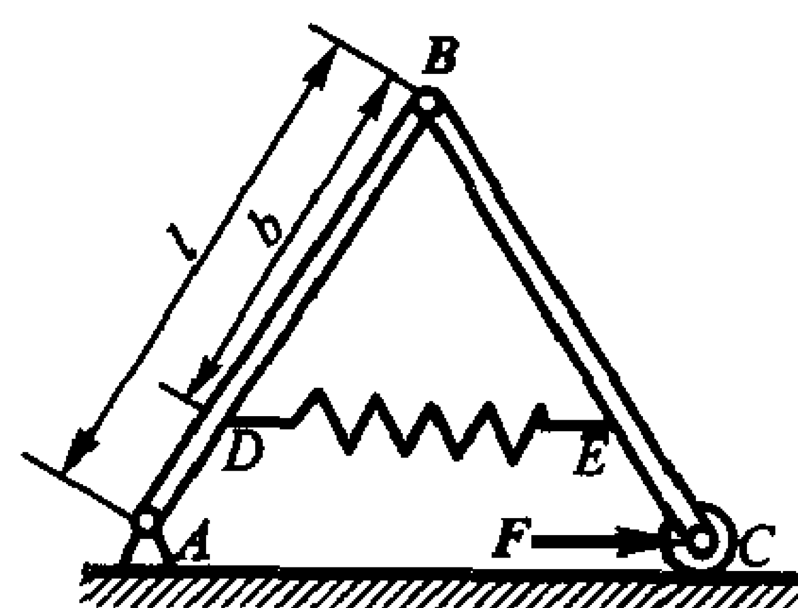
题 3-19 图



题 3-20 图

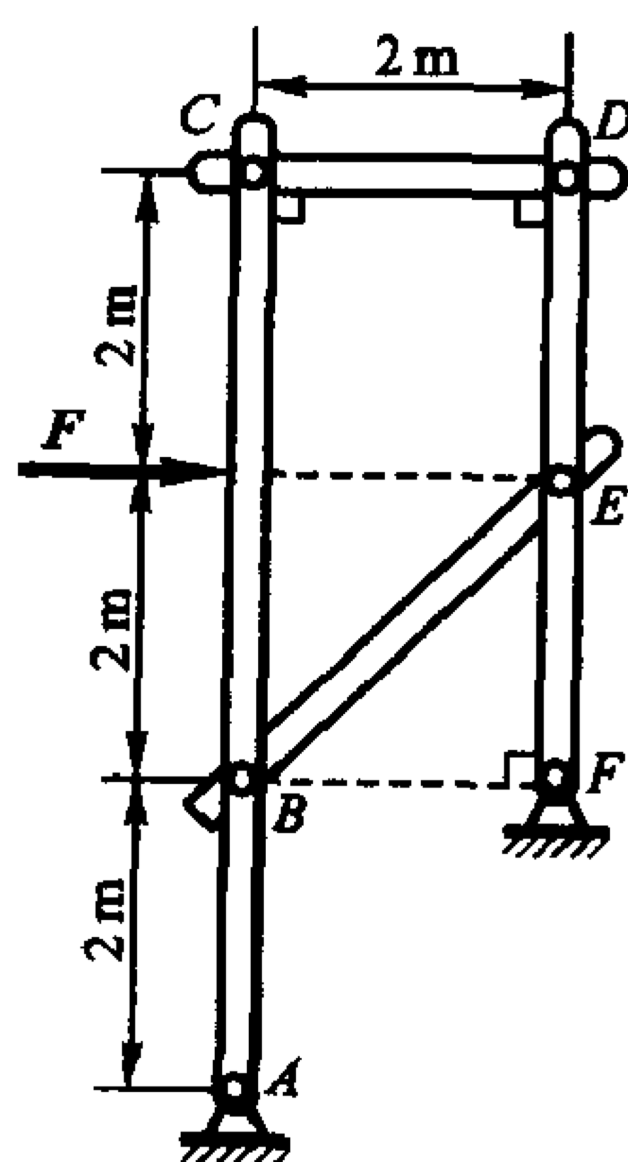


题 3-21 图

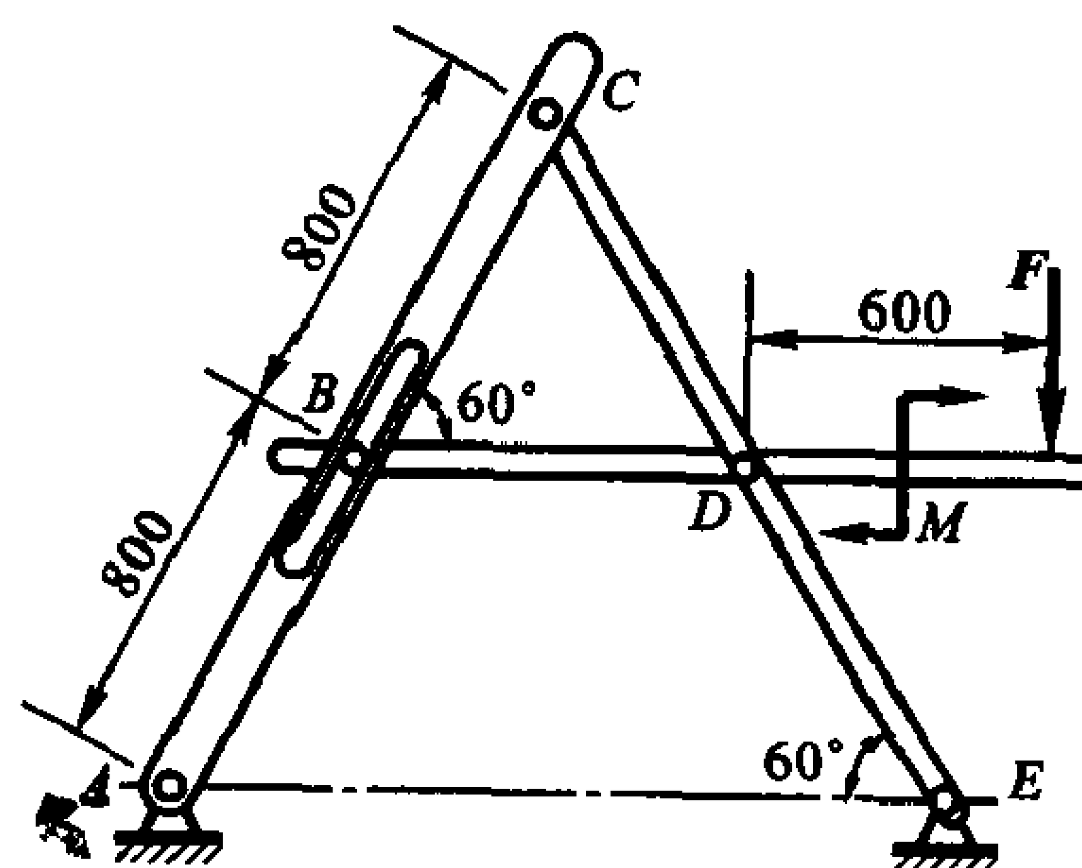


题 3-22 图

3-23 不计图示构架中各杆件重量，力 $F = 40\ \mathrm{kN}$，各尺寸如图。求铰链 A,B,C 处所受的力。



题 3-23 图



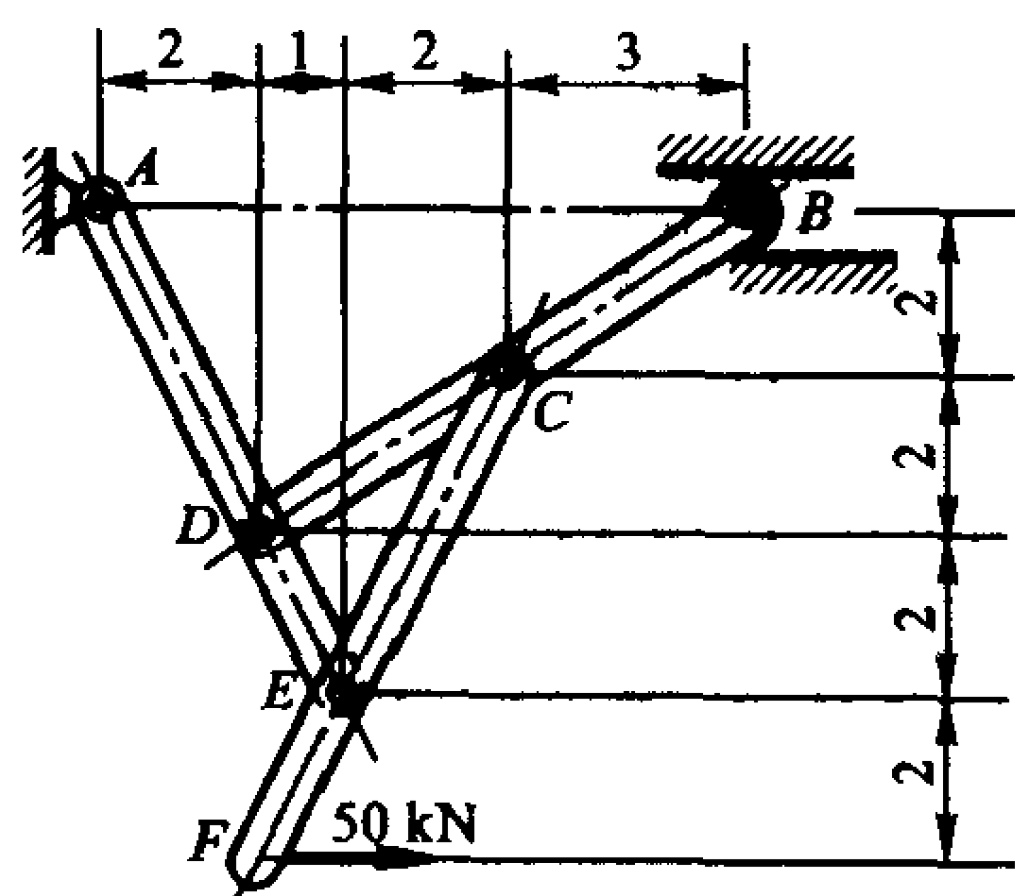
题 3-24 图

3-24 在图示构架中，A,C,D,E 处为铰链连接，BD 杆上的销钉 B 置于 AC 杆的光滑槽内，力 $F=200$ N，力偶矩 $M=100$ N·m，不计各构件重量，各尺寸如图25。求 A,B,C 处所受的力。

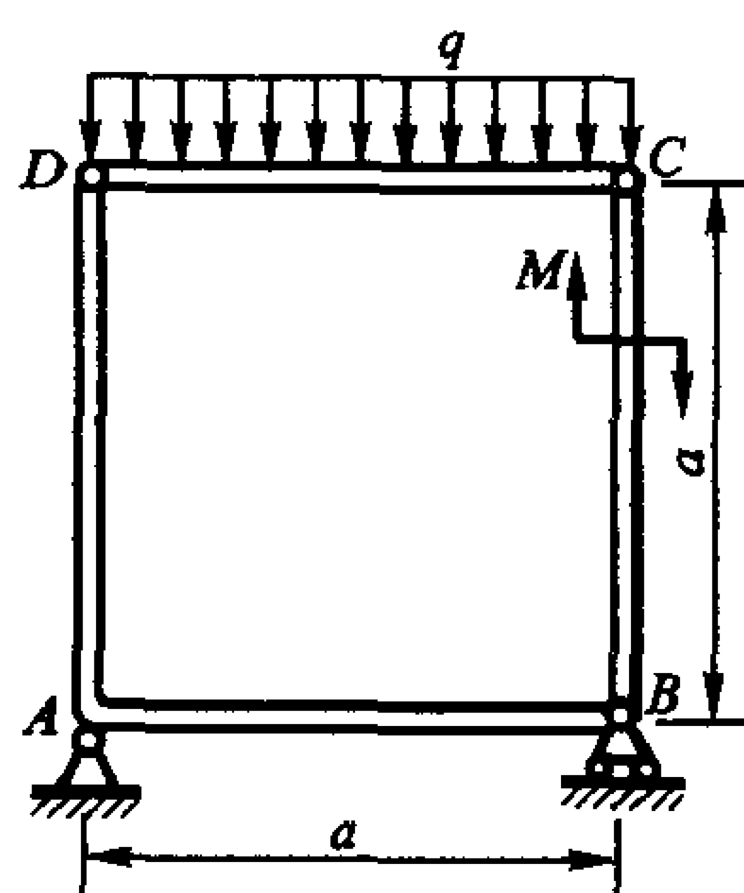
3-25 如图所示，用三根杆连接成一构架，各连接点均为铰链，B 处接触表面光滑，不计各杆的重量。图中尺寸单位为 m。求铰链 D 所受的力。

3-26 图示结构由直角弯杆 DAB 与直杆 BC，CD 铰接而成，并在 A 处与 B 处用固定铰支座和可动铰支座固定。杆 DC 受均布载荷 q 的作用，杆 BC 受矩为 $M=qa^2$ 的力偶作用。不计各构件的自重。求铰链 D 所受的力。

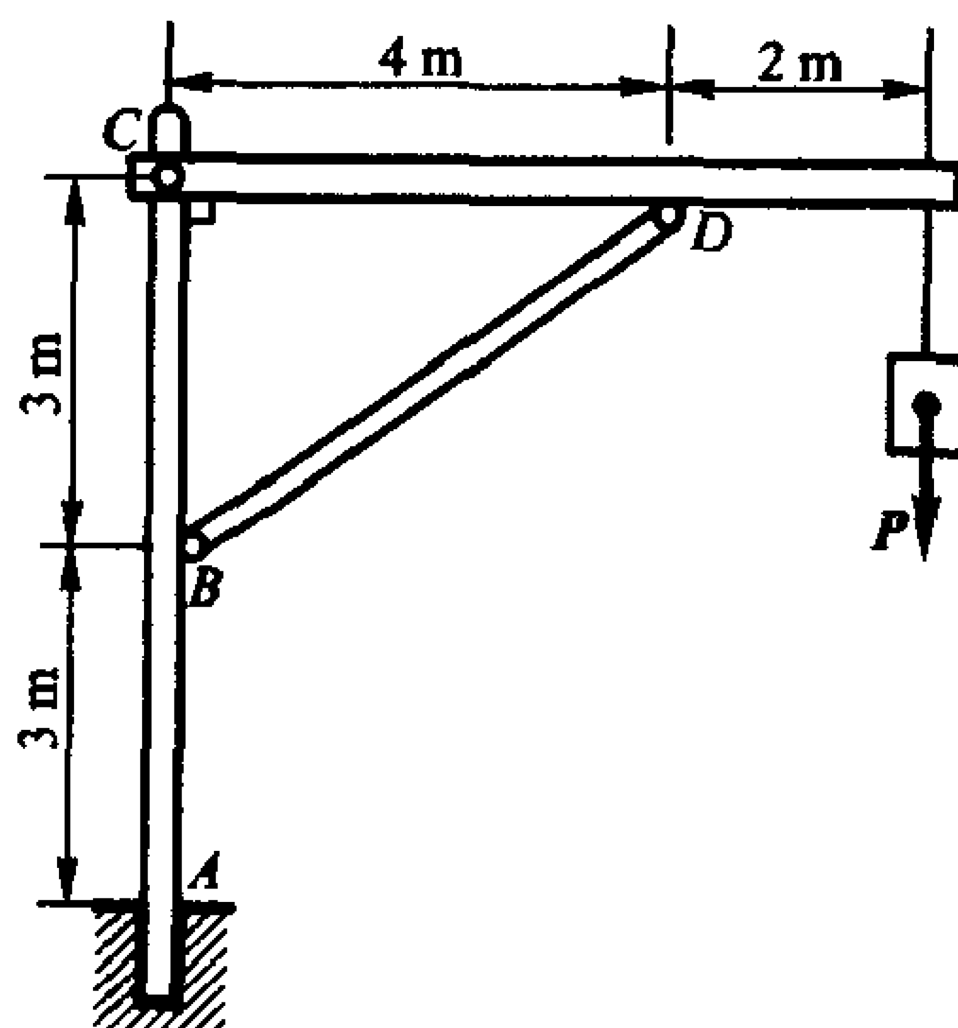
3-27 在图示构架中，各杆单位长度的重量为 300 N/m，载荷 $P=10$ kN，A 处为固定端，B,C,D 处为铰链。求固定端 A 处及 B,C 铰链处的约束力。



题 3-25 图

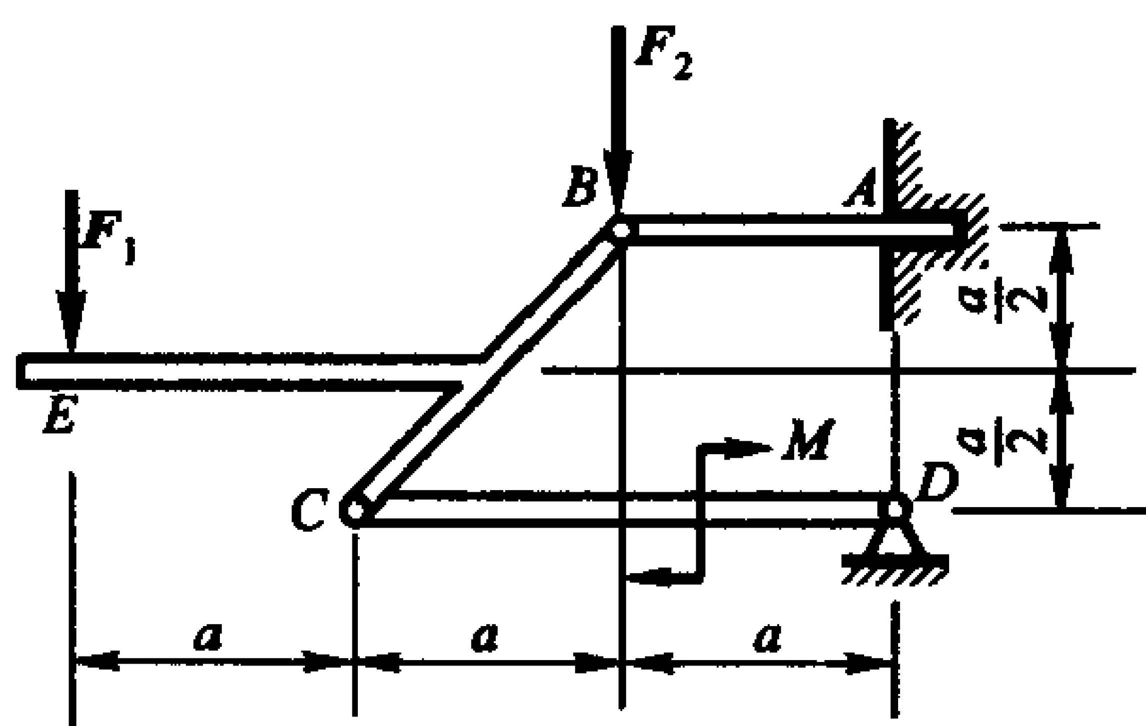


题 3-26 图

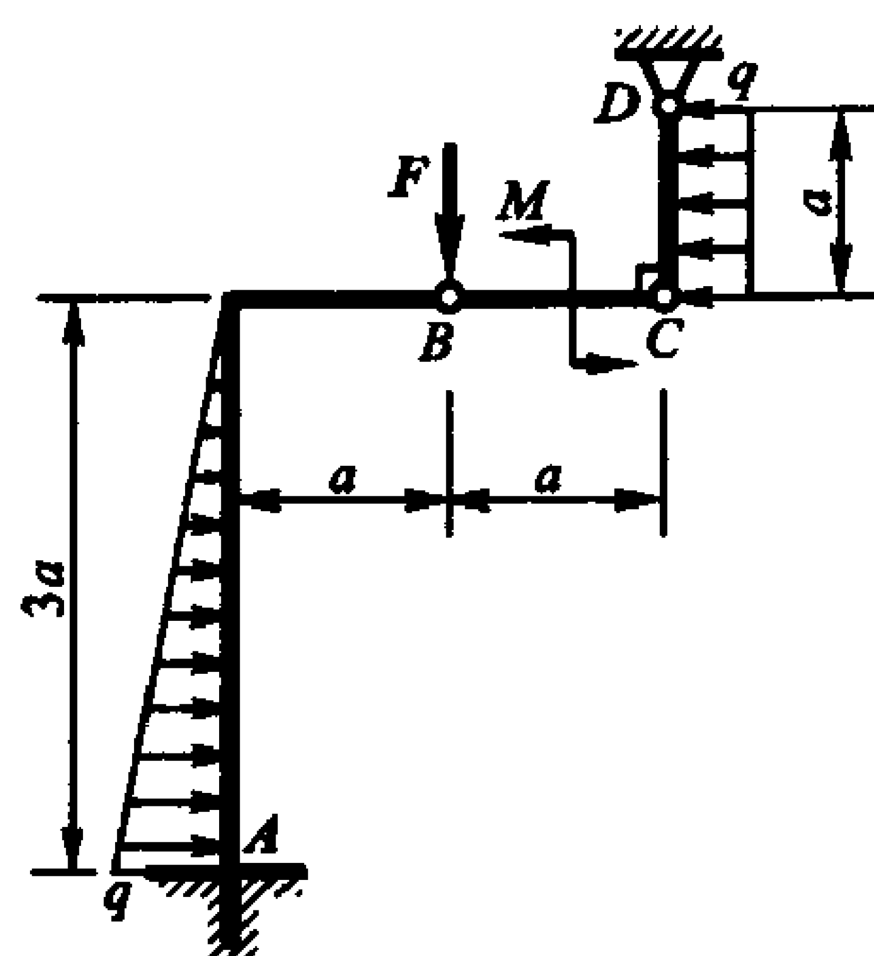


题 3-27 图

*3-28** 图示结构位于铅垂面内，由杆 AB，CD 及斜 T 形杆 BCE 组成，不计各杆的自重。已知载荷 F_1，F_2，M 及尺寸 a，且 $M=F_1a$，F_2 作用于销钉 B 上。求：(1) 固定端 A 处的约束力；(2) 销钉 B 对杆 AB 及 T 形杆的作用力。



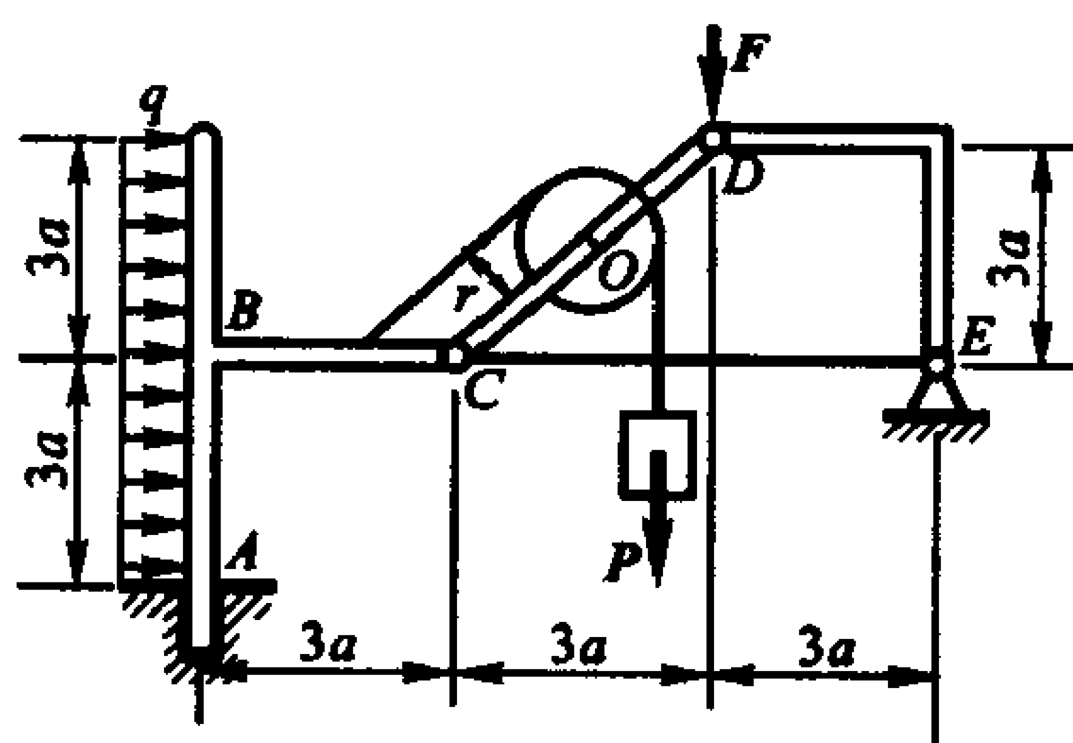
题3-28图



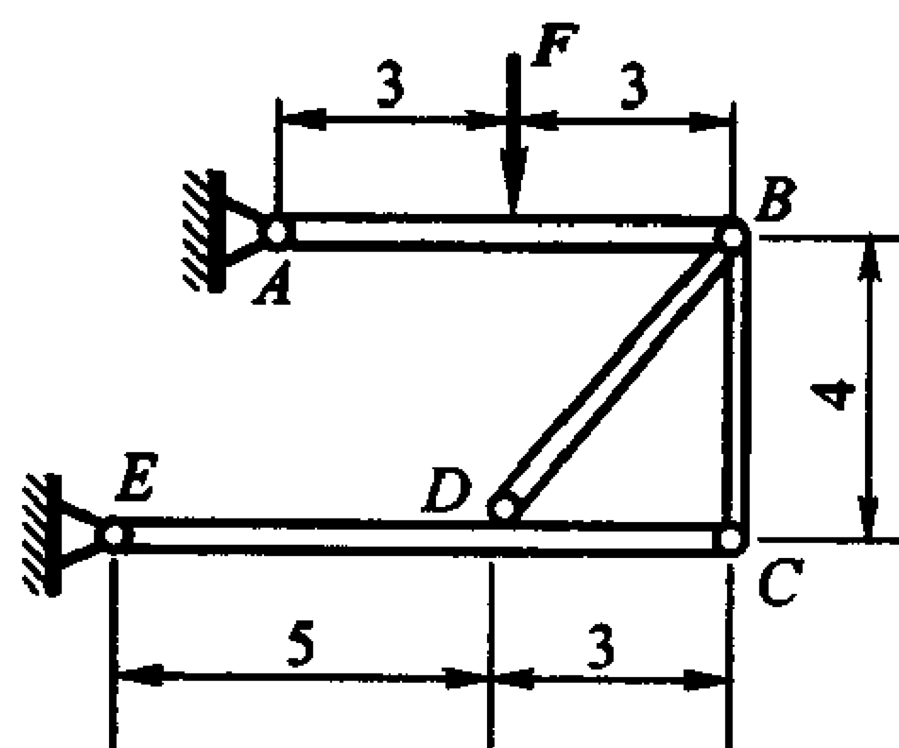
题3-29图

*3-29 图示构架，由直杆 BC，CD 及直角弯杆 AB 组成，各杆自重不计，载荷分布及尺寸如图。销钉 B 穿透 AB 及 BC 两构件，在销钉 B 上作用一铅垂力 F。已知 q，a，M，且 $M=qa^2$。求固定端 A 的约束力及销钉 B 对杆 BC，杆 AB 的作用力。

3-30 由直角曲杆 ABC，DE，直杆 CD 及滑轮组成的结构如图所示，杆 AB 上作用有水平均布载荷 q。不计各构件的重量，在 D 处作用一铅垂力 F，在滑轮上悬吊一重为 P 的重物，滑轮的半径 $r=a$，且 $P=2F$，$CO=OD$。求支座 E 及固定端 A 的约束力。



题3-30图



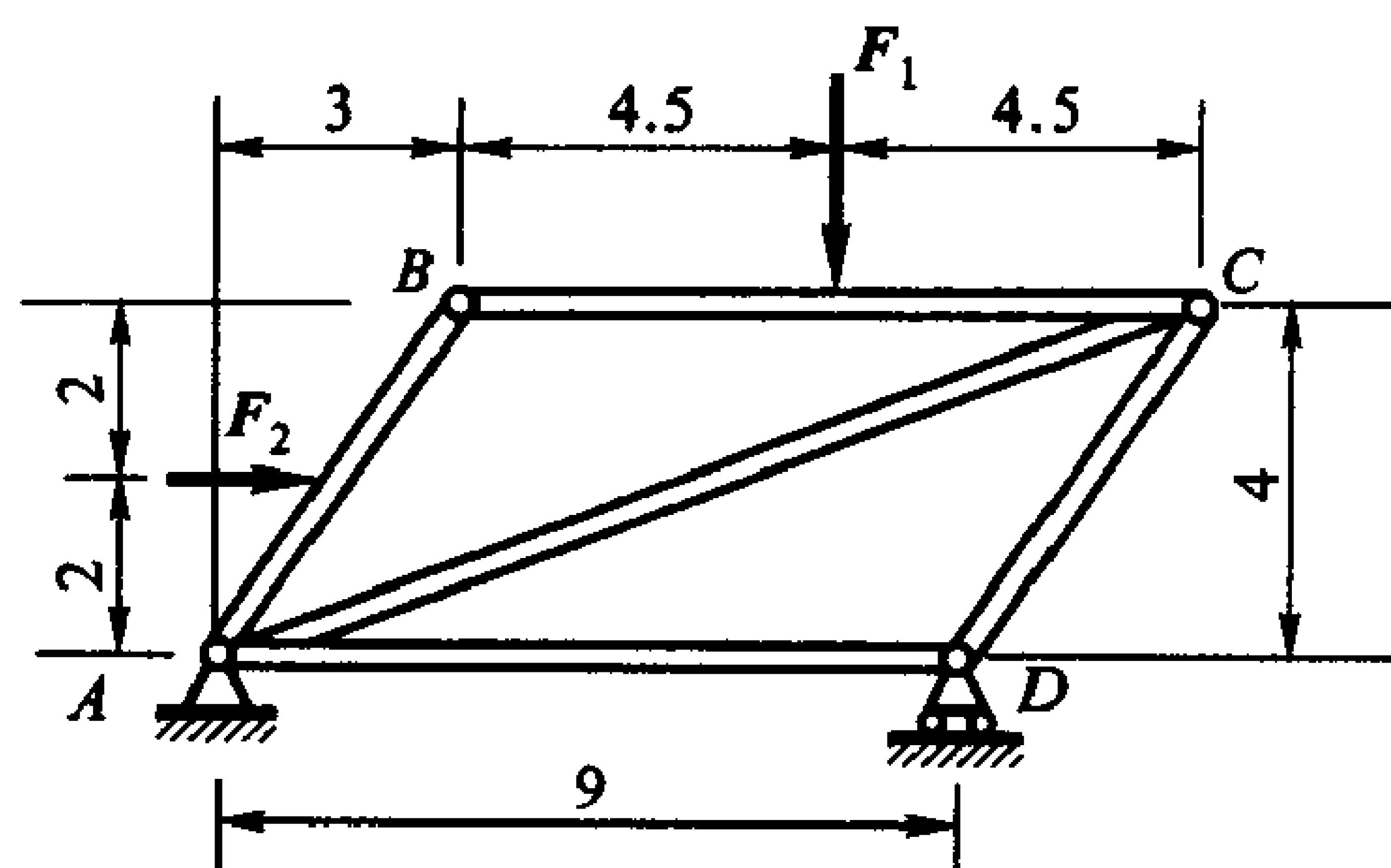
题3-31图

3-31 构架尺寸如图所示（尺寸单位为 m），不计各杆件自重，载荷 $F=60$ kN。求 A，E 铰链的约束力及杆 BD，BC 的内力。

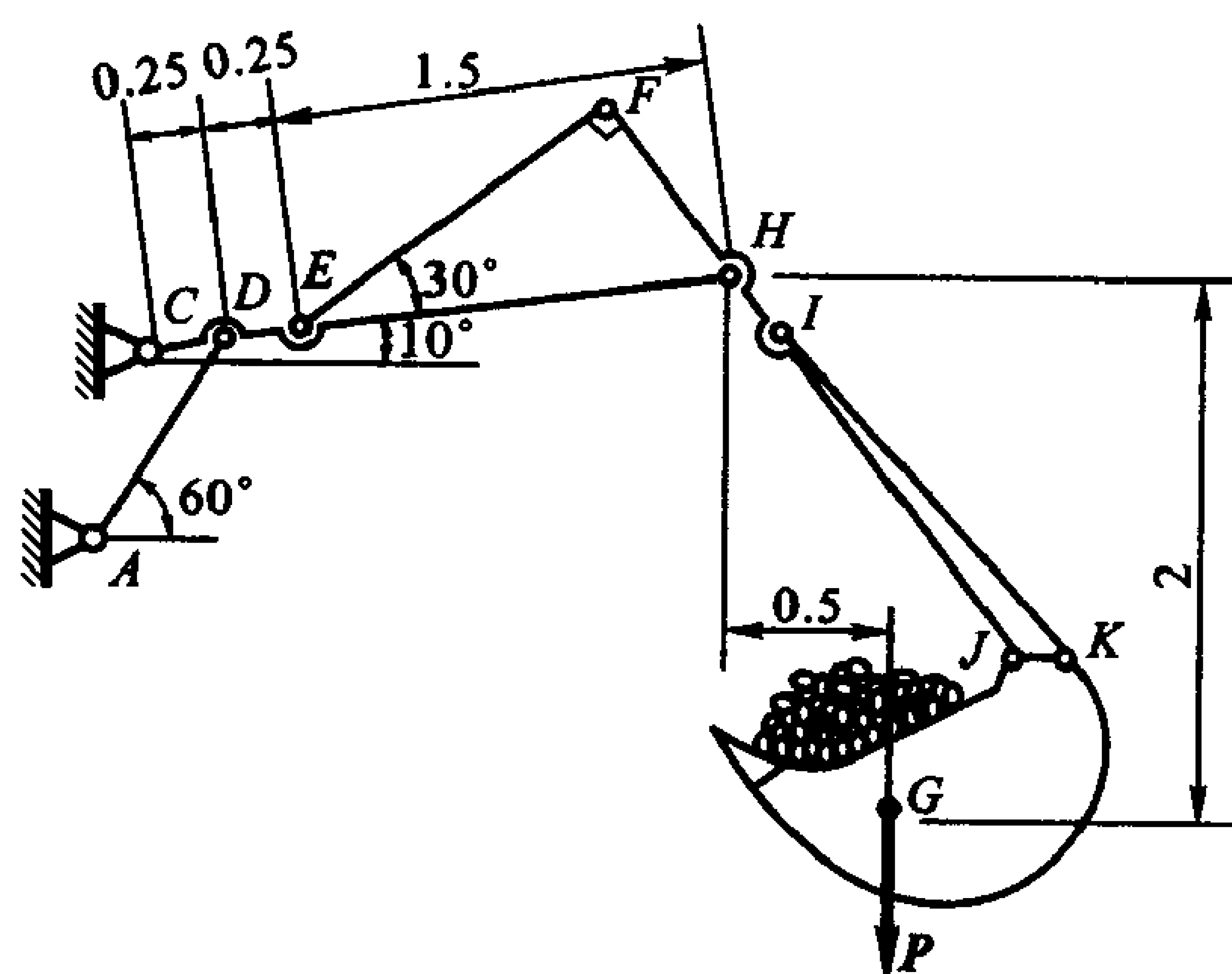
3-32 构架尺寸如图所示（尺寸单位为 m），不计各构件自重，载荷 $F_1=120$ kN，$F_2=75$ kN。求 AC 及 AD 两杆所受的力。

3-33 图示挖掘机计算简图中，挖斗载荷 $P=12.25$kN，作用于 G 点，尺寸如图（尺寸单位为 m），不计各构件自重。求在图示位置平衡时杆 EF 和 AD 所受的力。

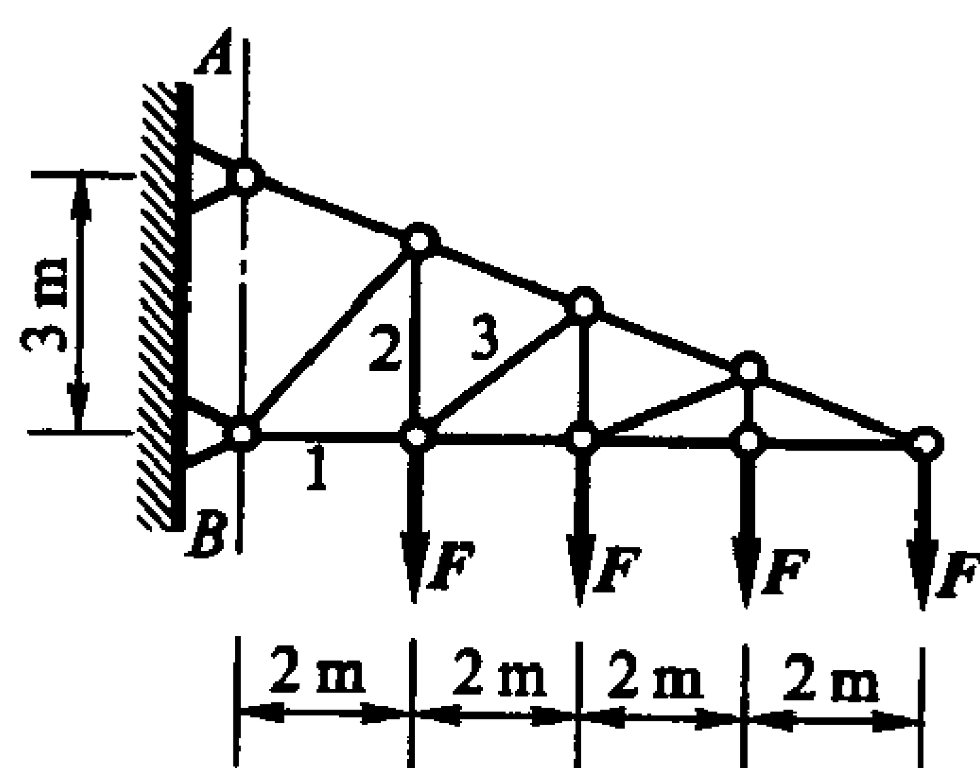
3-34 平面悬臂桁架所受的载荷如图所示。求杆 1，2 和 3 的内力。



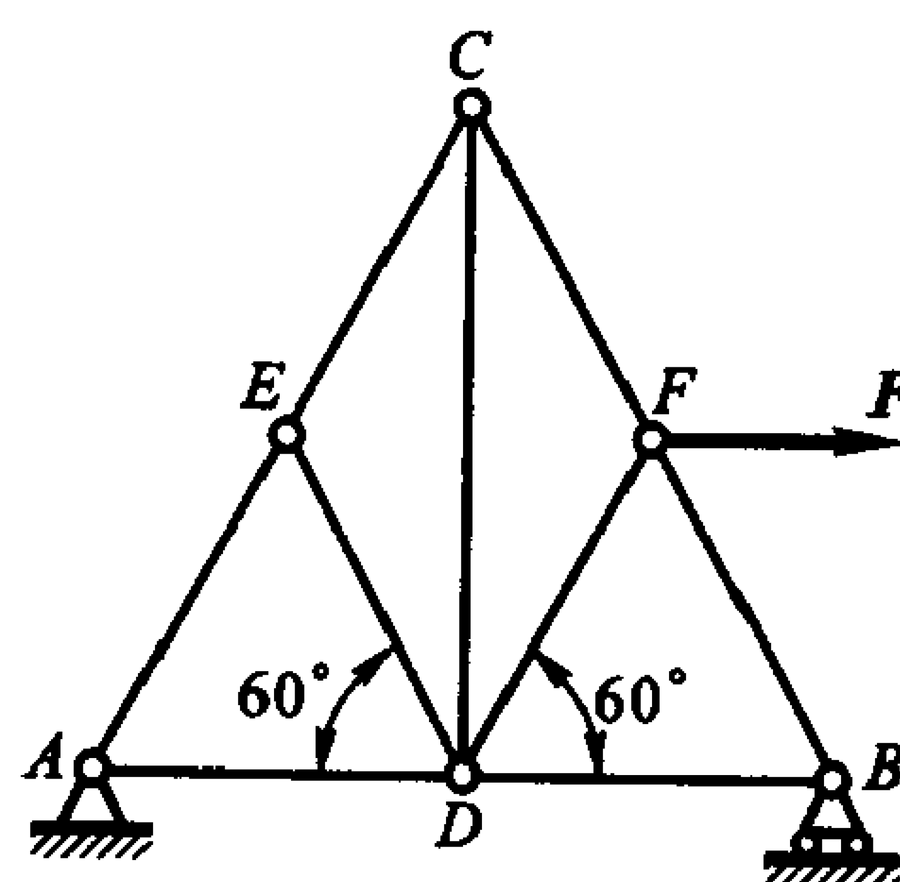
题 3 - 32 图



题 3 - 33 图



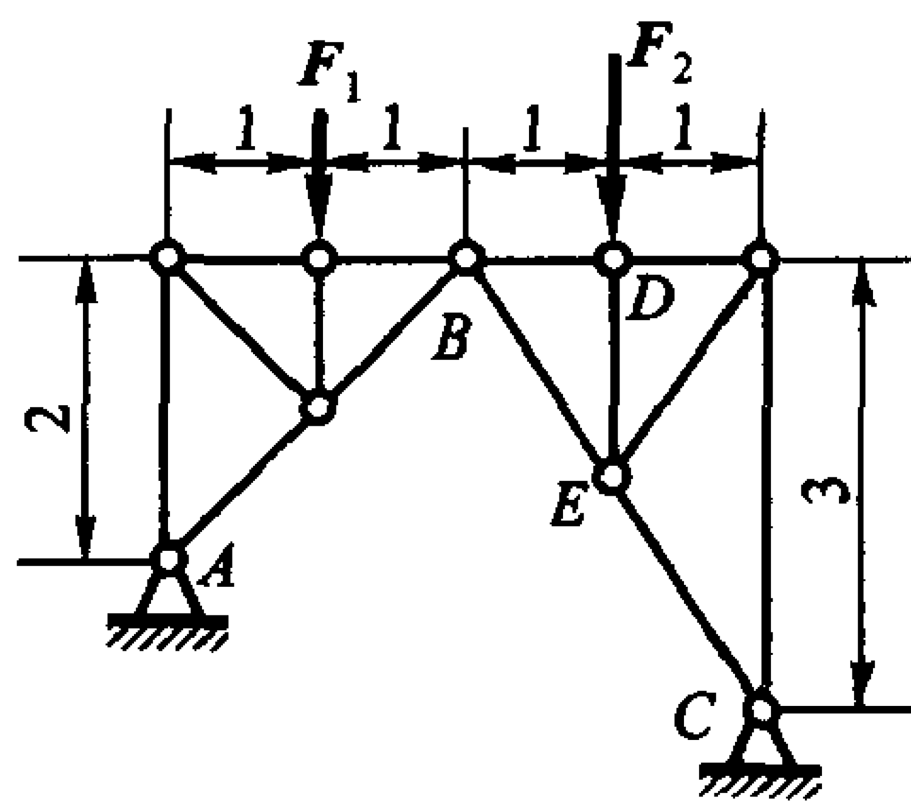
题 3 - 34 图



题 3 - 35 图

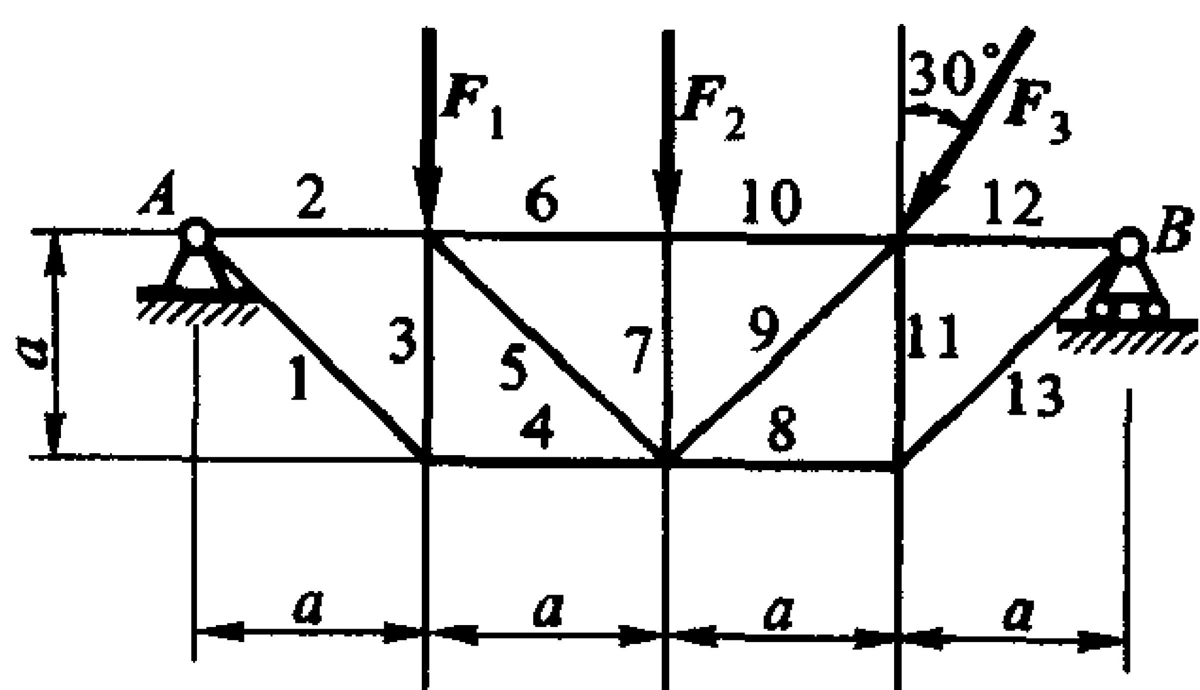
3 - 35　平面桁架受力如图所示。*ABC* 为等边三角形，且 *AD* = *DB*。求杆 *CD* 的内力。

3 - 36　平面桁架尺寸如图所示(尺寸单位为 m)，载荷 $F_1 = 240$ kN，$F_2 = 720$ kN。试用最简便的方法求杆 *BD* 及 *BE* 的内力。

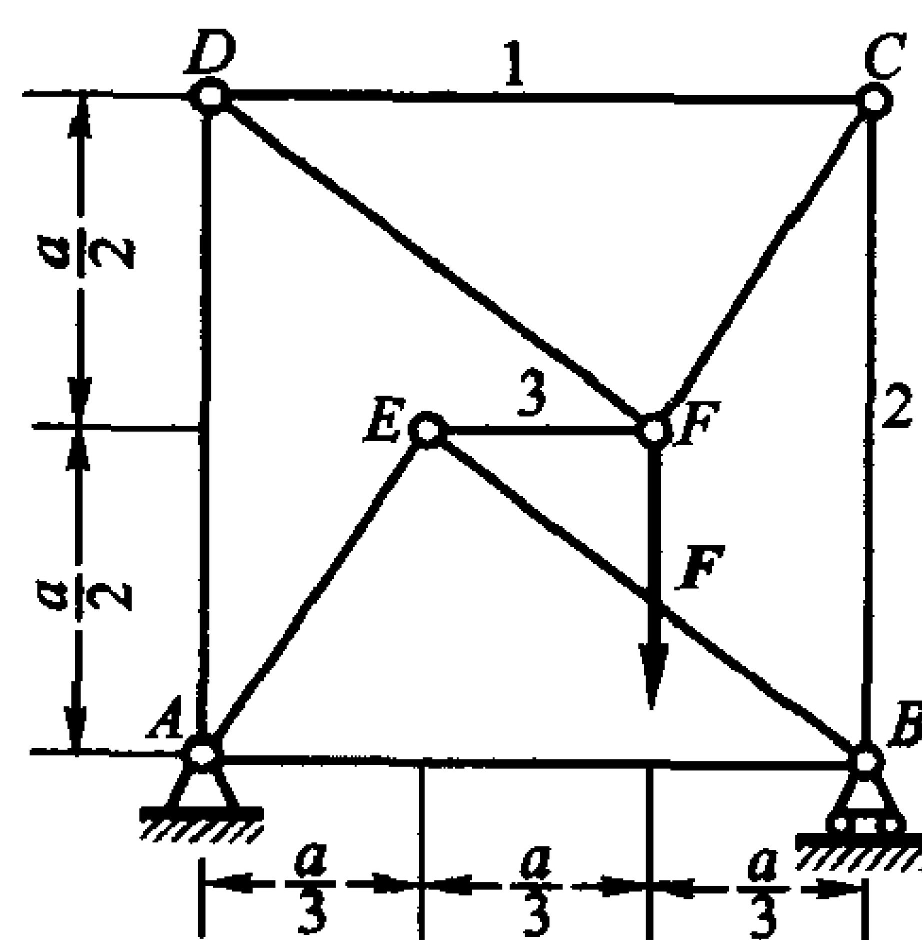


题 3-36 图

3-37　桁架受力如图所示，已知 $F_1=10\ \text{kN}, F_2=F_3=20\ \text{kN}$。试求桁架 4,5,7,10 各杆的内力。



题 3-37 图



题 3-38 图

3-38　平面桁架的支座和载荷如图所示，求杆 1,2 和 3 的内力。

第四章　空间力系

本章将研究空间力系的简化和平衡条件。

与平面力系一样,可以把空间力系分为空间汇交力系、空间力偶系和空间任意力系来研究。

§4-1　空间汇交力系

1. 力在直角坐标轴上的投影

若已知力 $\boldsymbol{F}$ 与正交坐标系 $Oxyz$ 三轴间的夹角,则可用直接投影法。即

$$F_x = F\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{i}),\quad F_y = F\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{j}),\quad F_z = F\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{k}) \tag{4-1}$$

当力 $\boldsymbol{F}$ 与坐标轴 Ox,Oy 间的夹角不易确定时,可把力 $\boldsymbol{F}$ 先投影到坐标平面 Oxy 上,得到力 $\boldsymbol{F}_{xy}$,然后再把这个力投影到 x,y 轴上,此为间接投影法。在图 4-1 中,已知角 γ 和 φ,则力 $\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴上的投影分别为

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F\sin\gamma\cos\varphi \\ F_y &= F\sin\gamma\sin\varphi \\ F_z &= F\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{4-2}$$

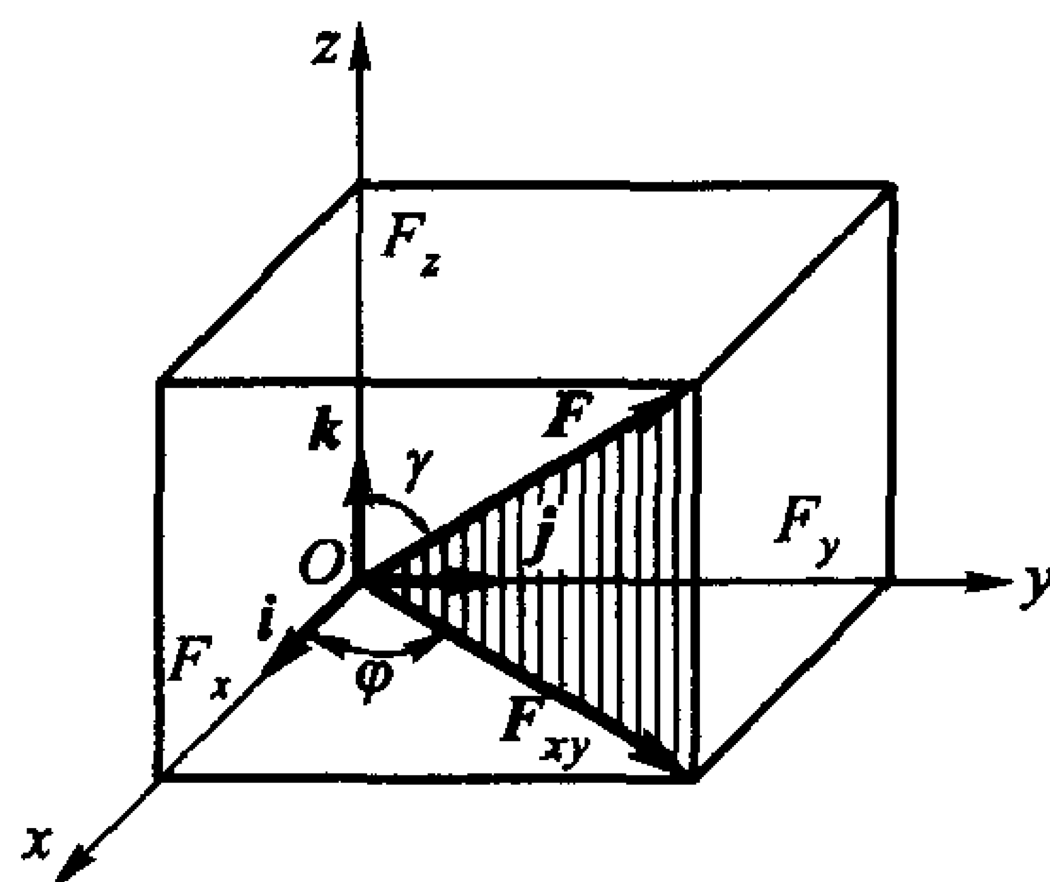


图 4-1

例 4-1　图 4-2 所示的圆柱斜齿轮,其上受啮合力 $\boldsymbol{F}$ 的作用。已知斜齿轮的齿倾角(螺旋角)β 和压力角 θ,试求力 $\boldsymbol{F}$ 在 x,y,z 轴的投影。

解:　先将力 $\boldsymbol{F}$ 向 z 轴和 Oxy 平面投影,得

$$F_z = -F\sin\theta,\quad F_{xy} = F\cos\theta$$

再将力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 向 x,y 轴投影,得

$$F_x = F_{xy}\cos\beta = F\cos\theta\cos\beta$$

$$F_y = -F_{xy}\sin\beta = -F\cos\theta\sin\beta$$

2. 空间汇交力系的合力与平衡条件

将平面汇交力系的合成法则扩展到空间,可得:空间汇交力系的合力等于各分力的矢量和,合力的作用线通过汇交点。合力矢为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \tag{4-3}$$

或

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = \sum F_{xi}\boldsymbol{i} + \sum F_{yi}\boldsymbol{j} + \sum F_{zi}\boldsymbol{k} \tag{4-4}$$

其中，$\sum F_{xi}$，$\sum F_{yi}$，$\sum F_{zi}$ 为合力 $\boldsymbol{F}_R$ 沿 x,y,z 轴的投影。由此可得合力的大小和方向余弦为

$$\left.\begin{aligned} F_R &= \sqrt{(\sum F_{xi})^2 + (\sum F_{yi})^2 + (\sum F_{zi})^2} \\ \cos(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{i}) &= \frac{\sum F_{xi}}{F_R} \\ \cos(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{j}) &= \frac{\sum F_{yi}}{F_R} \\ \cos(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{k}) &= \frac{\sum F_{zi}}{F_R} \end{aligned}\right\} \tag{4-5}$$

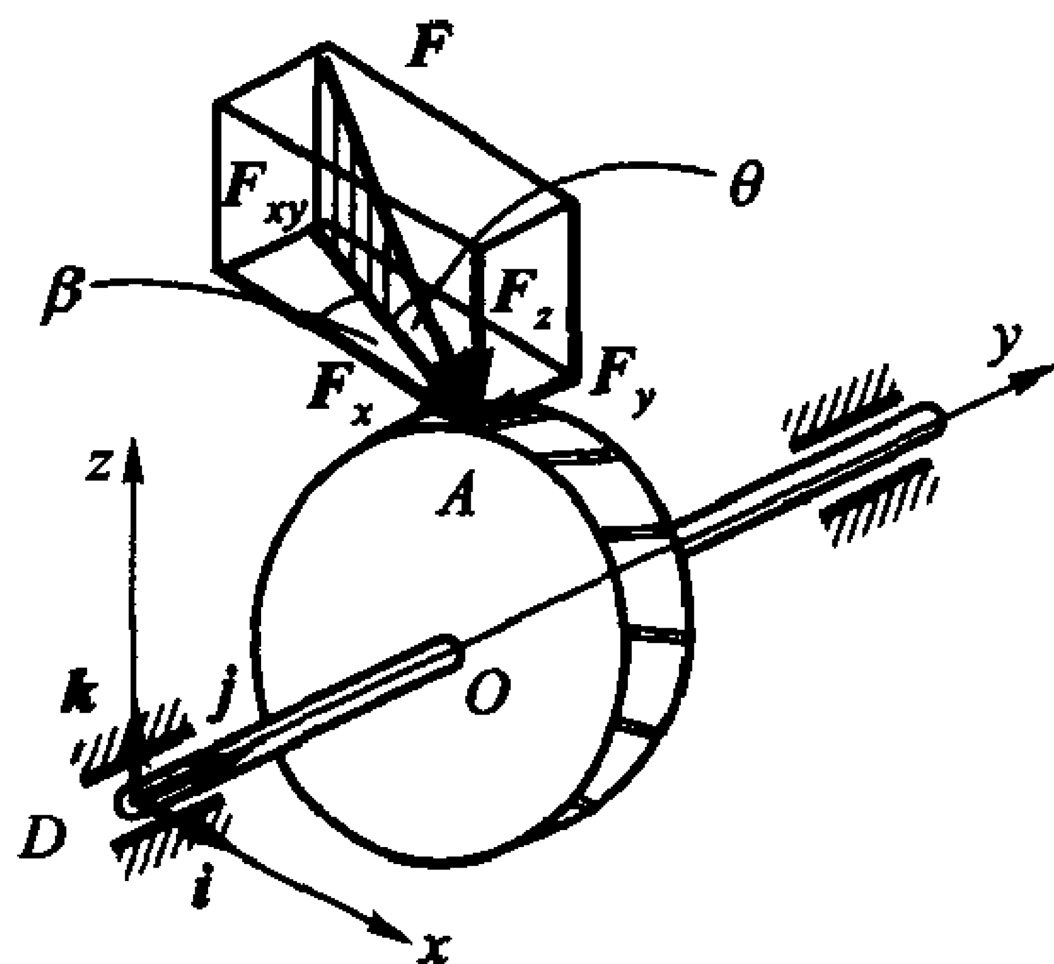


图 4-2

例 4-2 在刚体上作用有四个汇交力，它们在坐标轴上的投影如下表所示，试求这四个力的合力的大小和方向。

	$\boldsymbol{F}_1$	$\boldsymbol{F}_2$	$\boldsymbol{F}_3$	$\boldsymbol{F}_4$	单位
F_x	1	2	0	2	kN
F_y	10	15	-5	10	kN
F_z	3	4	1	-2	kN

解： 由上表得

$$\sum F_x = 5 \text{ kN}$$
$$\sum F_y = 30 \text{ kN}$$
$$\sum F_z = 6 \text{ kN}$$

代入式 4-5 得合力的大小和方向余弦为

$$F_R = 31 \text{ kN}$$

$$\cos(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{i}) = \frac{5}{31},\quad \cos(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{j}) = \frac{30}{31},\quad \cos(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{k}) = \frac{6}{31}$$

由此得夹角

$$(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{i}) = 80°43',\quad (\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{j}) = 14°36',\quad (\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{k}) = 78°50'$$

由于一般空间汇交力系合成为一个合力，因此，空间汇交力系平衡的必要和充分条件为：该力系的合力等于零，即

$$\boldsymbol{F}_R = \sum \boldsymbol{F}_i = 0 \tag{4-6}$$

由式(4-5)可知，为使合力 F_R 为零，必须同时满足：

$$\sum F_{xi} = 0,\quad \sum F_{yi} = 0,\quad \sum F_{zi} = 0 \tag{4-7}$$

空间汇交力系平衡的必要和充分条件为：该力系中所有各力在三个坐标轴上的投影的代数和分别等于零。式(4-7)称为空间汇交力系的平衡方程(为便于书写，下标 i 可略去)。

应用解析法求解空间汇交力系的平衡问题的步骤，与平面汇交力系问题相同，只不过需列出三个平衡方程，可求解三个未知量。

例 4－3　如图 4－3a 所示，用起重杆吊起重物。起重杆的 A 端用球铰链固定在地面上，而 B 端则用绳 CB 和 DB 拉住，两绳分别系在墙上的点 C 和 D，连线 CD 平行于 x 轴。已知：$CE=EB=DE$，$\theta=30°$，CDB 平面与水平面间的夹角 $\angle EBF=30°$（参见图 4－3b），物重 $P=10\ \text{kN}$。如起重杆的重量不计，试求起重杆所受的压力和绳子的拉力。

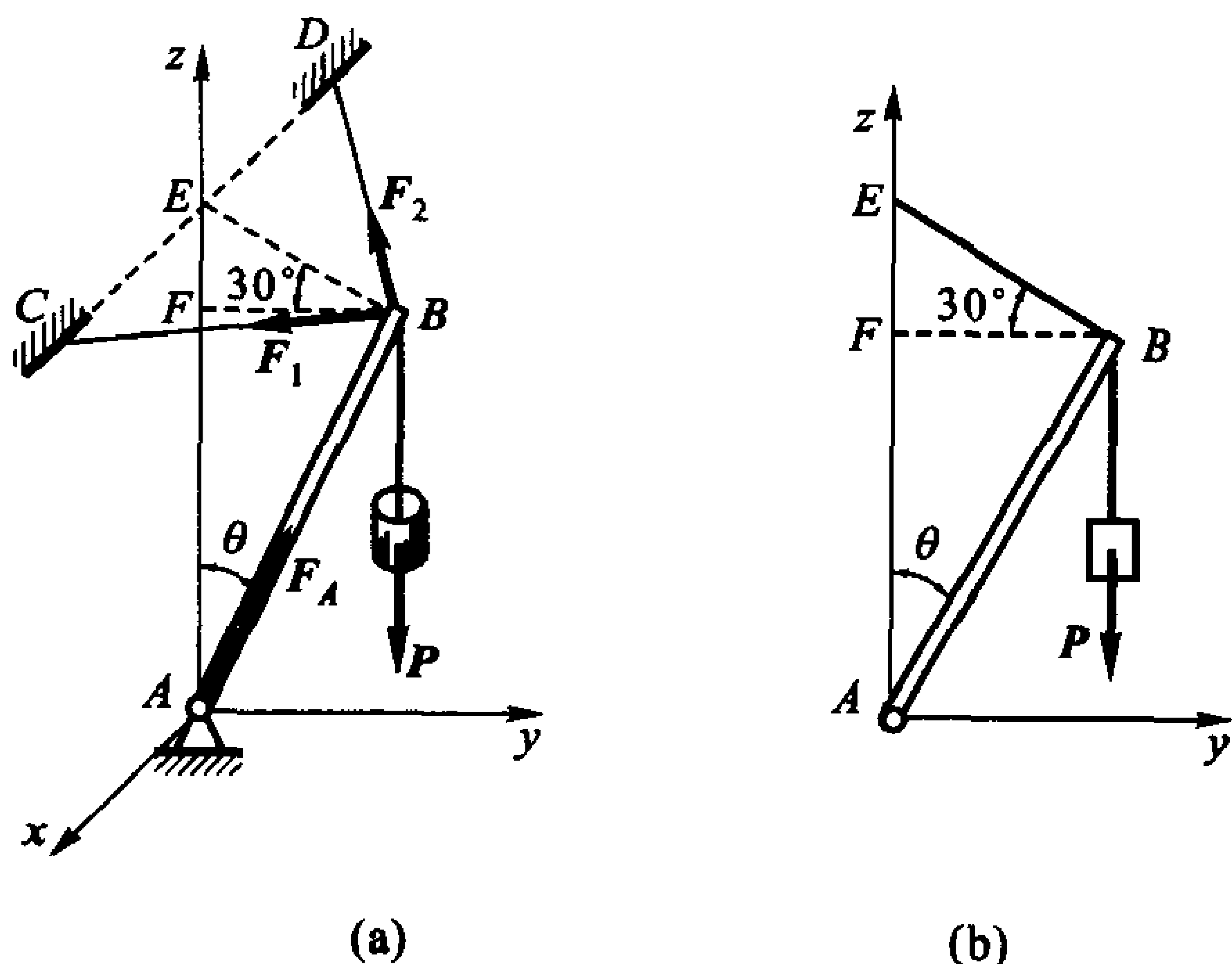


图 4－3

解：　取起重杆 AB 与重物为研究对象，其上受有主动力 $\boldsymbol{P}$，B 处受绳拉力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$；球铰链 A 的约束力方向一般不能预先确定，可用三个正交分力表示。本题中，由于杆重不计，又只在 A，B 两端受力，所以起重杆 AB 为二力构件，球铰 A 对杆 AB 的反力 $\boldsymbol{F}_A$ 必沿 A，B 连线。$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_A$ 四个力汇交于点 B，为一空间汇交力系。

取坐标轴如图所示。由已知条件知：$\angle CBE=\angle DBE=45°$，列平衡方程：

$$\sum F_x=0,\quad F_1\sin 45°-F_2\sin 45°=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_A\sin 30°-F_1\cos 45°\cos 30°-F_2\cos 45°\cos 30°=0$$

$$\sum F_z=0,\quad F_1\cos 45°\sin 30°+F_2\cos 45°\sin 30°+F_A\cos 30°-P=0$$

求解上面的三个平衡方程，得

$$F_1=F_2=3.536\ \text{kN},\quad F_A=8.66\ \text{kN}$$

F_A 为正值，说明图中所设 $\boldsymbol{F}_A$ 的方向正确，杆 AB 受压力。

§4－2　力对点的矩和力对轴的矩

1. 力对点的矩以矢量表示——力矩矢

对于平面力系，用代数量表示力对点的矩足以概括它的全部要素。但是在

空间情况下，不仅要考虑力矩的大小、转向，而且还要注意力与矩心所组成的平面（力矩作用面）的方位。方位不同，即使力矩大小一样，作用效果将完全不同。这三个因素可以用力矩矢 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 来描述。其中矢量的模即 $|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})| = F\cdot h = 2A_{\triangle OAB}$；矢量的方位和力矩作用面的法线方向相同；矢量的指向按右手螺旋法则来确定，如图 4－4 所示。

由图 4－4 易见，以 $\boldsymbol{r}$ 表示力作用点 A 的矢径，则矢积 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 的模等于三角形 OAB 面积的两倍，其方向与力矩矢一致。因此可得

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{4-8}$$

上式为力对点的矩的矢积表达式，即：力对点的矩矢等于矩心到该力作用点的矢径与该力的矢量积。

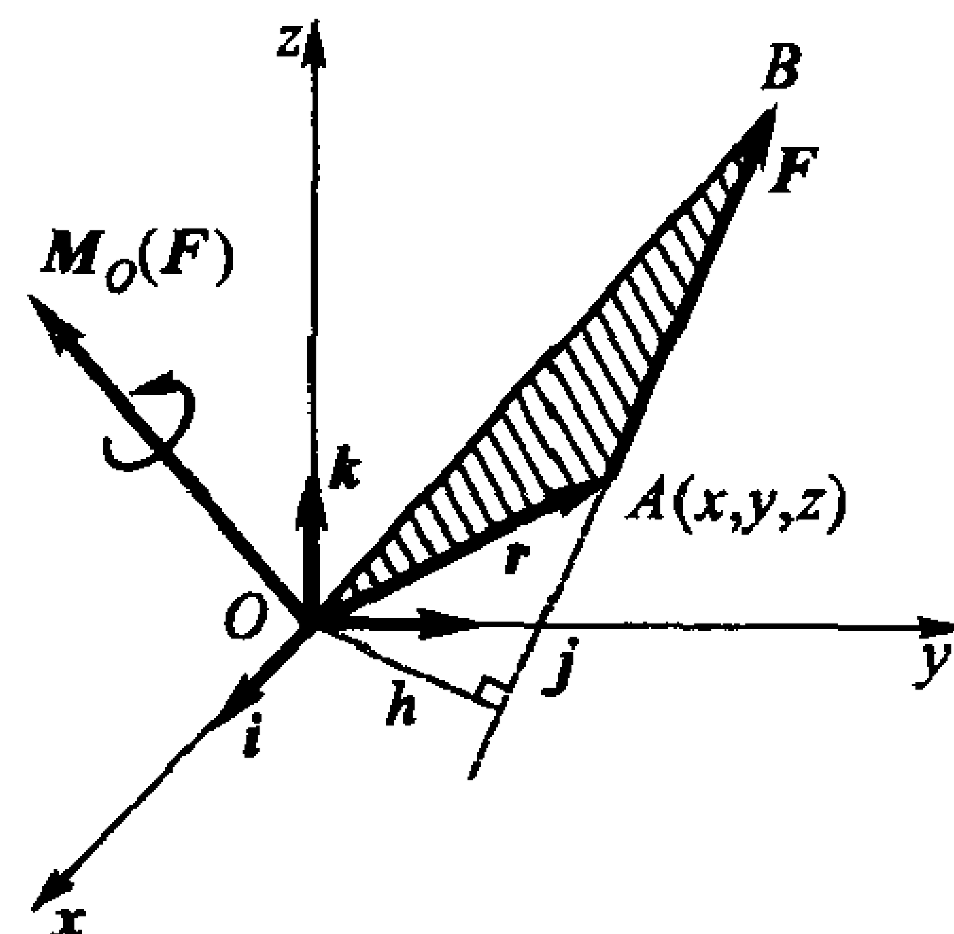


图 4－4

若以矩心 O 为原点，作空间直角坐标系 $Oxyz$ 如图 4－4 所示。设力作用点 A 的坐标为 $A(x,y,z)$，力在三个坐标轴上的投影分别为 F_x, F_y, F_z，则矢径 $\boldsymbol{r}$ 和力 $\boldsymbol{F}$ 分别为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$$

代入式(4－8)，并采用行列式形式，得

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$
$$= (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k} \tag{4-9}$$

由上式可知，单位矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 前面的三个系数，应分别表示力矩矢 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 在三个坐标轴上的投影，即

$$\left.\begin{aligned} [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_x &= yF_z - zF_y \\ [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_y &= zF_x - xF_z \\ [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_z &= xF_y - yF_x \end{aligned}\right\} \tag{4-10}$$

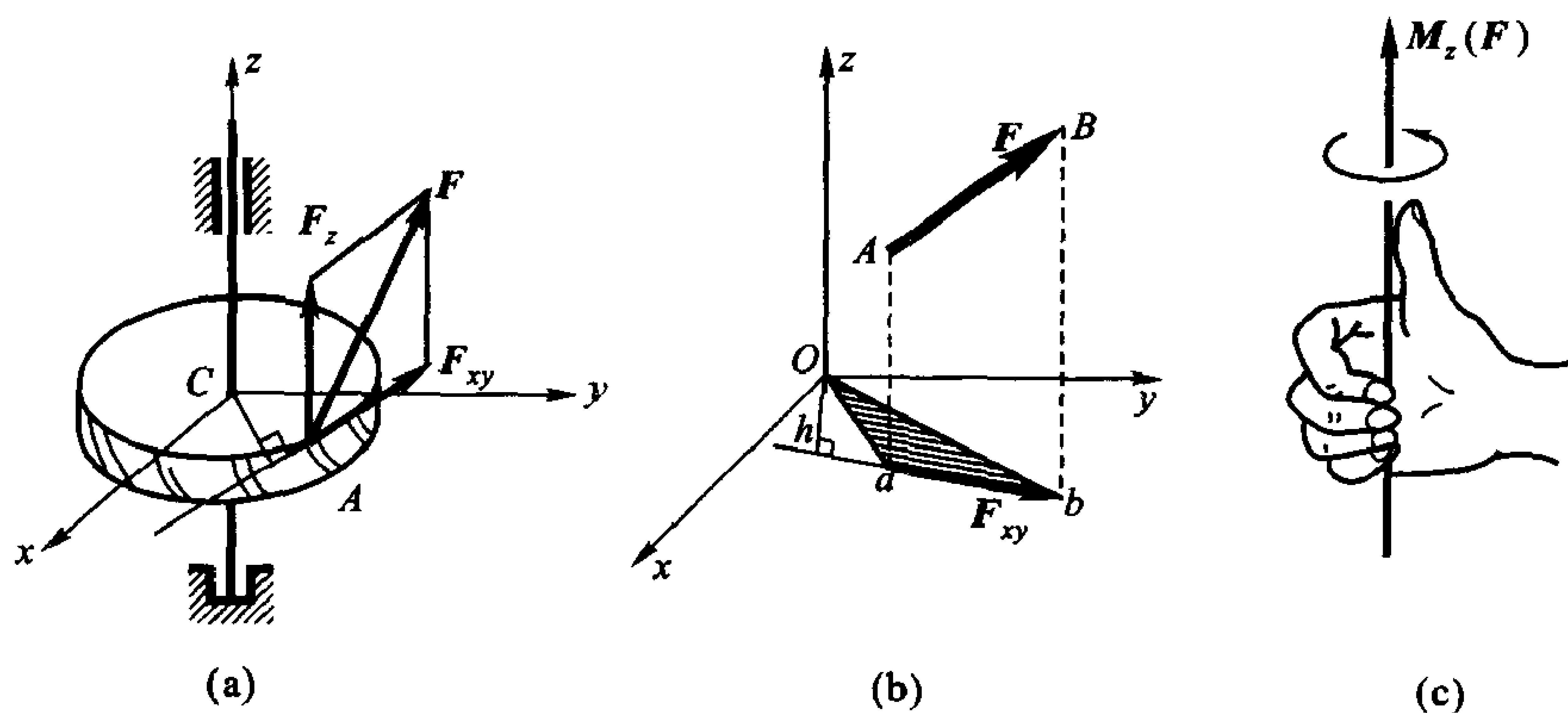
由于力矩矢量 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 的大小和方向都与矩心 O 的位置有关，故力矩矢的始端必须在矩心，不可任意挪动，这种矢量称为定位矢量。

2．力对轴的矩

工程中，经常遇到刚体绕定轴转动的情形，为了度量力对绕定轴转动刚体的作用效果，必须了解**力对轴的矩**的概念。

现计算作用在斜齿轮上的力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的矩。根据合力矩定理，将力 $\boldsymbol{F}$ 分解为 $\boldsymbol{F}_z$ 与 $\boldsymbol{F}_{xy}$，其中分力 $\boldsymbol{F}_z$ 平行 z 轴，不能使静止的齿轮转动，故它对 z 轴之矩

为零;只有垂直 z 轴的分力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 对 z 轴有矩,等于力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 对轮心 C 的矩(图 4-5a)。一般情况下,可先将空间一力 $\boldsymbol{F}$,投影到垂直于 z 轴的 Oxy 平面内,得力 $\boldsymbol{F}_{xy}$;再将力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 对平面与轴的交点 O 取矩(图 4-5b)。以符号 $M_z(\boldsymbol{F})$ 表示力对 z 轴的矩,即



(a) (b) (c)

图 4-5

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_O(\boldsymbol{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h = \pm 2A_{\triangle Oab} \tag{4-11}$$

力对轴的矩的定义如下:力对轴的矩是力使刚体绕该轴转动效果的度量,是一个代数量,其绝对值等于该力在垂直于该轴的平面上的投影对于这个平面与该轴的交点的矩。其正负号如下确定:从 z 轴正端来看,若力的这个投影使物体绕该轴逆时针转动,则取正号,反之取负号。也可按右手螺旋法则确定其正负号,如图 4-5c 所示,拇指指向与 z 轴一致为正,反之为负。

力对轴的矩等于零的情形:(1) 当力与轴相交时(此时 $h=0$);(2) 当力与轴平行时(此时 $|\boldsymbol{F}_{xy}|=0$)。这两种情形可以合起来说:当力与轴在同一平面时,力对该轴的矩等于零。

力对轴的矩的单位为 N·m。

力对轴的矩也可用解析式表示。设力 $\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 F_x,F_y,F_z,力作用点 A 的坐标为 x,y,z,如图 4-6 所示。根据式(4-11),得

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_O(\boldsymbol{F}_{xy}) = M_O(\boldsymbol{F}_x) + M_O(\boldsymbol{F}_y)$$

即

$$M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x$$

同理可得其余二式。将此三式合写为

$$\left.\begin{aligned} M_x(\boldsymbol{F}) &= yF_z - zF_y \\ M_y(\boldsymbol{F}) &= zF_x - xF_z \\ M_z(\boldsymbol{F}) &= xF_y - yF_x \end{aligned}\right\} \quad (4-12)$$

以上三式是计算力对轴之矩的解析式。

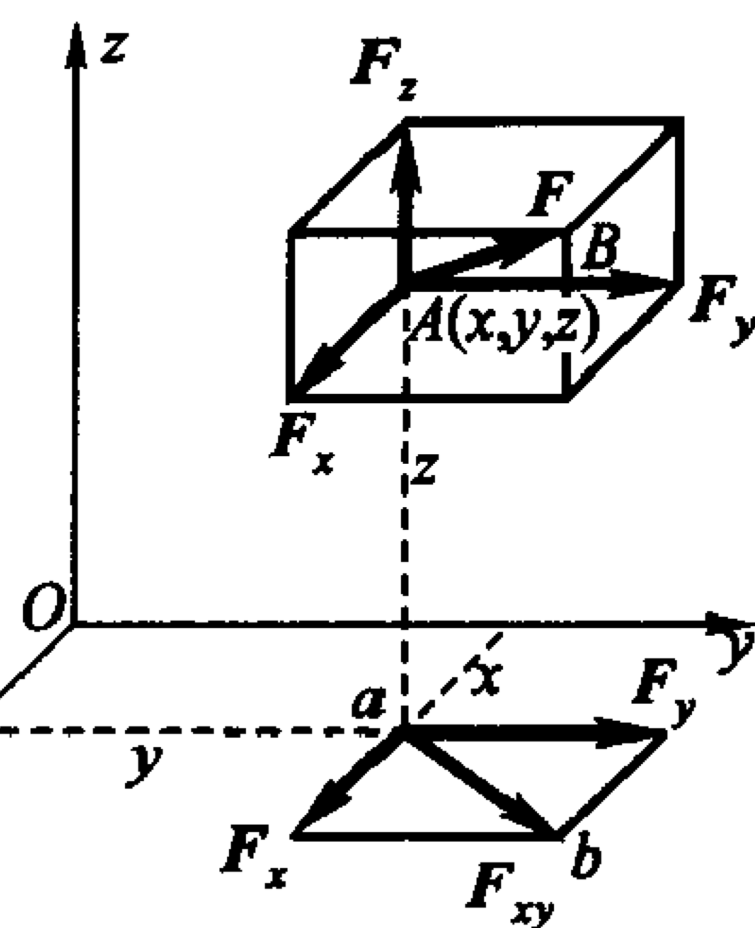


图 4-6

例 4-4 手柄 $ABCE$ 在平面 Axy 内，在 D 处作用一个力 $\boldsymbol{F}$，如图 4-7 所示，它在垂直于 y 轴的平面内，偏离铅直线的角度为 θ，如果 $CD=a$，杆 BC 平行于 x 轴，杆 CE 平行于 y 轴，AB 和 BC 的长度都等于 l。试求力 $\boldsymbol{F}$ 对 x,y,z 三轴的矩。

解： 力 $\boldsymbol{F}$ 在 x,y,z 轴上的投影为

$$F_x = F\sin\theta,\quad F_y = 0,\quad F_z = -F\cos\theta$$

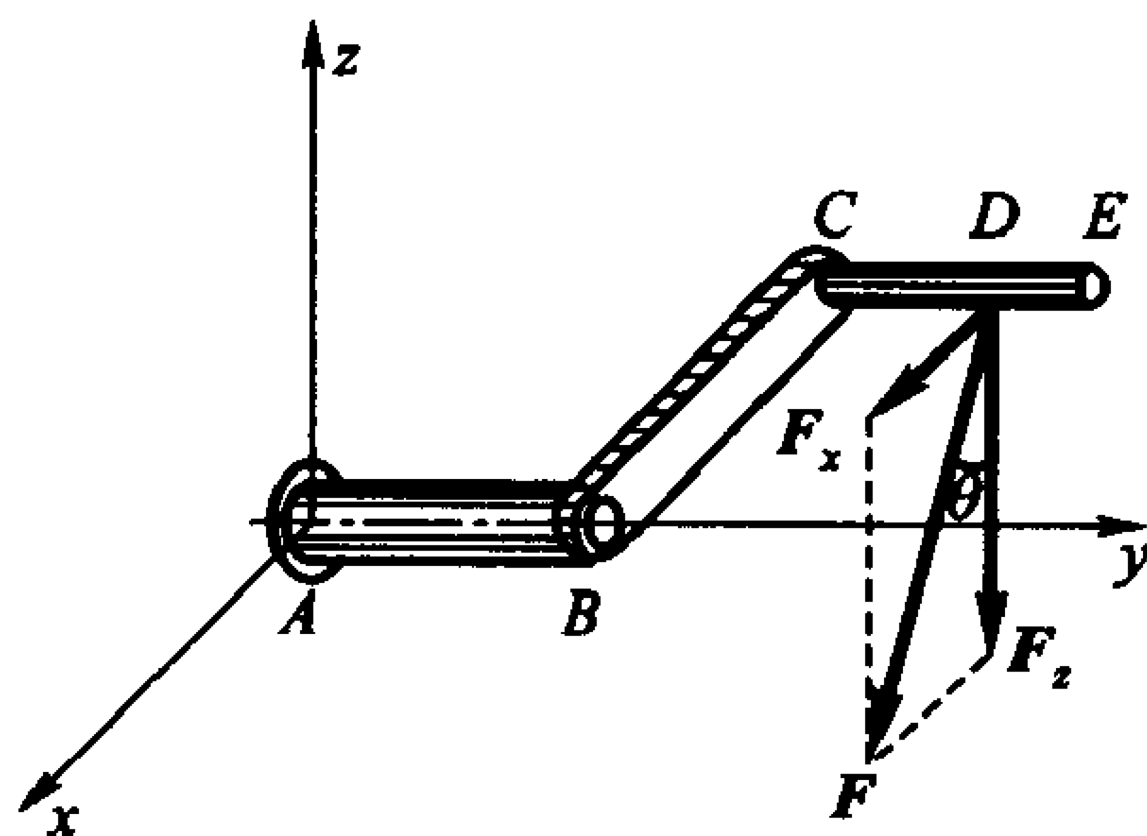


图 4-7

力作用点 D 的坐标为

$$x=-l,\quad y=l+a,\quad z=0$$

代入式(4-12)，得

$$M_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y = (l+a)(-F\cos\theta) - 0 = -F(l+a)\cos\theta$$
$$M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z = 0-(-l)(-F\cos\theta) = -Fl\cos\theta$$
$$M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x = 0-(l+a)(F\sin\theta) = -F(l+a)\sin\theta$$

本题亦可直接按力对轴之矩的定义计算。

3. 力对点的矩与力对通过该点的轴的矩的关系

比较式(4-10)与(4-12)，可得

$$\left.\begin{aligned} [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_x &= M_x(\boldsymbol{F}) \\ [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_y &= M_y(\boldsymbol{F}) \\ [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_z &= M_z(\boldsymbol{F}) \end{aligned}\right\} \quad (4-13)$$

上式说明：力对点的矩矢在通过该点的某轴上的投影，等于力对该轴的矩。

式(4-13)建立了力对点的矩与力对轴的矩之间的关系。

如果力对通过点 O 的直角坐标轴 x,y,z 的矩是已知的，则可求得该力对点 O 的矩的大小和方向余弦为

$$\left.\begin{aligned}
|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})| = |\boldsymbol{M}_O| = \sqrt{[M_x(\boldsymbol{F})]^2+[M_y(\boldsymbol{F})]^2+[M_z(\boldsymbol{F})]^2}\\
\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{i}) = \frac{M_x(\boldsymbol{F})}{|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})|},\\
\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{j}) = \frac{M_y(\boldsymbol{F})}{|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})|},\\
\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{k}) = \frac{M_z(\boldsymbol{F})}{|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})|}
\end{aligned}\right\} \quad (4-14)$$

§4-3 空间力偶

1. 力偶矩以矢量表示，力偶矩矢

空间力偶对刚体的作用效应，可用力偶矩矢来度量，即用力偶中的两个力对空间某点之矩的矢量和来度量。设有空间力偶$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$，其力偶臂为$d$，如图4-8a所示。力偶对空间任一点$O$的矩矢为$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$，则有

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}') = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}') = \boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}_B\times\boldsymbol{F}'$$

由于$\boldsymbol{F}'=-\boldsymbol{F}$，故上式可改写为

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}') = (\boldsymbol{r}_A-\boldsymbol{r}_B)\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}_{AB}\times\boldsymbol{F}(\text{或 }\boldsymbol{r}_{AB}\times\boldsymbol{F}')$$

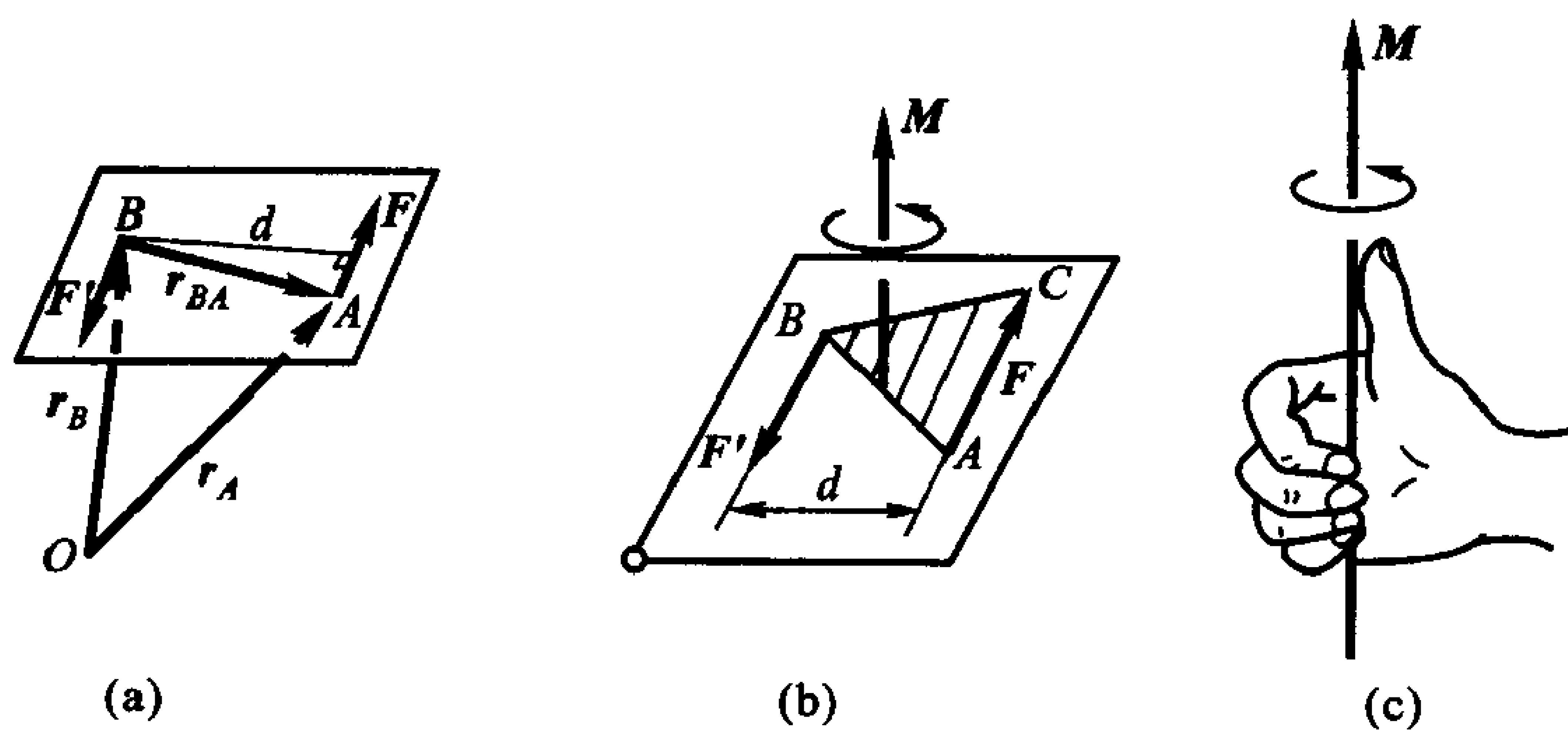


图4-8

计算表明，力偶对空间任一点的矩矢与矩心无关，以记号$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$或$\boldsymbol{M}$表示力偶矩矢，则

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_{BA}\times\boldsymbol{F} \quad (4-15)$$

由于矢$\boldsymbol{M}$无需确定矢的初端位置，这样的矢量称为**自由矢量**，如图4-8b所示。

总之，空间力偶对刚体的作用效果决定于下列三个因素：

(1) 矢量的模，即力偶矩大小$M=Fd=2A_{\triangle ABC}$(图4-8b)；

(2) 矢量的方位与力偶作用面相垂直(图4-8b)；

(3) 矢量的指向与力偶的转向的关系服从右手螺旋法则,如图 4-8c 所示。

2. 空间力偶等效定理

由于空间力偶对刚体的作用效果完全由力偶矩矢来确定,而力偶矩矢是自由矢量,因此两个空间力偶不论作用在刚体的什么位置,也不论力的大小、方向及力偶臂的大小,只要力偶矩矢相等,就等效。这就是空间力偶等效定理,即作用在同一刚体上的两个空间力偶,如果其力偶矩矢相等,则它们彼此等效。

这一定理表明:空间力偶可以平移到与其作用面平行的任意平面上而不改变力偶对刚体的作用效果;也可以同时改变力与力偶臂的大小或将力偶在其作用面内任意移转,只要力偶矩矢的大小、方向不变,其作用效果就不变。可见,力偶矩矢是空间力偶作用效果的唯一度量。

3. 空间力偶系的合成与平衡条件

任意个空间分布的力偶可合成为一个合力偶,合力偶矩矢等于各分力偶矩矢的矢量和,即

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \cdots + \boldsymbol{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i \tag{4-16}$$

证明:设有矩为 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$ 的两个力偶分别作用在相交的平面Ⅰ和Ⅱ内,如图 4-9 所示。首先证明它们合成的结果为一力偶。为此,在这两平面的交线上取任意线段 $AB = d$,利用力偶的等效条件,将两力偶各在其作用面内等效移转和变换,使它们具有共同的力偶臂 d,令 $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}'_1)$,$\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}'_2)$。再分别合成 A、B 两点的汇交力,得 $\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$,$\boldsymbol{F}'_R = \boldsymbol{F}'_1 + \boldsymbol{F}'_2$。由图 4-9 显见,$\boldsymbol{F}_R = -\boldsymbol{F}'_R$,由此组成一个合力偶$(\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{F}'_R)$,它作用在平面Ⅲ内,令其矩为 $\boldsymbol{M}$。由图 4-9 易得

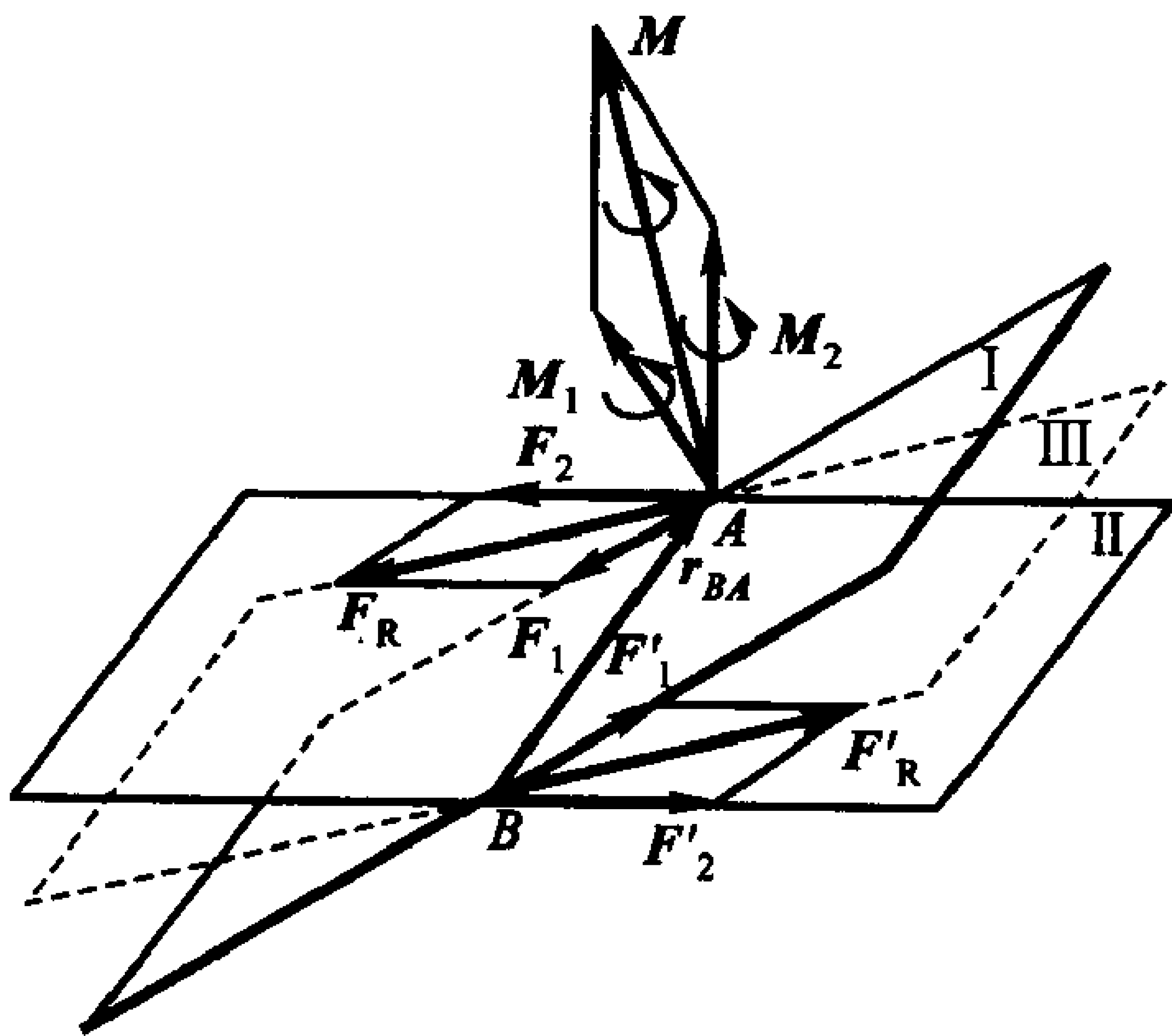


图 4-9

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}_{BA}\times\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\boldsymbol{r}_{BA}\times(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)=\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2$$

上式证得:合力偶矩矢等于原有两力偶矩矢的矢量和。

如有 n 个空间力偶,可逐次合成,则式(4-16)得证。

合力偶矩矢的解析表达式为

$$\boldsymbol{M}=M_x\boldsymbol{i}+M_y\boldsymbol{j}+M_z\boldsymbol{k} \tag{4-17}$$

将式 4-16 分别向 x,y,z 轴投影,有

$$\left.\begin{aligned} M_x&=M_{1x}+M_{2x}+\cdots+M_{nx}=\sum_{i=1}^{n}M_{ix}\\ M_y&=M_{1y}+M_{2y}+\cdots+M_{ny}=\sum_{i=1}^{n}M_{iy}\\ M_z&=M_{1z}+M_{2z}+\cdots+M_{nz}=\sum_{i=1}^{n}M_{iz}\end{aligned}\right\} \tag{4-18}$$

即合力偶矩矢在 x,y,z 轴上投影等于各分力偶矩矢在相应轴上投影的代数和(为便于书写,下标 i 可略去)。

例 4-5 工件如图 4-10a 所示,它的四个面上同时钻五个孔,每个孔所受的切削力偶矩均为 80 N·m。求工件所受合力偶的矩在 x,y,z 轴上的投影 M_x,M_y,M_z。

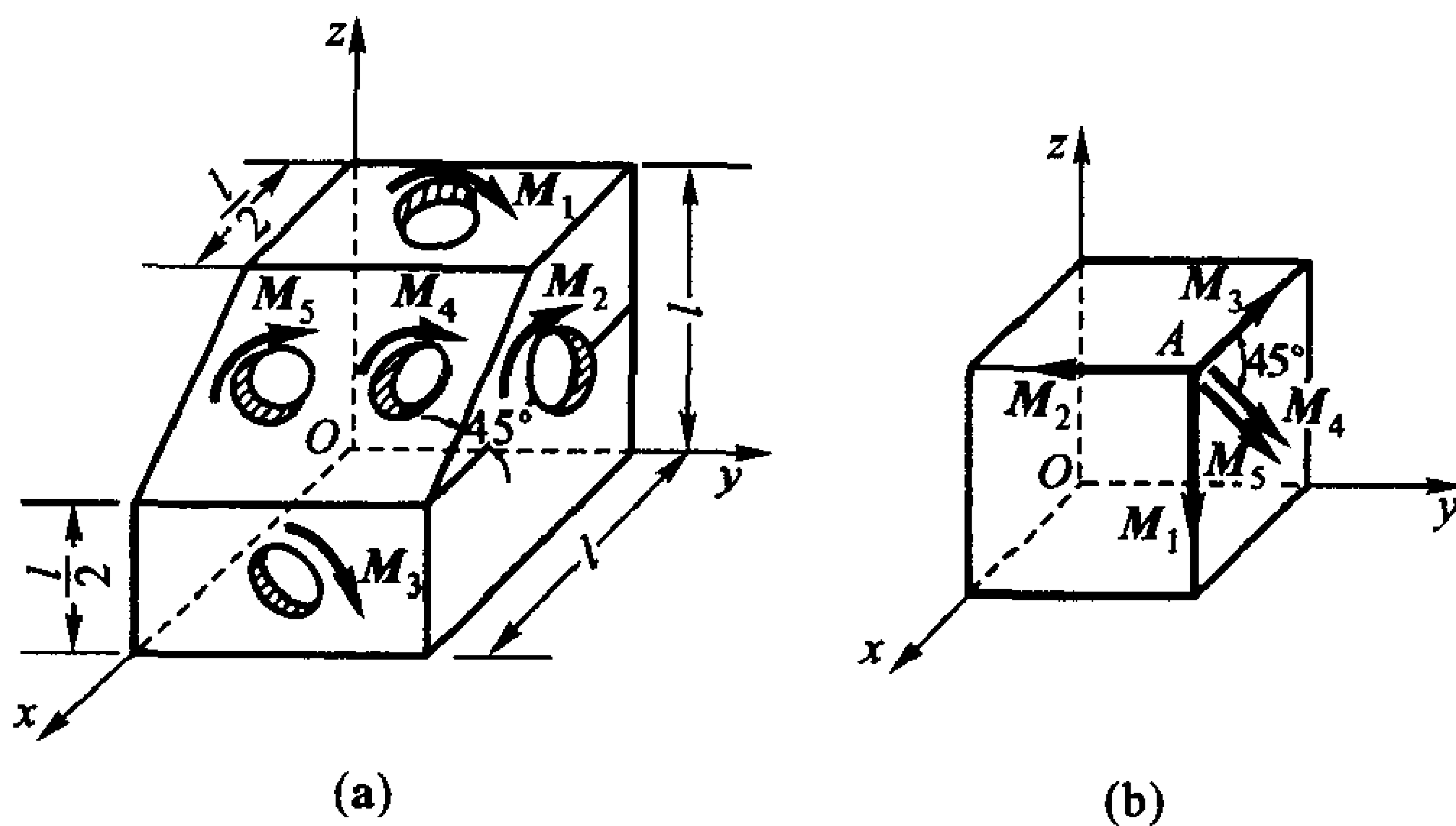


图 4-10

解: 将作用在四个面上的力偶用力偶矩矢量表示,并将它们平行移到点 A,如图 4-10b 所示。根据式(4-18),得

$$M_x=\sum M_x=-M_3-M_4\cos45^\circ-M_5\cos45^\circ=-193.1\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$M_y=\sum M_y=-M_2=-80\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$M_z=\sum M_z=-M_1-M_4\cos45^\circ-M_5\cos45^\circ=-193.1\ \mathrm{N\cdot m}$$

由于空间力偶系可以用一个合力偶来代替,因此,空间力偶系平衡的必要和充分条件是:该力偶系的合力偶矩等于零,亦即所有力偶矩矢的矢量和等于零,即

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i = 0 \tag{4-19}$$

欲使上式成立，必须同时满足：

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0 \tag{4-20}$$

上式为空间力偶系的平衡方程。即空间力偶系平衡的必要和充分条件为：该力偶系中所有各力偶矩矢在三个坐标轴上投影的代数和分别等于零(为便于书写，下标 i 可略去)。

上述三个独立的平衡方程可求解三个未知量。

例 4-6 O_1 和 O_2 圆盘与水平轴 AB 固连，O_1 盘面垂直于 z 轴，O_2 盘面垂直于 x 轴，盘面上分别作用有力偶$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_1')$、$(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_2')$，如图 4-11a 所示。如两盘半径均为 200 mm，$F_1 = 3$ N，$F_2 = 5$ N，$AB = 800$ mm，不计构件自重。求轴承 A 和 B 处的约束力。

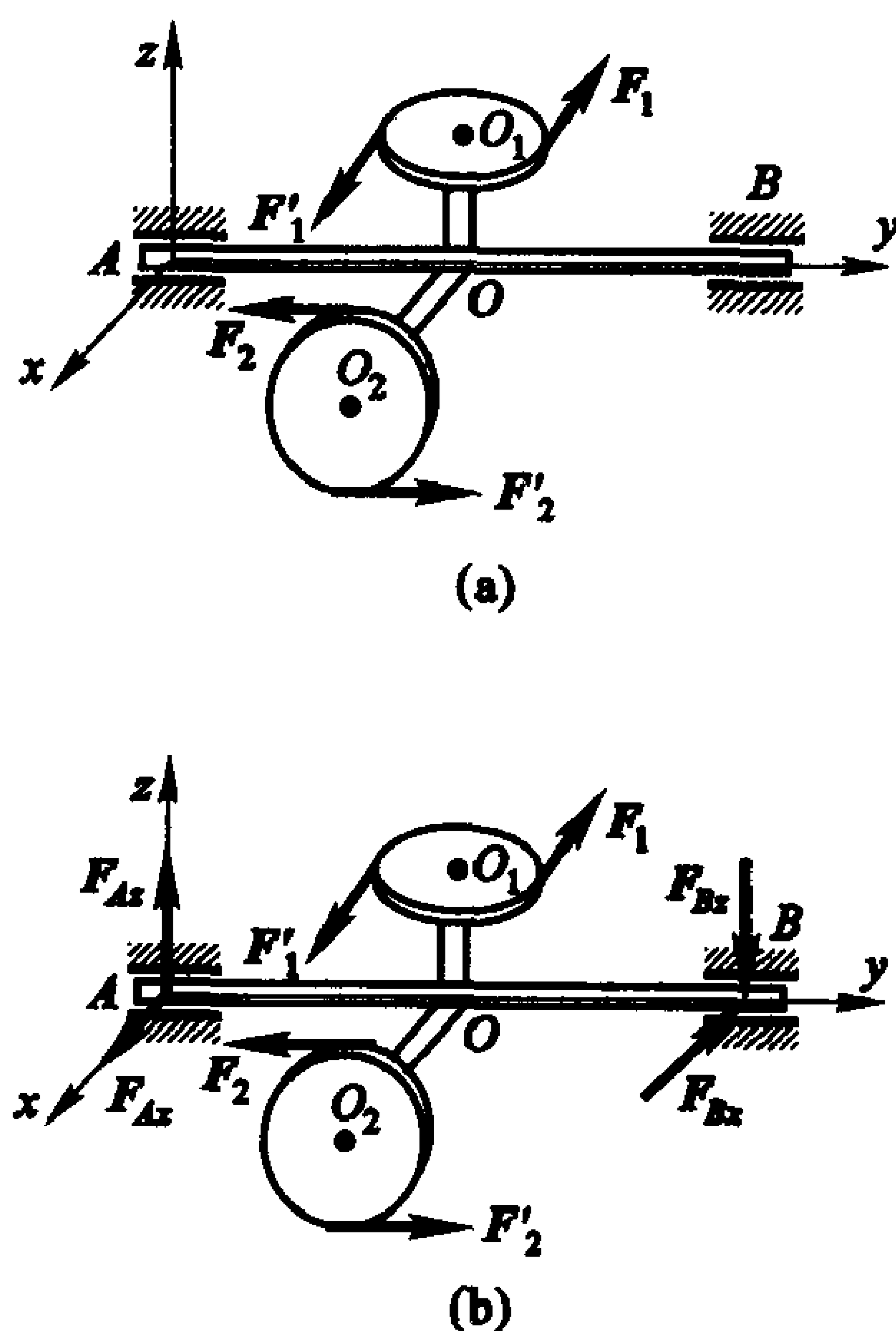


图 4-11

解： 取整体为研究对象，由于构件自重不计，主动力为两力偶，由力偶只能由力偶来平衡的性质，轴承 A，B 处的约束力也应形成力偶。设 A，B 处的约束力为 $\boldsymbol{F}_{Ax}$，$\boldsymbol{F}_{Az}$，$\boldsymbol{F}_{Bx}$，$\boldsymbol{F}_{Bz}$，方向如图 4-11b 所示，由力偶系的平衡方程，有

$$\sum M_x = 0, \quad 400\ \text{mm} F_2 - 800\ \text{mm} F_{Az} = 0$$

$$\sum M_z = 0, \quad 400\ \text{mm} F_1 + 800\ \text{mm} F_{Ax} = 0$$

解得

$$F_{Ax} = F_{Bx} = -1.5\ \text{N}, \quad F_{Az} = F_{Bz} = 2.5\ \text{N}$$

§4-4　空间任意力系向一点的简化·主矢和主矩

1. 空间任意力系向一点的简化

刚体上作用空间任意力系 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$(图 4-12a)。应用力的平移定理，依次将各力向简化中心 O 平移，同时附加一个相应的力偶。这样，原来的空间任意力系被空间汇交力系和空间力偶系两个简单力系等效替换，如图 4-12b 所示。其中

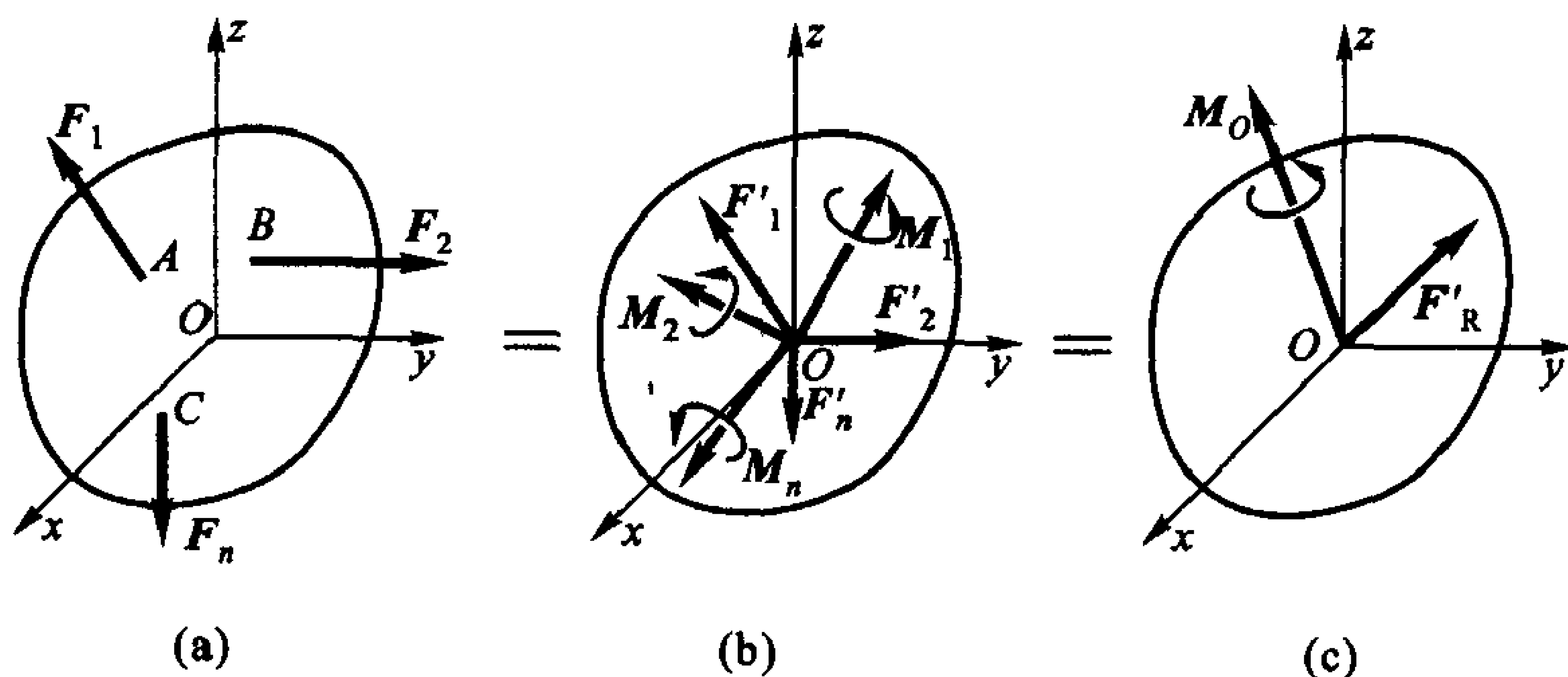


图 4-12

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{F}_i'&=\boldsymbol{F}_i\\ \boldsymbol{M}_i&=\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)\end{aligned}\right\}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

作用于点 O 的空间汇交力系可合成一力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}'$(图 4-12c)，此力的作用线通过点 O，其大小和方向等于力系的主矢，即

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}'=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=\sum_{i=1}^{n}F_{xi}\boldsymbol{i}+\sum_{i=1}^{n}F_{yi}\boldsymbol{j}+\sum_{i=1}^{n}F_{zi}\boldsymbol{k}\tag{4-21}$$

空间分布的力偶系可合成为一力偶(图 4-12c)。其力偶矩矢等于原力系对点 O 的主矩，即

$$\boldsymbol{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)\tag{4-22}$$

由力矩的解析表达式(4-9)，有

$$\boldsymbol{M}_O=\sum_{i=1}^{n}(y_iF_{zi}-z_iF_{yi})\boldsymbol{i}+\sum_{i=1}^{n}(z_iF_{xi}-x_iF_{zi})\boldsymbol{j}+\sum_{i=1}^{n}(x_iF_{yi}-y_iF_{xi})\boldsymbol{k}\tag{4-22$'$}$$

空间任意力系向任一点 O 简化，可得一力和一力偶。这个力的大小和方向等于该力系的主矢，作用线通过简化中心 O；这力偶的矩矢等于该力系对简化中心

的主矩。与平面任意力系一样,主矢与简化中心的位置无关,主矩一般与简化中心的位置有关。

式(4-22)′中,单位矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 前的系数,即主矩 $\boldsymbol{M}_O$ 沿 x,y,z 轴的投影,也等于力系各力对 x,y,z 轴之矩的代数和 $\sum M_x(\boldsymbol{F}),\sum M_y(\boldsymbol{F}),\sum M_z(\boldsymbol{F})$。

如果将力系向另一点 D 简化,设 $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{r}_D$。显然主矢仍为 $\boldsymbol{F}'_R$,主矩等于原力系对点 D 的力矩的矢量和。亦可利用力的平移定理将简化至点 O 的力和力偶平移到点 D,因此力系向点 D 简化的主矩为

$$\boldsymbol{M}_D=\boldsymbol{M}_O-\boldsymbol{r}_D\times\boldsymbol{F}'_R \text{ 或 } \boldsymbol{M}_O=\boldsymbol{M}_D+\boldsymbol{r}_D\times\boldsymbol{F}'_R$$

下面通过作用在飞机上的力系说明空间任意力系简化结果的实际意义。飞机在飞行时受到重力、升力、推力和阻力等力组成的空间任意力系的作用。通过其重心 O 作直角坐标系 $Oxyz$,如图 4-13 所示。将力系向飞机的重心 O 简化,可得一力 $\boldsymbol{F}'_R$ 和一力偶,其力偶矩矢为 $\boldsymbol{M}_O$。如果将这力和力偶矩矢向上述三坐标轴分解,则得到三个作用于重心 O 的正交分力 $\boldsymbol{F}'_{Rx},\boldsymbol{F}'_{Ry},\boldsymbol{F}'_{Rz}$ 和三个绕坐标轴的力偶矩 $\boldsymbol{M}_{Ox},\boldsymbol{M}_{Oy},\boldsymbol{M}_{Oz}$。可以看出它们的意义是

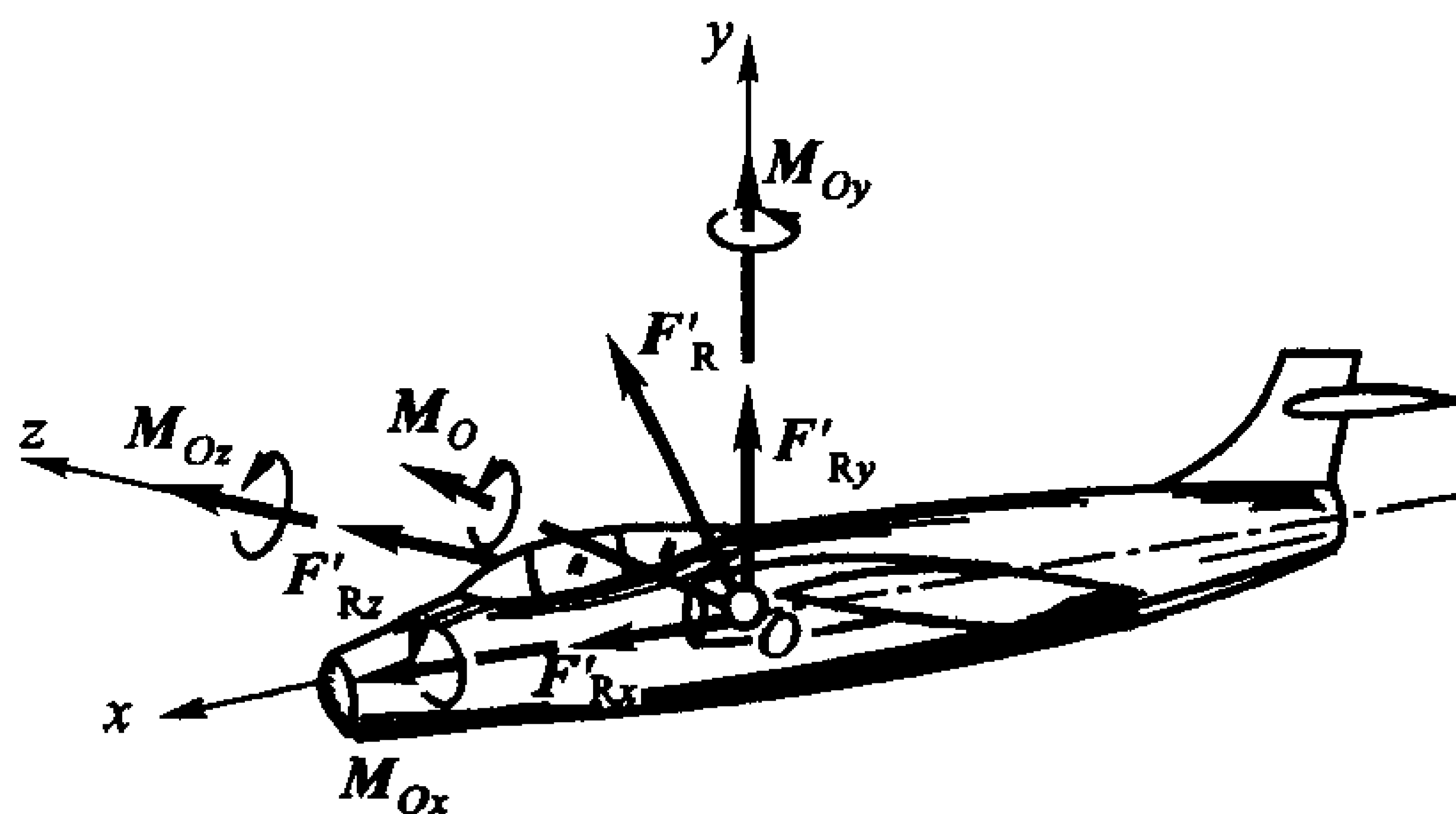


图 4-13

$\boldsymbol{F}'_{Rx}$——有效推进力; $\boldsymbol{F}'_{Ry}$——有效升力; $\boldsymbol{F}'_{Rz}$——侧向力;

$\boldsymbol{M}_{Ox}$——滚转力矩; $\boldsymbol{M}_{Oy}$——偏航力矩; $\boldsymbol{M}_{Oz}$——俯仰力矩。

2. 空间任意力系的简化结果分析

空间任意力系向一点简化可能出现下列四种情况,即(1) $\boldsymbol{F}'_R=0,\boldsymbol{M}_O\neq0$;(2) $\boldsymbol{F}'_R\neq0,\boldsymbol{M}_O=0$;(3) $\boldsymbol{F}'_R\neq0,\boldsymbol{M}_O\neq0$;(4) $\boldsymbol{F}'_R=0,\boldsymbol{M}_O=0$。现分别加以讨论。

(1) 空间任意力系简化为一合力偶的情形

当空间任意力系向任一点简化时,若主矢 $\boldsymbol{F}'_R=0$,主矩 $\boldsymbol{M}_O\neq0$,这时得一与原力系等效的合力偶,其合力偶矩矢等于原力系对简化中心的主矩。由于力偶矩矢与矩心位置无关,因此,在这种情况下,主矩与简化中心的位置无关。

(2) 空间任意力系简化为一合力的情形

当空间任意力系向任一点简化时，若主矢 $\boldsymbol{F}'_{R}\neq 0$，而主矩 $\boldsymbol{M}_{O}=0$，这时得一与原力系等效的合力，合力的作用线通过简化中心 O，其大小和方向等于原力系的主矢。

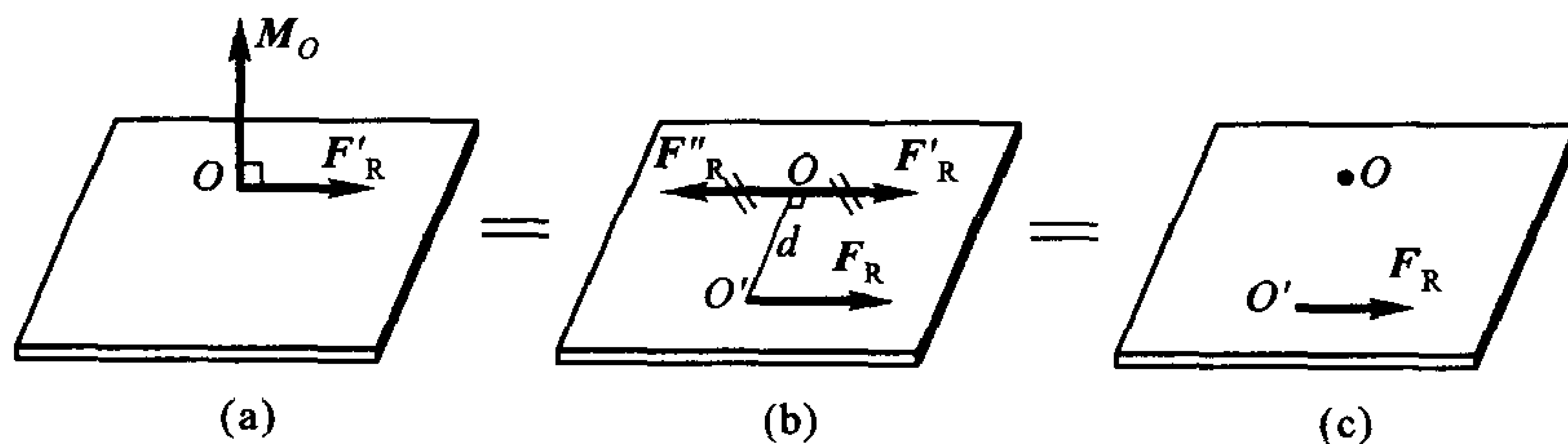


图 4-14

若空间任意力系向一点简化的结果为主矢 $\boldsymbol{F}'_{R}\neq 0$，又主矩 $\boldsymbol{M}_{O}\neq 0$，且 $\boldsymbol{F}'_{R}\perp\boldsymbol{M}_{O}$（图 4-14a）。这时，力 $\boldsymbol{F}'_{R}$ 和力偶矩矢为 $\boldsymbol{M}_{O}$ 的力偶（$\boldsymbol{F}''_{R}$，$\boldsymbol{F}_{R}$）在同一平面内（图 4-14b），可将力 $\boldsymbol{F}'_{R}$ 与力偶（$\boldsymbol{F}''_{R}$，$\boldsymbol{F}_{R}$）进一步合成，得作用于点 O' 的一个力 $\boldsymbol{F}_{R}$（图 4-14c）。此力即为原力系的合力，其大小和方向等于原力系的主矢，其作用线离简化中心 O 的距离为

$$d=\frac{|\boldsymbol{M}_{O}|}{F_{R}}\tag{4-23}$$

(3) 空间任意力系简化为力螺旋的情形

如果空间任意力系向一点简化后，主矢和主矩都不等于零，而 $\boldsymbol{F}'_{R}/\!/\boldsymbol{M}_{O}$，这种结果称为**力螺旋**，如图 4-15 所示。所谓力螺旋就是由一力和一力偶组成的力系，其中的力垂直于力偶的作用面。例如，钻孔时的钻头对工件的作用以及拧木螺钉时螺丝刀对螺钉的作用都是力螺旋。

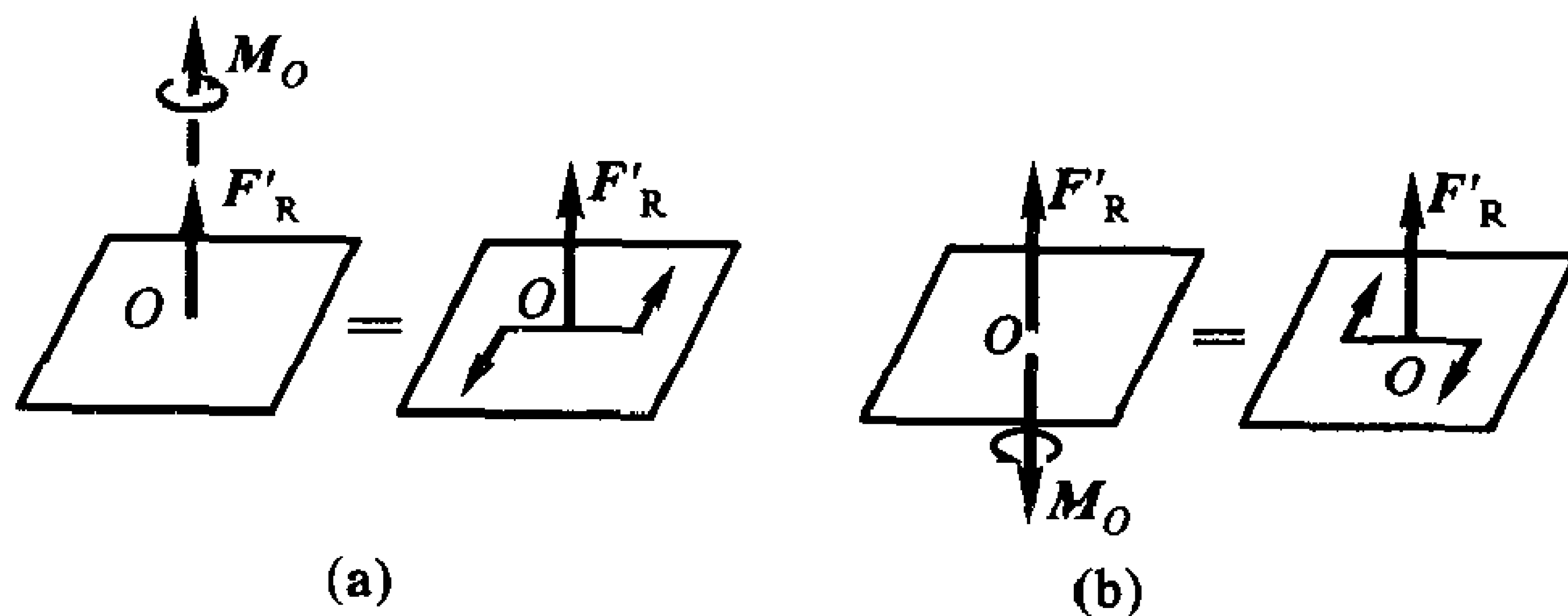


图 4-15

力螺旋是由静力学的两个基本要素力和力偶组成的最简单的力系，不能再

进一步合成。力偶的转向和力的指向符合右手螺旋法则的称为右螺旋(图 4-15a),否则符合左手螺旋法则的称为左螺旋(图 4-15b)。力螺旋的力作用线称为该力螺旋的中心轴。在上述情形下,中心轴通过简化中心。

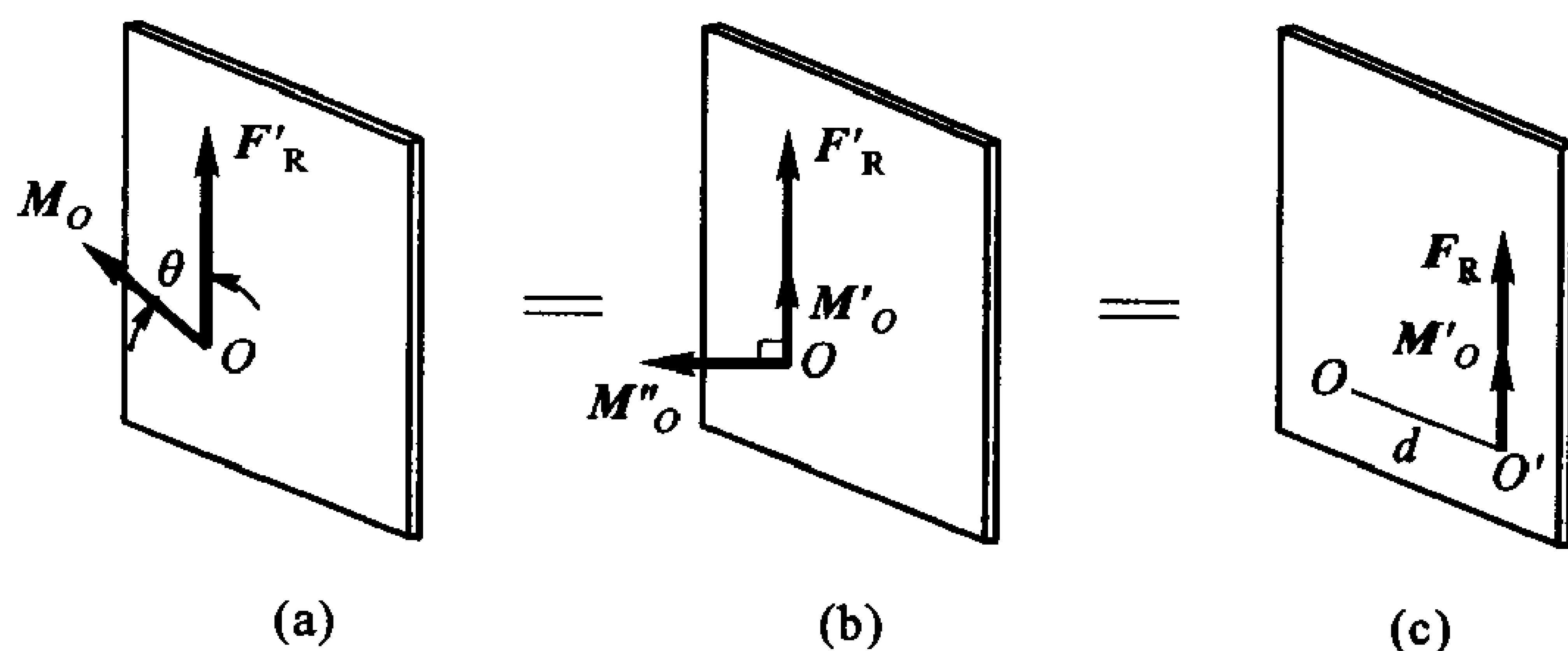


图 4-16

如果 $F'_R \neq 0$, $M_O \neq 0$,同时两者既不平行,又不垂直,如图 4-16a 所示。此时可将 M_O 分解为两个分力偶 M''_O 和 M'_O,它们分别垂直于 F'_R 和平行于 F'_R,如图 4-16b 所示,则 M''_O 和 F'_R 可用作用于点 O' 的力 F_R 来代替。由于力偶矩矢是自由矢量,故可将 M'_O 平行移动,使之与 F_R 共线。这样便得一力螺旋,其中心轴不在简化中心 O,而是通过另一点 O',如图 4-16c 所示。O,O'两点间的距离为

$$d=\frac{|M''_O|}{F'_R}=\frac{M_O\sin\theta}{F'_R} \tag{4-24}$$

可见,一般情形下空间任意力系可合成为力螺旋。

(4) 空间任意力系简化为平衡的情形

当空间任意力系向任一点简化时,若主矢 $F'_R=0$,主矩 $M_O=0$,这是空间任意力系平衡的情形,将在下节详细讨论。

§4-5　空间任意力系的平衡方程

1. 空间任意力系的平衡方程

空间任意力系处于平衡的必要和充分条件是:这力系的主矢和对于任一点的主矩都等于零,即

$$F'_R=0; \qquad M_O=0$$

根据式(4-21)和(4-22),可将上述条件写成空间任意力系的平衡方程

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_x=0, &&\sum F_y=0, &&\sum F_z=0\\&\sum M_x(F)=0, &&\sum M_y(F)=0, &&\sum M_z(F)=0\end{aligned}\right\} \tag{4-25}$$

空间任意力系平衡的必要和充分条件是：所有各力在三个坐标轴中每一个轴上的投影的代数和等于零，以及这些力对于每一个坐标轴的矩的代数和也等于零（为便于书写，下标 i 已略去）。

我们可以从空间任意力系的普遍平衡规律中导出特殊情况的平衡规律，例如空间平行力系、空间汇交力系和平面任意力系等平衡方程。现以空间平行力系为例，其余情况读者可自行推导。

如图 4 - 17 所示的空间平行力系，其 z 轴与这些力平行，则各力对于 z 轴的矩等于零。又由于 x 和 y 轴都与这些力垂直，所以各力在这两轴上的投影也等于零。因而在平衡方程组(4 - 25)中，第一、第二和第六个方程成了恒等式。因此，空间平行力系只有三个平衡方程，即

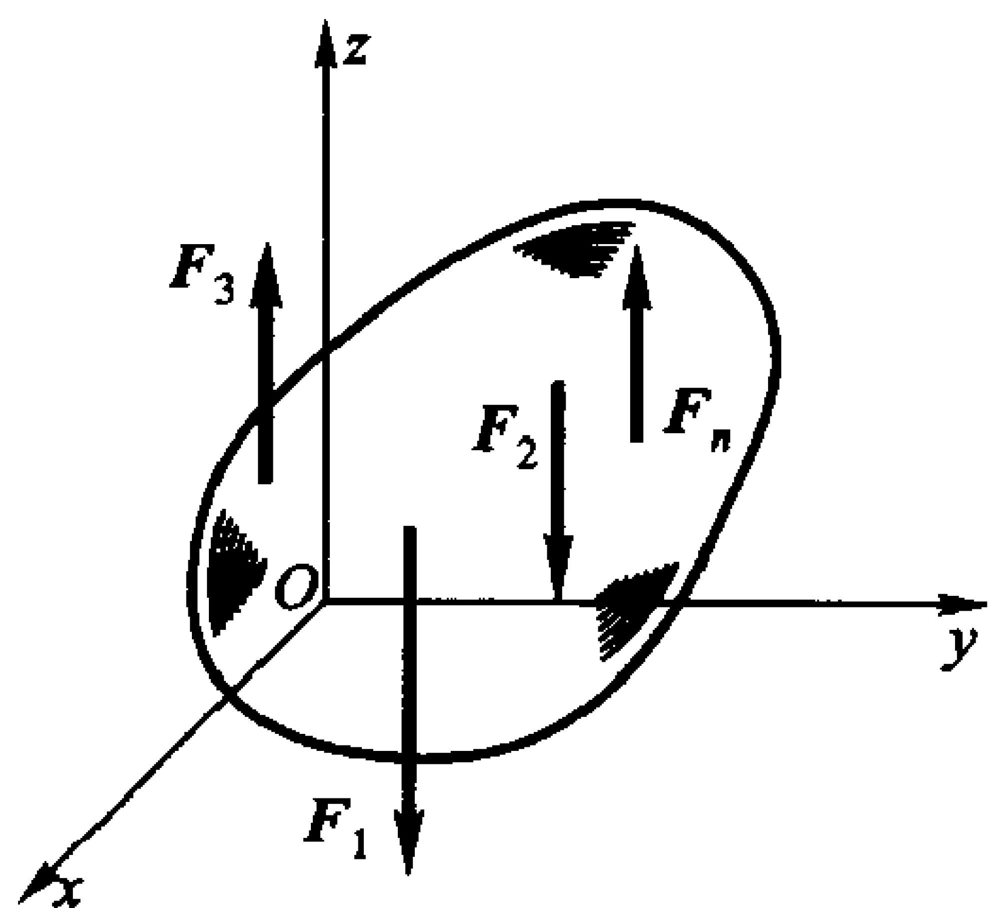


图 4 - 17

$$\sum F_z = 0, \quad \sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0, \quad \sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0 \qquad (4-26)$$

2. 空间约束的类型举例

一般情况下，当刚体受到空间任意力系作用时，在每个约束处，其约束力的未知量可能有 1 个到 6 个。决定每种约束的约束力未知量个数的基本方法是：观察被约束物体在空间可能的 6 种独立的位移中（沿 x, y, z 三轴的移动和绕此三轴的转动），有哪几种位移被约束所阻碍。阻碍移动的是约束力；阻碍转动的是约束力偶。现将几种常见的约束及其相应的约束力综合列表，如表 4 - 1 所示。

分析实际的约束时，有时要忽略一些次要因素，抓住主要因素，作一些合理的简化。例如，导向轴承能阻碍轴沿 y 和 z 轴的移动，并能阻碍绕 y 轴和 z 轴的转动，所以有 4 个约束作用力 $\boldsymbol{F}_{Ay}, \boldsymbol{F}_{Az}, \boldsymbol{M}_{Ay}, \boldsymbol{M}_{Az}$；而径向轴承限制轴绕 y 和 z 轴的转动作用很小，故 $\boldsymbol{M}_{Ay}$ 和 $\boldsymbol{M}_{Az}$ 可忽略不计，所以只有两个约束力 $\boldsymbol{F}_{Ay}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Az}$。又如，一般柜门都装有两个合页，形如表 4 - 1 中的蝶铰链，它主要限制物体沿 y, z 方向的移动，因而有两个约束力 $\boldsymbol{F}_{Ay}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Az}$。合页不限制物体绕转轴的转

表 4－1 空间约束的类型及其约束力举例

	约束力未知量	约束类型
1	F_{Az}	光滑表面 滚动支座 绳索 二力杆
2	F_{Az} F_{Ay}	径向轴承 圆柱铰链 铁轨 蝶铰链
3	F_{Az} F_{Ay} F_{Ax}	球形铰链 止推轴承
4	(a) M_{Az} F_{Az} M_{Ay} F_{Ay} (b) F_{Az} M_{Ay} F_{Ay} F_{Ax}	导向轴承 (a) 万向接头 (b)
5	(a) F_{Az} M_{Az} M_{Ax} F_{Ay} F_{Ax} (b) F_{Az} M_{Az} F_{Ay} M_{Ax} M_{Ay}	带有销子的夹板 (a) 导轨 (b)
6	F_{Az} M_{Az} M_{Ay} F_{Ay} F_{Ax} M_{Ax}	空间的固定端支座

动，单个合页对物体绕 y,z 轴转动的限制作用也很小，因而没有约束力偶。而当物体受到沿合页轴向力作用时，则两个合页中的一个将限制物体沿轴向移动，应视为止推轴承。

如果刚体只受平面力系的作用，则垂直于该平面的约束力和绕平面内两轴的约束力偶都应为零，相应减少了约束力的数目。例如，在空间任意力系作用下，固定端的约束力共有 6 个，即 $\boldsymbol{F}_{Ax},\boldsymbol{F}_{Ay},\boldsymbol{F}_{Az},\boldsymbol{M}_{Ax},\boldsymbol{M}_{Ay},\boldsymbol{M}_{Az}$；而在 Oyz 平面内受平面任意力系作用时，固定端的约束力就只有 3 个，即 $\boldsymbol{F}_{Ay},\boldsymbol{F}_{Az},\boldsymbol{M}_{Ax}$。

3. 空间力系平衡问题举例

例 4-7 图 4-18 所示的三轮小车，自重 $P=8$ kN，作用于点 E，载荷 $P_1=10$ kN，作用于点 C。求小车静止时地面对车轮的约束力。

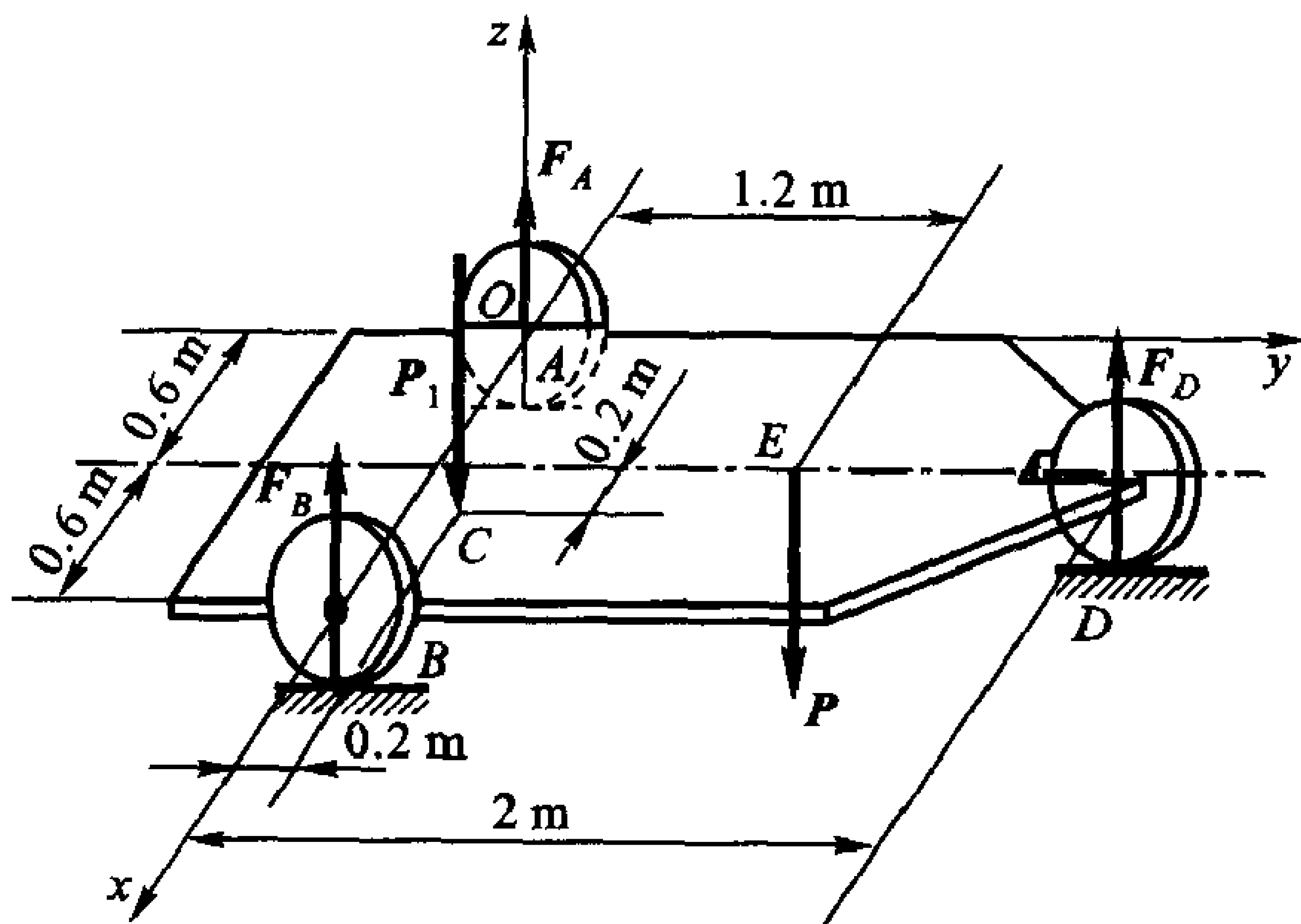


图 4-18

解： 以小车为研究对象，受力如图 4-18 所示。其中 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}_1$ 是主动力，$\boldsymbol{F}_A,\boldsymbol{F}_B,\boldsymbol{F}_D$ 为地面的约束力，此 5 个力相互平行，组成空间平行力系。

取坐标系 $Oxyz$ 如图所示，列出三个平衡方程：

$$\sum F_z=0,\quad -P_1-P+F_A+F_B+F_D=0 \tag{a}$$

$$\sum M_x(\boldsymbol{F})=0,\quad -0.2\ \text{m}\cdot P_1-1.2\ \text{m}\cdot P+2\ \text{m}\cdot F_D=0 \tag{b}$$

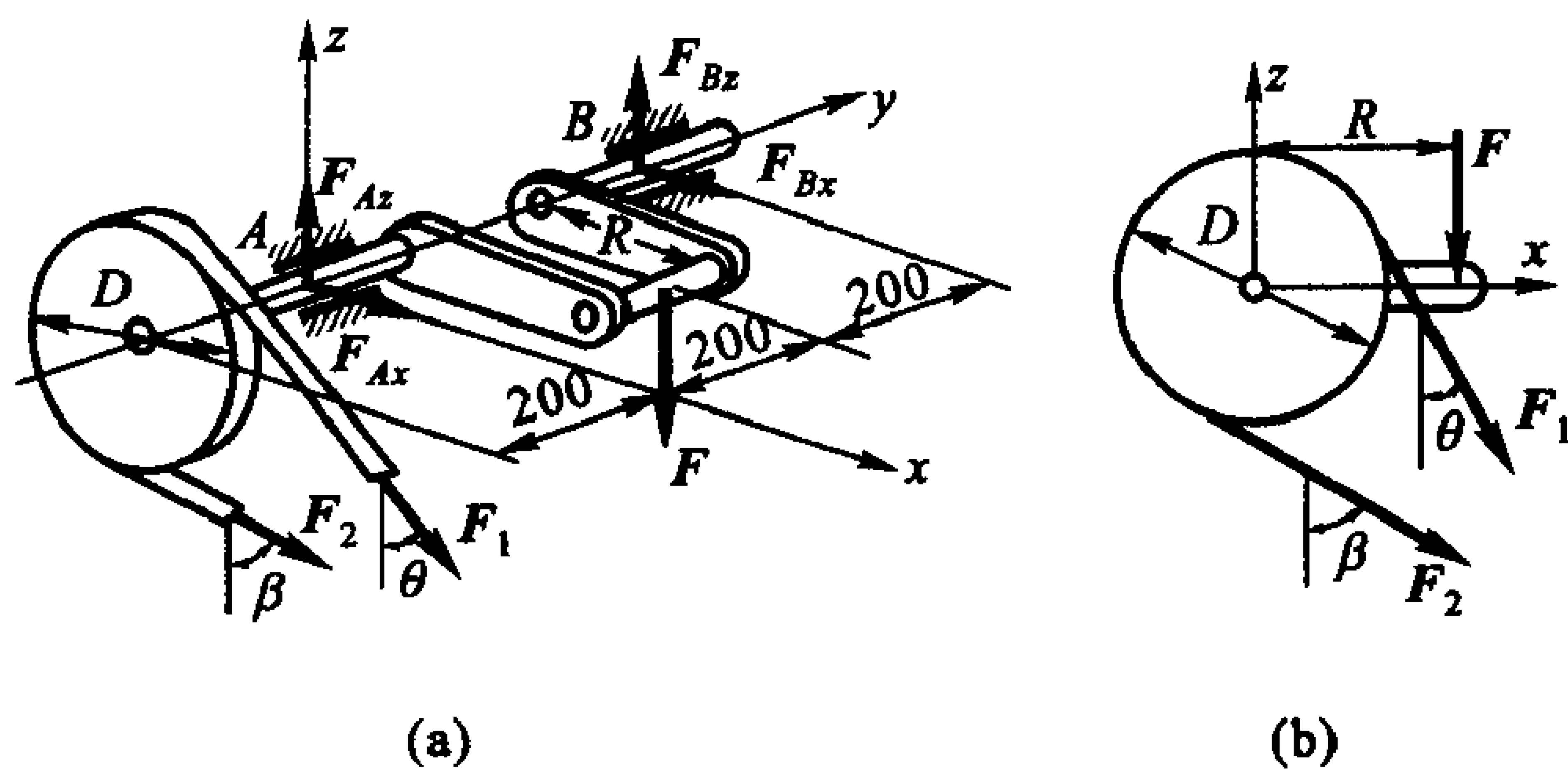
$$\sum M_y(\boldsymbol{F})=0,\quad 0.8\ \text{m}\cdot P_1+0.6\ \text{m}\cdot P-0.6\ \text{m}\cdot F_D-1.2\ \text{m}\cdot F_B=0 \tag{c}$$

解得

$$F_D=5.8\ \text{kN},\quad F_B=7.777\ \text{kN},\quad F_A=4.423\ \text{kN}$$

例 4-8 在图 4-19a 中，胶带的拉力 $F_2=2F_1$，曲柄上作用有铅垂力 $F=2\ 000$ N。已知胶带轮的直径 $D=400$ mm，曲柄长 $R=300$ mm，胶带 1 和胶带 2 与铅垂线间夹角分别为 θ 和 β，$\theta=30°$，$\beta=60°$（参见图 4-19b），其他尺寸如图所示。求胶带拉力和轴承约束力。

解： 以整个轴为研究对象，受力分析如图 4-19a 所示，其上有力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}$ 及轴承约束力 $\boldsymbol{F}_{Ax},\boldsymbol{F}_{Az},\boldsymbol{F}_{Bx},\boldsymbol{F}_{Bz}$。轴受空间任意力系作用，选坐标轴如图所示，列出平衡方程：



(a) (b)

图 4-19

$$\sum F_x=0,\quad F_1\sin 30^\circ+F_2\sin 60^\circ+F_{Ax}+F_{Bx}=0$$

$$\sum F_y=0,\quad 0=0$$

$$\sum F_z=0,\quad -F_1\cos 30^\circ-F_2\cos 60^\circ-F+F_{Az}+F_{Bz}=0$$

$$\sum M_x(\boldsymbol{F})=0,\quad F_1\cos 30^\circ\times 200\text{ mm}+F_2\cos 60^\circ\times 200\text{ mm}-F\times 200\text{ mm}+F_{Bz}\times 400\text{ mm}=0$$

$$\sum M_y(\boldsymbol{F})=0,\quad FR-\frac{D}{2}(F_2-F_1)=0$$

$$\sum M_z(\boldsymbol{F})=0,\quad F_1\sin 30^\circ\times 200\text{ mm}+F_2\sin 60^\circ\times 200\text{ mm}-F_{Bx}\times 400\text{ mm}=0$$

又有

$$F_2=2F_1$$

联立上述方程,解得

$$F_1=3\ 000\text{ N},\quad F_2=6\ 000\text{N}$$

$$F_{Ax}=-10\ 044\text{ N},\quad F_{Az}=9\ 397\text{ N}$$

$$F_{Bx}=3\ 348\text{ N},\quad F_{Bz}=-1\ 799\text{ N}$$

此题中,平衡方程$\sum F_y=0$成为恒等式,独立的平衡方程只有5个;在题设条件$F_2=2F_1$之下,才能解出上述6个未知量。

例4-9 车床主轴如图4-20a所示。已知车刀对工件的切削力为:径向切削力$F_x=4.25$ kN,纵向切削力$F_y=6.8$ kN,主切削力(切向)$F_z=17$ kN,方向如图所示。在直齿轮C上有切向力$\boldsymbol{F}_t$和径向力$\boldsymbol{F}_r$,且$F_r=0.36F_t$。齿轮C的节圆半径为$R=50$ mm,被切削工件的半径为$r=30$ mm。卡盘及工件等自重不计,其余尺寸如图示。当主轴匀速转动时,求:(1)齿轮啮合力F_t及F_r;(2)径向轴承A和止推轴承B的约束力;(3)三爪卡盘E在O处对工件的约束力。

解: 先取主轴、卡盘、齿轮以及工件系统为研究对象,受力如图4-20a所示,为一空间任意力系。取坐标系$Axyz$如图所示,列平衡方程:

$$\sum F_x=0,\quad F_{Bx}-F_t+F_{Ax}-F_x=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{By}-F_y=0$$

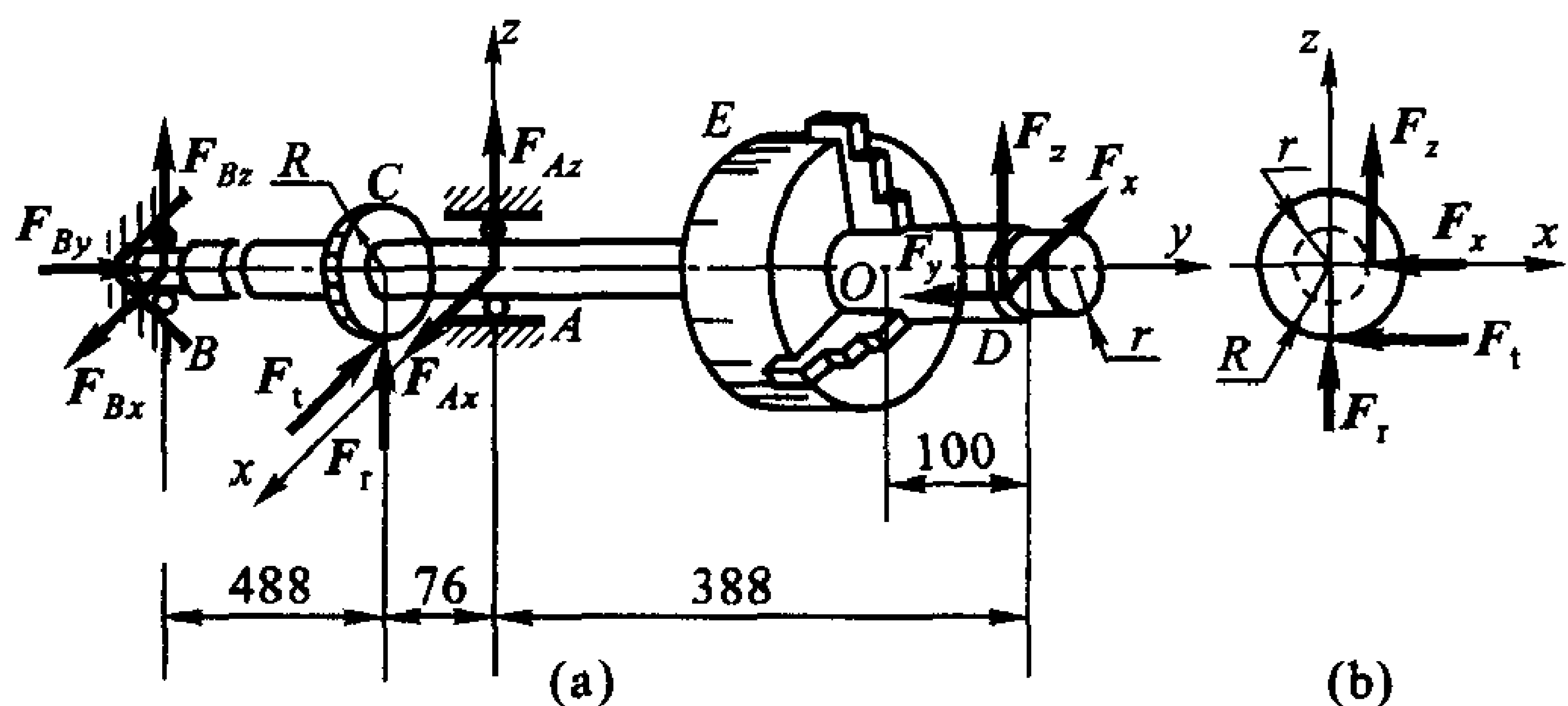


图 4-20

$\sum F_z=0,\quad F_{Bz}+F_r+F_{Az}+F_z=0$

$\sum M_x(\boldsymbol{F})=0,\quad -(488+76)\text{mm}\cdot F_{Bz}-76\text{mm}\cdot F_r+388\text{mm}\cdot F_z=0$

$\sum M_y(\boldsymbol{F})=0,\quad F_tR-F_zr=0$

$\sum M_z(\boldsymbol{F})=0,\quad (488+76)\text{mm}\cdot F_{Bx}-76\text{mm}\cdot F_t-30\text{mm}\cdot F_y+388\text{mm}\cdot F_x=0$

又,按题意有

$$F_r=0.36F_t$$

以上共有 7 个方程,可解出全部 7 个未知量,即

$$F_t=10.2\ \text{kN},\quad F_r=3.67\ \text{kN}$$

$$F_{Ax}=15.64\ \text{kN},\quad F_{Az}=-31.87\ \text{kN}$$

$$F_{Bx}=-1.19\ \text{kN},\quad F_{By}=6.8\ \text{kN},\quad F_{Bz}=11.2\ \text{kN}$$

再取工件为研究对象,其上除受 3 个切削力外,还受到卡盘(空间插入端约束)对工件的 6 个约束力 $\boldsymbol{F}_{Ox},\boldsymbol{F}_{Oy},\boldsymbol{F}_{Oz},\boldsymbol{M}_x,\boldsymbol{M}_y,\boldsymbol{M}_z$,如图 4-21 所示。

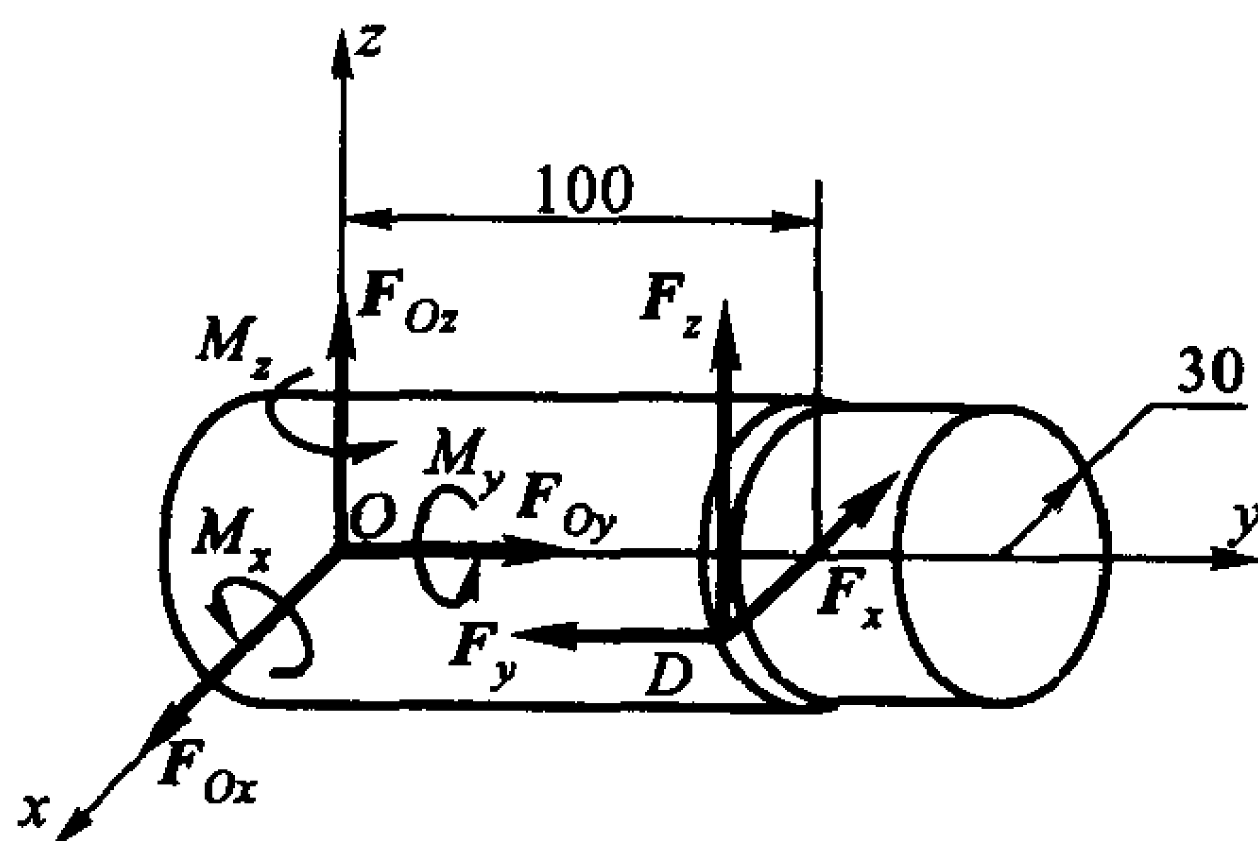


图 4-21

取坐标轴系 $Oxyz$ 如图,列平衡方程:

$\sum F_x=0,\quad F_{Ox}-F_x=0$

$\sum F_y=0,\quad F_{Oy}-F_y=0$

$\sum F_z=0,\quad F_{Oz}+F_z=0$

$\sum M_x(\boldsymbol{F})=0,\quad M_x+100\ \text{mm}\cdot F_z=0$

$\sum M_y(\boldsymbol{F})=0,\quad M_y-30\ \text{mm}\cdot F_z=0$

$\sum M_z(\boldsymbol{F})=0,\quad M_z+100\ \text{mm}\cdot F_x-30\ \text{mm}\cdot F_y=0$

求解上述方程,得

$F_{Ox}=4.25\ \text{kN},\quad F_{Oy}=6.8\ \text{kN},\quad F_{Oz}=-17\ \text{kN}$

$M_x=-1.7\ \text{kN·m},\quad M_y=0.51\ \text{kN·m},\quad M_z=-0.22\ \text{kN·m}$

空间任意力系有 6 个独立的平衡方程,可求解 6 个未知量,但其平衡方程不局限于式(4-25)所示的形式。为使解题简便,每个方程中最好只包含一个未知量。为此,选投影轴时应尽量与其余未知力垂直;选取矩的轴时应尽量与其余的未知力平行或相交。投影轴不必相互垂直,取矩的轴也不必与投影轴重合,力矩方程的数目可取 3 个至 6 个。现举例如下。

例 4-10 图 4-22 所示均质长方板由六根直杆支持于水平位置,直杆两端各用球铰链与板和地面连接。板重为 $\boldsymbol{P}$,在 A 处作用一水平力 $\boldsymbol{F}$,且 $F=2P$。求各杆的内力。

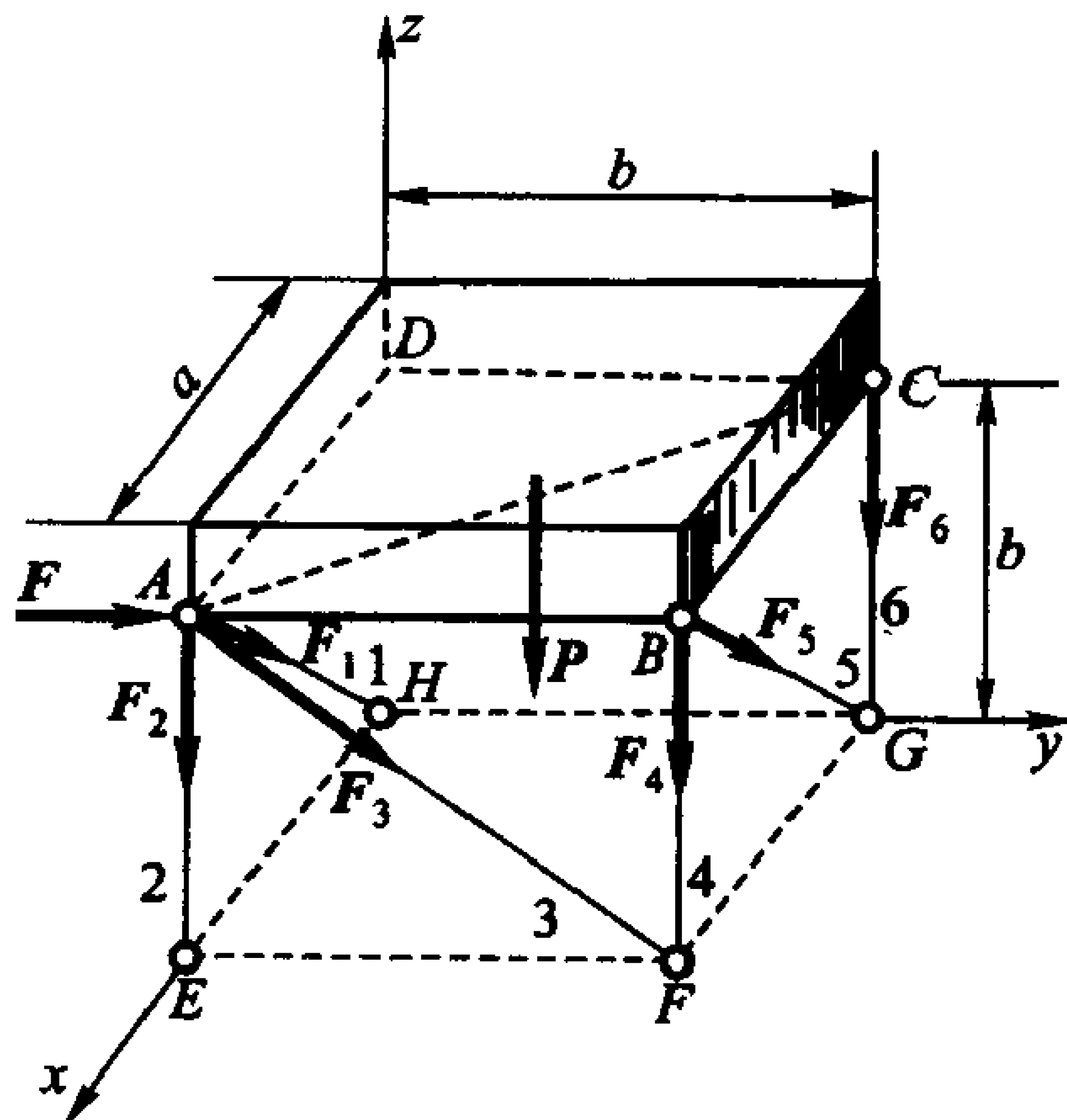


图 4-22

解: 取长方体刚板为研究对象,各支杆均为二力杆,设它们均受拉力。板的受力图如图 4-22 所示。列平衡方程:

$$\sum M_{AE}(\boldsymbol{F})=0,\quad F_5=0 \tag{a}$$

$$\sum M_{BF}(\boldsymbol{F})=0,\quad F_1=0 \tag{b}$$

$$\sum M_{AC}(\boldsymbol{F})=0,\quad F_4=0 \tag{c}$$

$$\sum M_{AB}(\boldsymbol{F})=0,\quad P\frac{a}{2}+F_6a=0 \tag{d}$$

解得

$$F_6=-\frac{P}{2}(\text{压力})$$

由

$$\sum M_{DH}(\boldsymbol{F})=0,Fa+F_3\cos 45^\circ\cdot a=0 \tag{e}$$

解得

$$F_3=-2\sqrt{2}P(\text{压力})$$

由
$$\sum M_{FG}(\boldsymbol{F})=0,\quad Fb-F_2b-P\frac{b}{2}=0 \tag{f}$$

解得

$$F_2=1.5P(\text{拉力})$$

此例中用6个力矩方程求得6个杆的内力。一般,力矩方程比较灵活,常可使一个方程只含一个未知量。当然也可以采用其他形式的平衡方程求解。如用$\sum F_x=0$代替式(b),同样求得$F_1=0$;又,可用$\sum F_y=0$代替式(e),同样求得$F_3=-2\sqrt{2}P$。读者还可以试用其他方程求解。但无论怎样列方程,独立平衡方程的数目只有6个。空间任意力系平衡方程的基本形式为式(4－25),即三个投影方程和三个力矩方程,它们是相互独立的。其他不同形式的平衡方程还有很多组,也只有6个独立方程,由于空间情况比较复杂,本书不再讨论其独立性条件,但只要各用一个方程逐个求出各未知数,这6个方程一定是独立的。

§4－6 重　心

1. 平行力系中心

平行力系中心是平行力系合力通过的一个点。设在刚体上A,B两点作用两个平行力$\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$,如图4－23所示。将其合成,得合力矢为

$$\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$$

由合力矩定理可确定合力作用点C:

$$\frac{F_1}{BC}=\frac{F_2}{AC}=\frac{F_R}{AB}$$

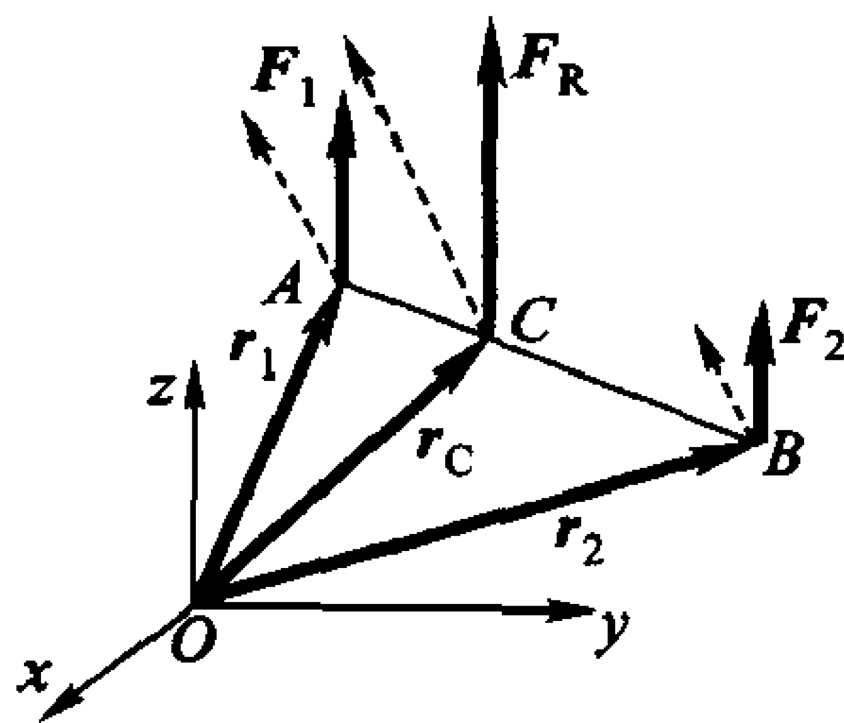


图4－23

若将原有各力绕其作用点转过同一角度,使它们保持相互平行,则合力$\boldsymbol{F}_R$仍与各力平行也绕点C转过相同的角度,且合力的作用点C不变,如图4－23所示。上面的分析对反向平行力也适用。对于多个力组成的平行力系,以上的分析方法和结论仍然适用。

由此可知,平行力系合力作用点的位置仅与各平行力的大小和作用点的位置有关,而与各平行力的方向无关。称该点为此平行力系的中心。

取各力作用点矢径如图4－23所示,由合力矩定理,得

$$\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_2$$

设力作用线方向的单位矢量为$\boldsymbol{F}^0$,则上式变为

$$\boldsymbol{r}_C \times F_R \boldsymbol{F}^0 = \boldsymbol{r}_1 \times F_1 \boldsymbol{F}^0 + \boldsymbol{r}_2 \times F_2 \boldsymbol{F}^0$$

从而得

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{F_1 \boldsymbol{r}_1 + F_2 \boldsymbol{r}_2}{F_R} = \frac{F_1 \boldsymbol{r}_1 + F_2 \boldsymbol{r}_2}{F_1 + F_2}$$

若有若干个力组成的平行力系，用上述方法可以求得合力大小 $F_R = \sum F_i$，合力方向与各力方向平行，合力的作用点为

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum F_i \boldsymbol{r}_i}{\sum F_i} \tag{4-27}$$

显然，$\boldsymbol{r}_C$ 只与各力的大小及作用点有关，而与平行力系的方向无关。点 C 即为此平行力系的中心。

将式(4-27)投影到图 4-23 中的直角坐标轴上，得

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \quad y_C = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}, \quad z_C = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i} \tag{4-28}$$

2. 重心

地球半径很大，地表面物体的**重力**可以看作是平行力系，此平行力系的中心即物体的**重心**。重心有确定的位置，与物体在空间的位置无关。

设物体由若干部分组成，其第 i 部分重为 P_i，重心为(x_i, y_i, z_i)，则由式(4-28)可得物体的重心为

$$x_C = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}, \quad y_C = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i}, \quad z_C = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i} \tag{4-29}$$

如果物体是均质的，由式(4-29)可得

$$x_C = \frac{\int_V x \mathrm{d}V}{V}, \quad y_C = \frac{\int_V y \mathrm{d}V}{V}, \quad z_C = \frac{\int_V z \mathrm{d}V}{V} \tag{4-30}$$

式中 V 为物体的体积。显然，均质物体的**重心**就是几何中心，即**形心**。

3. 确定物体重心的方法

(1) 简单几何形状物体的重心

如均质物体有对称面，或对称轴，或对称中心，不难看出，该物体的重心必相应地在这个对称面，或对称轴，或对称中心上。如椭球体、椭圆面或三角形的重心都在其几何中心上，平行四边形的重心在其对角线的交点上，等等。简单形状物体的重心可从工程手册上查到，表 4-2 列出了常见的几种简单形状物体的重心。

表 4-2　简单形体重心表

图　形	重心位置	图　形	重心位置
三角形	在中线的交点 $y_C=\frac{1}{3}h$	梯形	$y_C=\frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$
圆弧	$x_C=\frac{r\sin\varphi}{\varphi}$ 对于半圆弧 $x_C=\frac{2r}{\pi}$	弓形	$x_C=\frac{2}{3}\frac{r^3\sin^3\varphi}{A}$ 面积 $A=\frac{r^2(2\varphi-\sin 2\varphi)}{2}$
扇形	$x_C=\frac{2}{3}\frac{r\sin\varphi}{\varphi}$ 对于半圆 $x_C=\frac{4r}{3\pi}$	部分圆环	$x_C=\frac{2}{3}\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\frac{\sin\varphi}{\varphi}$
二次抛物线面	$x_C=\frac{5}{8}a$ $y_C=\frac{2}{5}b$	二次抛物线面	$x_C=\frac{3}{4}a$ $y_C=\frac{3}{10}b$
正圆锥体	$z_C=\frac{1}{4}h$	正角锥体	$z_C=\frac{1}{4}h$

续表

图　形	重心位置	图　形	重心位置
半圆球	$z_C=\frac{3}{8}r$	锥形筒体	$y_C=\frac{4R_1+2R_2-3t}{6(R_1+R_2-t)}L$

表 4－2 中列出的重心位置，均可按前述公式积分求得，如下例。

例 4－11　试求图 4－24 所示半径为 R、圆心角为 2φ 的扇形面积的重心。

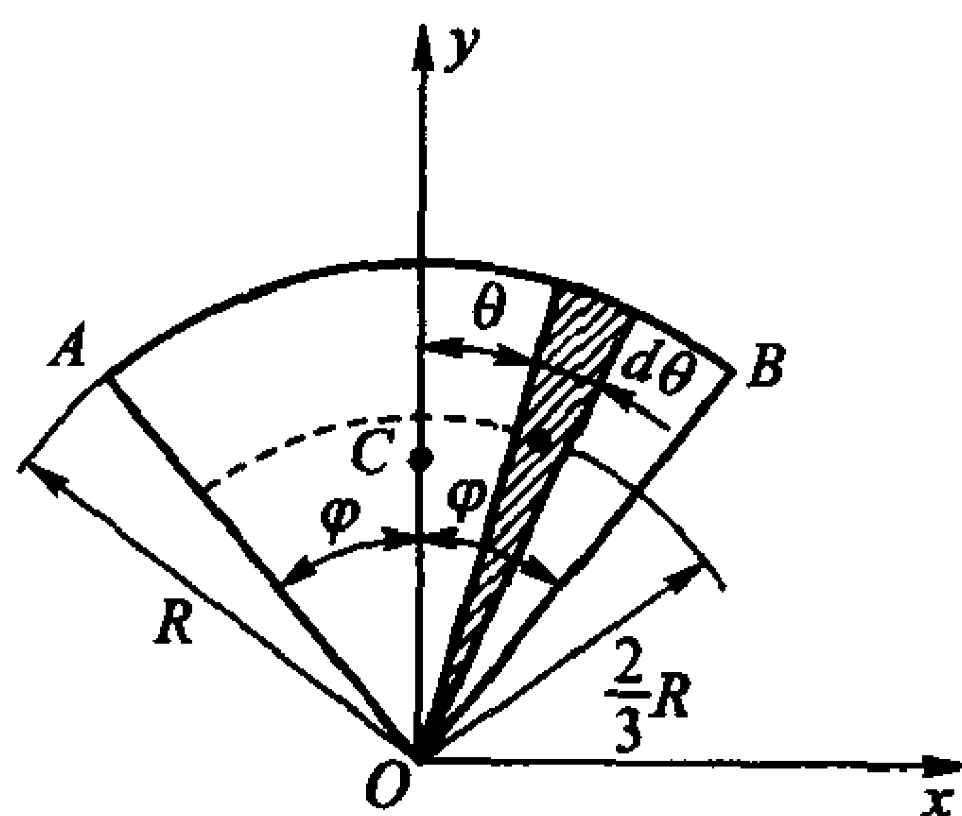


图 4－24

解：　取中心角的平分线为 y 轴。由于对称关系，重心必在这个轴上，即 $x_C=0$，现在只需求出 y_C。

把扇形面积分成无数无穷小的面积素（可看作三角形）、每个小三角形的重心都在距顶点 O 为 $\frac{2}{3}R$ 处。任一位置 θ 处的微小面积 $\mathrm{d}A=\frac{1}{2}R^2\mathrm{d}\theta$，其重心的 y 坐标为 $y=\frac{2}{3}R\cos\theta$。扇形总面积为

$$A=\int\mathrm{d}A=\int_{-\varphi}^{\varphi}\frac{1}{2}R^2\mathrm{d}\theta=R^2\varphi$$

由面积形心坐标公式，可得

$$y_C=\frac{\int y\mathrm{d}A}{A}=\frac{\int_{-\varphi}^{\varphi}\frac{2}{3}R\cos\theta\cdot\frac{1}{2}R^2\mathrm{d}\theta}{R^2\varphi}=\frac{2}{3}R\frac{\sin\varphi}{\varphi}$$

如以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 代入，即得半圆形的重心

$$y_C=\frac{4R}{3\pi}$$

（2）用组合法求重心

（a）分割法

若一个物体由几个简单形状的物体组合而成，而这些物体的重心是已知的，那么整个物体的重心即可用式（4－29）求出。

例 4－12　试求 Z 形截面重心的位置，其尺寸如图 4－25 所示。

解：　取坐标轴如图所示，将该图形分割为三个矩形（例如用 ab 和 cd 两线分割）。以 C_1,C_2,C_3 表示这些矩形的重心，而以 A_1,A_2,A_3 表示它们的面积。以 $x_1,y_1;x_2,y_2;x_3,y_3$ 分别表示 C_1,C_2,C_3 的坐标，由图得

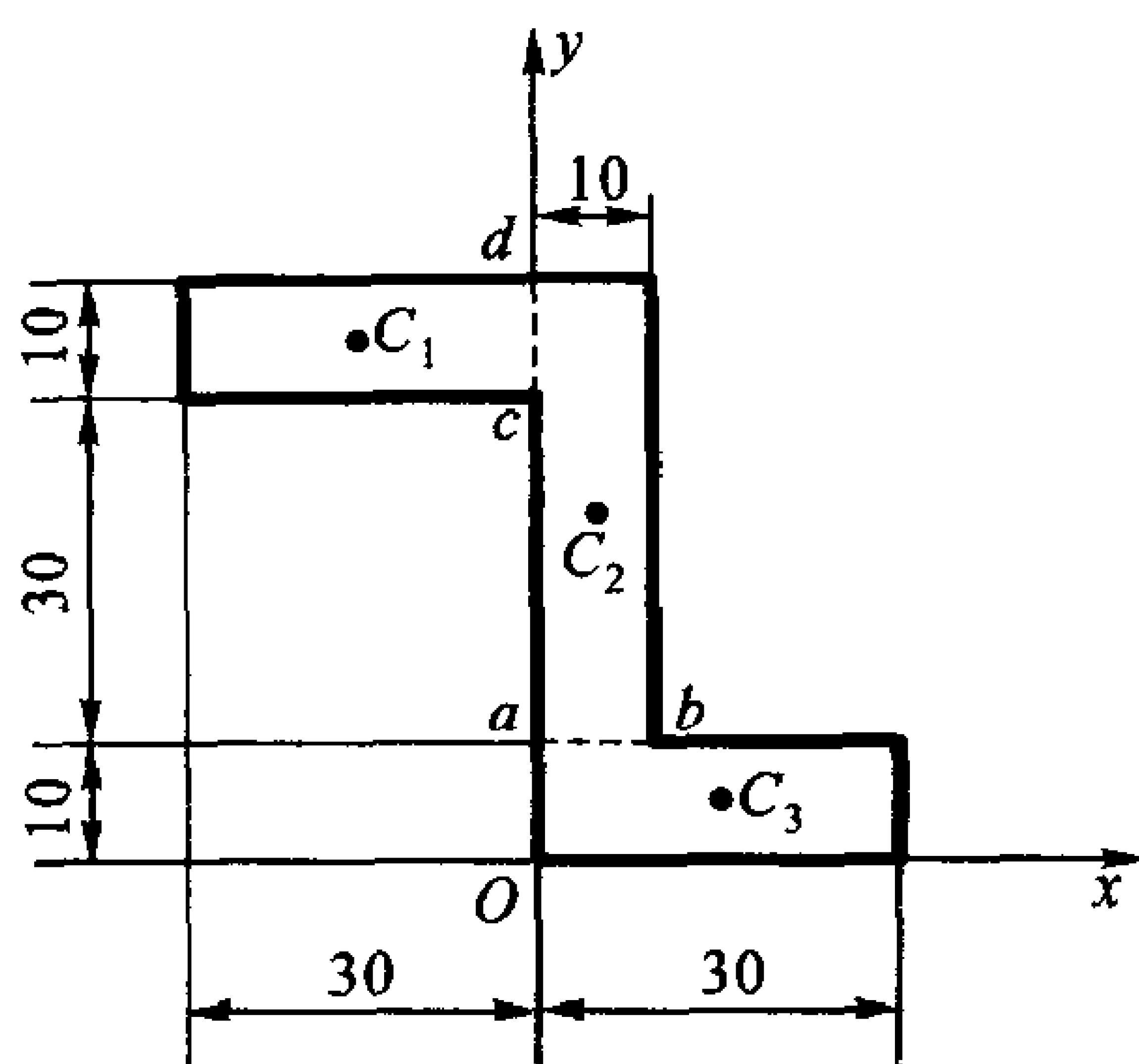


图 4－25

$x_1=-15$，　$y_1=45$，　$A_1=300$；　$x_2=5$，　$y_2=30$，　$A_2=400$；　$x_3=15$，　$y_3=5$，　$A_3=300$

按公式求得该截面重心的坐标 x_C，y_C 为

$$x_C=\frac{x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3}{A_1+A_2+A_3}=2\ \text{mm}$$

$$y_C=\frac{y_1A_1+y_2A_2+y_3A_3}{A_1+A_2+A_3}-27\ \text{mm}$$

(b) 负面积法(负体积法)

若在物体或薄板内切去一部分(例如有空穴或孔的物体)，则这类物体的重心，仍可应用与分割法相同的公式来求得，只是切去部分的体积或面积应取负值。

例 4－13　试求图 4－26 所示振动沉桩器中的偏心块的重心。已知：$R=100$ mm，$r=17$ mm，$b=13$ mm。

解： 将偏心块看成是由三部分组成，即半径为 R 的半圆 A_1，半径为 $r+b$ 的半圆 A_2 和半径为 r 的小圆 A_3。因 A_3 是切去的部分，所以面积应取负值。取坐标轴如图 4－26，由于对称有 $x_C=0$。设 y_1，y_2，y_3 分别是 A_1，A_2，A_3 重心的坐标，由例 4－12 的结果可知

$$y_1=\frac{4R}{3\pi}=\frac{400}{3\pi}\text{mm},\quad y_2=\frac{-4(r+b)}{3\pi}=-\frac{40}{\pi}\text{mm},\quad y_3=0$$

于是，偏心块重心的坐标为

$$\begin{aligned}y_C&=\frac{A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3}{A_1+A_2+A_3}\\&=\frac{\frac{\pi}{2}\times100^2(\text{mm})^2\times\frac{400}{3\pi}\text{mm}+\frac{\pi}{2}\times(17+13)^2(\text{mm})^2\times\left(\frac{-40}{\pi}\right)\text{mm}-(17^2\pi)(\text{mm})^2\times0}{\frac{\pi}{2}\times100^2(\text{mm})^2+\frac{\pi}{2}(17+13)^2(\text{mm})^2+(-17^2\pi)(\text{mm})^2}\\&=40.01\ \text{mm}\end{aligned}$$

(3) 用实验方法测定重心的位置

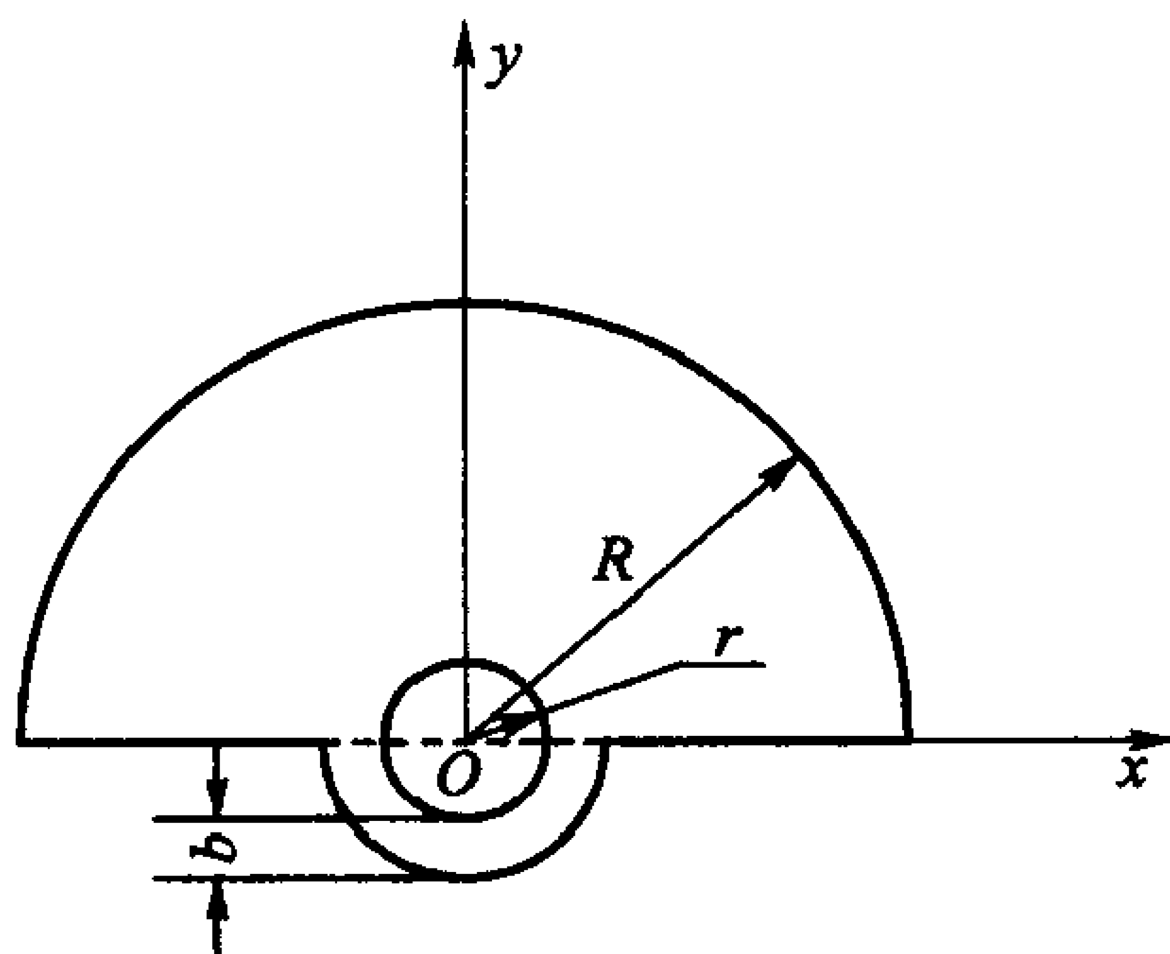


图 4-26

工程中一些外形复杂或质量分布不均的物体很难用计算方法求其重心，此时可用实验方法测定重心位置。

下面以汽车为例用称重法测定重心。如图 4-27 所示，首先称量出汽车的重量 P，测量出前后轮距 l 和车轮半径 r。

设汽车是左右对称的，则重心必在对称面内，我们只需测定重心 C 距地面的高度 z_C 和距后轮的距离 x_C。

为了测定 x_C，将汽车后轮放在地面上，前轮放在磅秤上，车身保持水平，如图 4-27a 所示。这时磅秤上的读数为 F_1。因车身是平衡的，由 $\sum M_A(F)=0$，有

$$Px_C = F_1 l$$

于是得

$$x_C = \frac{F_1}{P} l \tag{a}$$

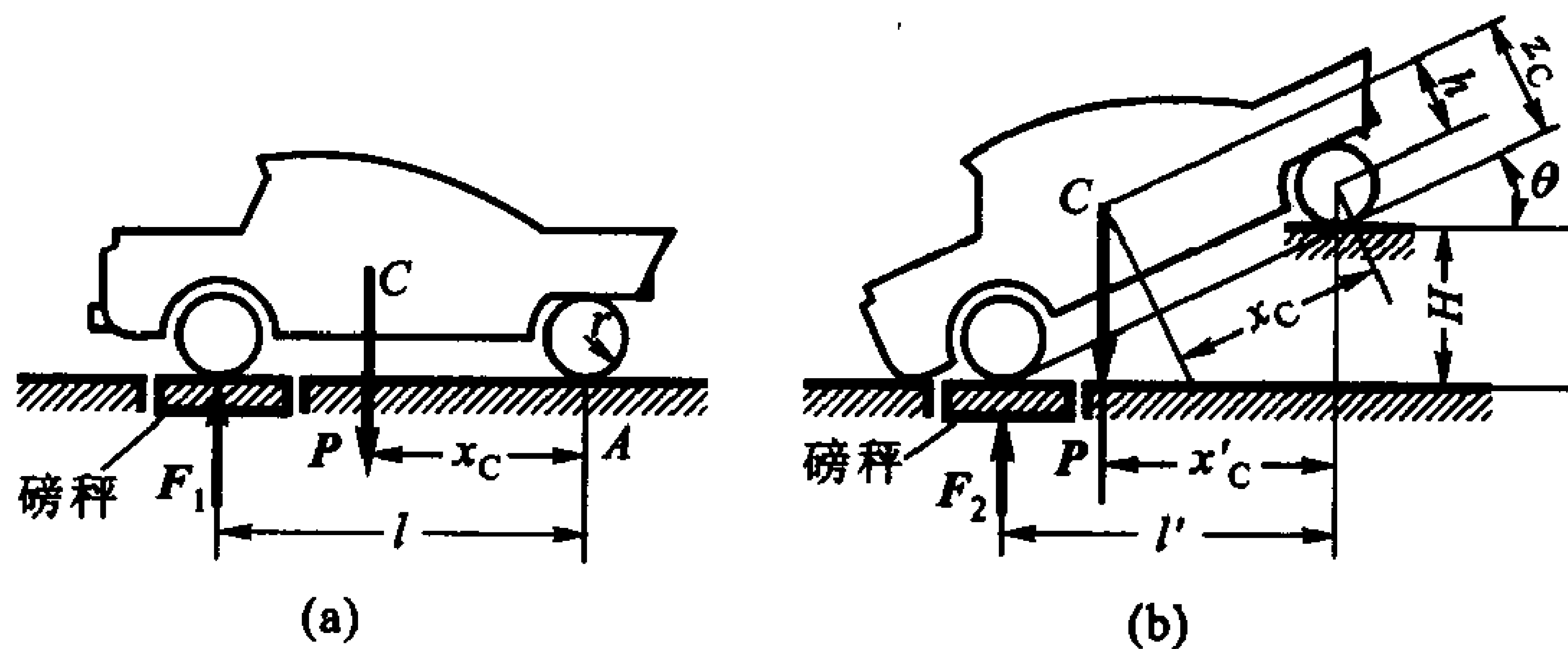


图 4-27

欲测定 z_C，需将车的后轮抬到任意高度 H，如图 4－27b 所示。这时磅秤的读数为 F_2。同理得

$$x'_C=\frac{F_2}{P}l' \tag{b}$$

由图中的几何关系知

$$l'=l\cos\theta,\ x'_C=x_C\cos\theta+h\sin\theta'\ \sin\theta=\frac{H}{l},\cos\theta=\frac{\sqrt{l^2-H^2}}{l}$$

其中 h 为重心与后轮中心的高度差，则

$$h=z_C-r$$

把以上各关系式代入式(b)中，经整理后即得计算高度 z_C 的公式，即

$$z_C=r+\frac{F_2-F_1}{P}\frac{1}{H}\sqrt{l^2-H^2}$$

式中均为已测定的数据。

小　结

1．力在空间直角坐标轴上的投影

(1) 直接投影法

$$F_x=F\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{i}),\quad F_y=F\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{j}),\quad F_z=F\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{k})$$

(2) 间接投影法(即二次投影法)(图 4－1)

$$F_x=F\sin\gamma\cos\varphi,\quad F_y=F\sin\gamma\sin\varphi,\quad F_z=F\cos\gamma$$

2．力矩的计算

(1) 力对点的矩是一个定位矢量，如图 4－4 所示。

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x&y&z\\F_x&F_y&F_z\end{vmatrix},\quad |\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})|=Fh=2A_{\triangle ABC}$$

(2) 力对轴的矩是一个代数量，可按下列两种方法求得：

(a) $M_z(\boldsymbol{F})=\pm F_{xy}h=\pm 2A_{\triangle Oab}$(图 4－5)

(b) $M_x(\boldsymbol{F})=yF_z-zF_y,\quad M_y(\boldsymbol{F})=zF_x-xF_z,\quad M_z(\boldsymbol{F})=xF_y-yF_x$

(3) 力对点的矩与力对通过该点的轴的矩的关系

$$[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_x=M_x(\boldsymbol{F}),\quad [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_y=M_y(\boldsymbol{F}),\quad [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_z=M_z(\boldsymbol{F})$$

3．空间力偶及其等效定理

(1) 力偶矩矢

空间力偶对刚体的作用效果决定于三个因素(力偶矩大小、力偶作用面方位及力偶的转向)，它可用力偶矩矢 $\boldsymbol{M}$ 表示(图 4－8)。

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}_{BA}\times\boldsymbol{F}$$

力偶矩矢与矩心无关，是自由矢量。

(2) 力偶的等效定理：若两个力偶的力偶矩矢相等，则它们彼此等效。

4. 空间力系的合成

(1) 空间汇交力系合成为一个通过其汇交点的合力，其合力矢为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\sum\boldsymbol{F}_i\text{，或 }\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\sum F_x\boldsymbol{i}+\sum F_y\boldsymbol{j}+\sum F_z\boldsymbol{k}$$

(2) 空间力偶系合成结果为一合力偶，其合力偶矩矢为

$$\boldsymbol{M}=\sum\boldsymbol{M}_i\text{，或 }\boldsymbol{M}=\sum M_{ix}\boldsymbol{i}+\sum M_{iy}\boldsymbol{j}+\sum M_{iz}\boldsymbol{k}$$

(3) 空间任意力系向点 O 简化得一个作用在简化中心 O 的力 $\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}$ 和一个力偶，力偶矩矢为 $\boldsymbol{M}_O$，而

$$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}=\sum\boldsymbol{F}_i\text{（主矢），}\quad \boldsymbol{M}_O=\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)\text{（主矩）}$$

(4) 空间任意力系简化的最终结果，列表如下：

<table>
<tr><th>主矢</th><th colspan="2">主　矩</th><th>最后结果</th><th>说　明</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}=0$</td><td colspan="2">$\boldsymbol{M}_O=0$</td><td>平衡</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{M}_O\neq0$</td><td>合力偶</td><td>此时主矩与简化中心的位置无关</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}\neq0$</td><td colspan="2">$\boldsymbol{M}_O=0$</td><td>合力</td><td>合力作用线通过简化中心</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{M}_O\neq0$</td><td>$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}\perp\boldsymbol{M}_O$</td><td>合力</td><td>合力作用线离简化中心 O 的距离为 $d=\dfrac{\lvert\boldsymbol{M}_O\rvert}{F'_{\mathrm{R}}}$（图 4-14）</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boldsymbol{M}_O\neq0$</td><td>$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}\parallel\boldsymbol{M}_O$</td><td>力螺旋</td><td>力螺旋的中心轴通过简化中心</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}$ 与 $\boldsymbol{M}_O$ 成 θ 角</td><td>力螺旋</td><td>力螺旋的中心轴离简化中心 O 的距离为 $d=\dfrac{\lvert\boldsymbol{M}_O\rvert\sin\theta}{F'_{\mathrm{R}}}$（图 4-16c）</td></tr>
</table>

5. 空间任意力系平衡方程的基本形式

$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0,\quad \sum F_z=0$$

$$\sum M_x(\boldsymbol{F})=0,\quad \sum M_y(\boldsymbol{F})=0,\quad \sum M_z(\boldsymbol{F})=0$$

6. 几种特殊力系的平衡方程

(1) 空间汇交力系

$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0,\quad \sum F_z=0$$

(2) 空间力偶系

$$\sum M_x(\boldsymbol{F})=0,\quad \sum M_y(\boldsymbol{F})=0,\quad \sum M_z(\boldsymbol{F})=0$$

(3) 空间平行力系　若力系中各力与 z 轴平行,其平衡方程的基本形式为

$$\sum F_z=0,\quad \sum M_x(\boldsymbol{F})=0,\quad \sum M_y(\boldsymbol{F})=0$$

(4) 平面任意力系　若力系在 Oxy 平面内,其平衡方程的基本形式为

$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0,\quad \sum M_z(\boldsymbol{F})=0$$

上述各式,为便于书写,下标 i 略去。

7. 物体重心的坐标公式

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum \Delta P_i \boldsymbol{r}_i}{P}\ (\text{其中 } P=\sum \Delta P_i)$$

或

$$x_C=\frac{\sum \Delta P_i x_i}{P},\quad y_C=\frac{\sum \Delta P_i y_i}{P},\quad z_C=\frac{\sum \Delta P_i z_i}{P}$$

思　考　题

4-1　在正方体的顶角 A 和 B 处,分别作用力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$,如图 4-28 所示。求此两力在 x,y,z 轴上的投影和对 x,y,z 轴的矩。试将图中的力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 向点 O 简化,并用解析式计算其大小和方向。

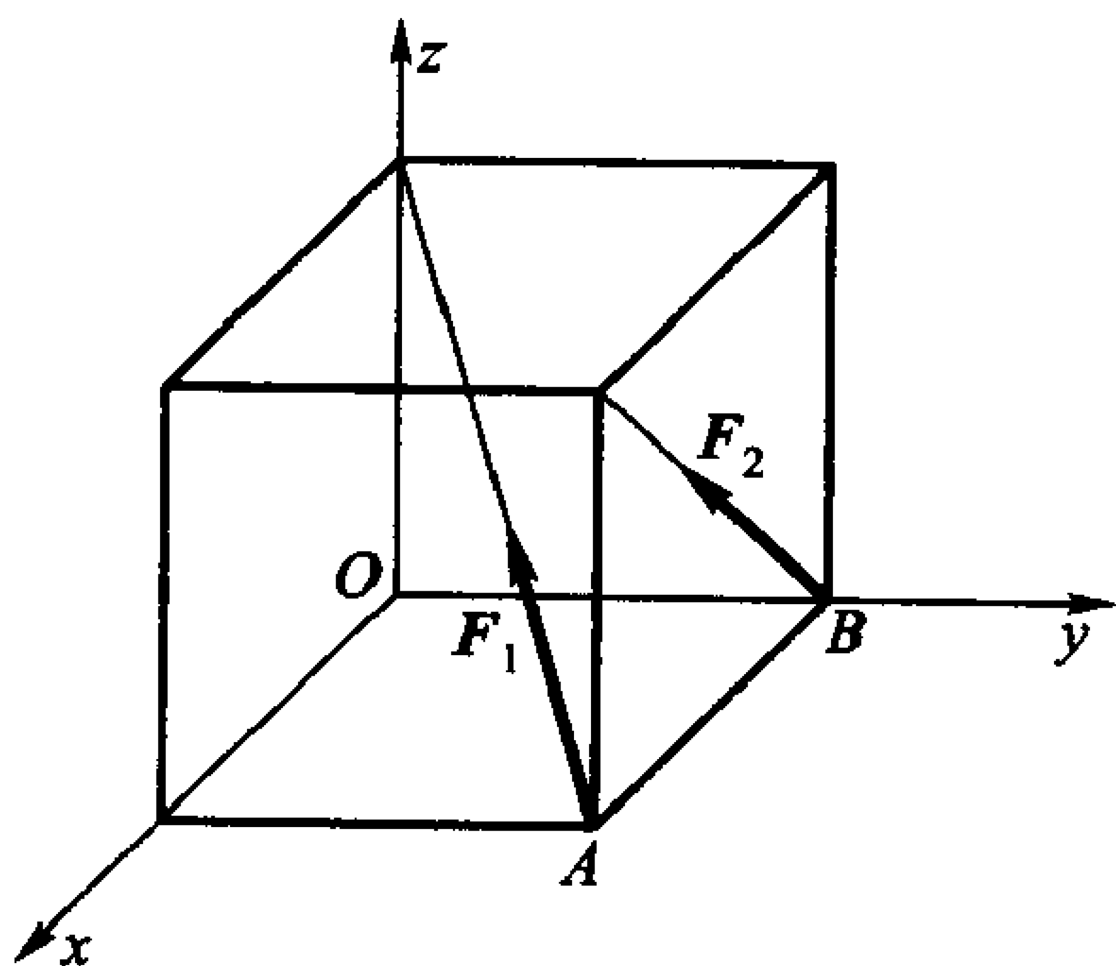


图 4-28

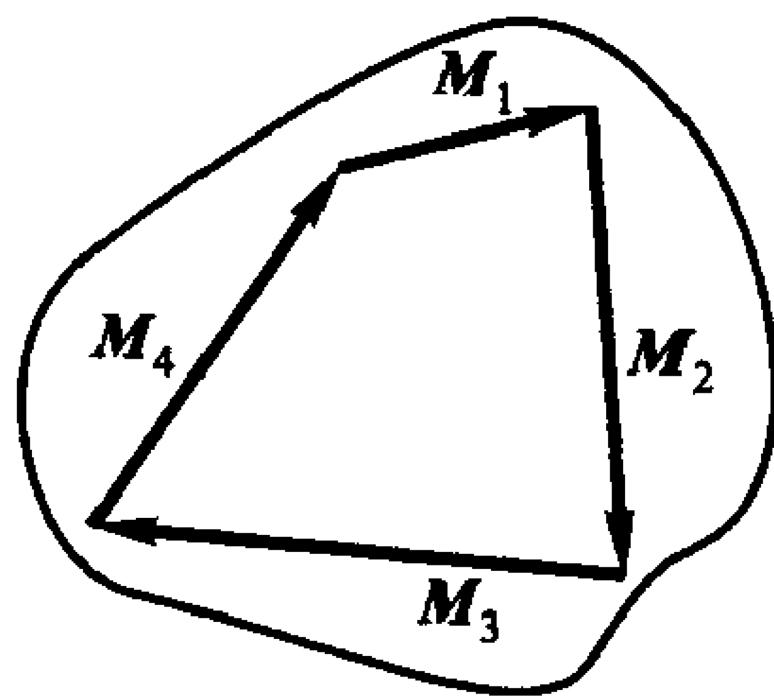


图 4-29

4-2　作用在刚体上的四个力偶,若其力偶矩矢都位于同一平面内。则一定是平面力偶系?若各力偶矩矢自行封闭(图 4-29),则一定是平衡力系?为什么?

4-3　用矢量积 $\boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{F}$ 计算力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 之矩。当力沿其作用线移动,改变了力作用点的坐标 x,y,z 时,其计算结果有否变化?

4-4　试证:空间力偶对任一轴之矩等于其力偶矩矢在该轴上的投影。

4-5　轴 AB 上作用一主动力偶,矩为 M_1,齿轮的啮合半径 $R_2=2R_1$,如图 4-30 所示。问当研究轴 CD 的平衡时:(1) 能否以力偶矩矢是自由矢量为由,将作用在轴 AB 上的力偶搬移到轴 CD 上?(2) 若在轴 CD 上作用矩为 M_2 的力偶,使两轴平衡,问两力偶的矩的大小是否相等?转向是否应相反?

4-6　空间平行力系简化的结果是什么?可能合成为力螺旋吗?

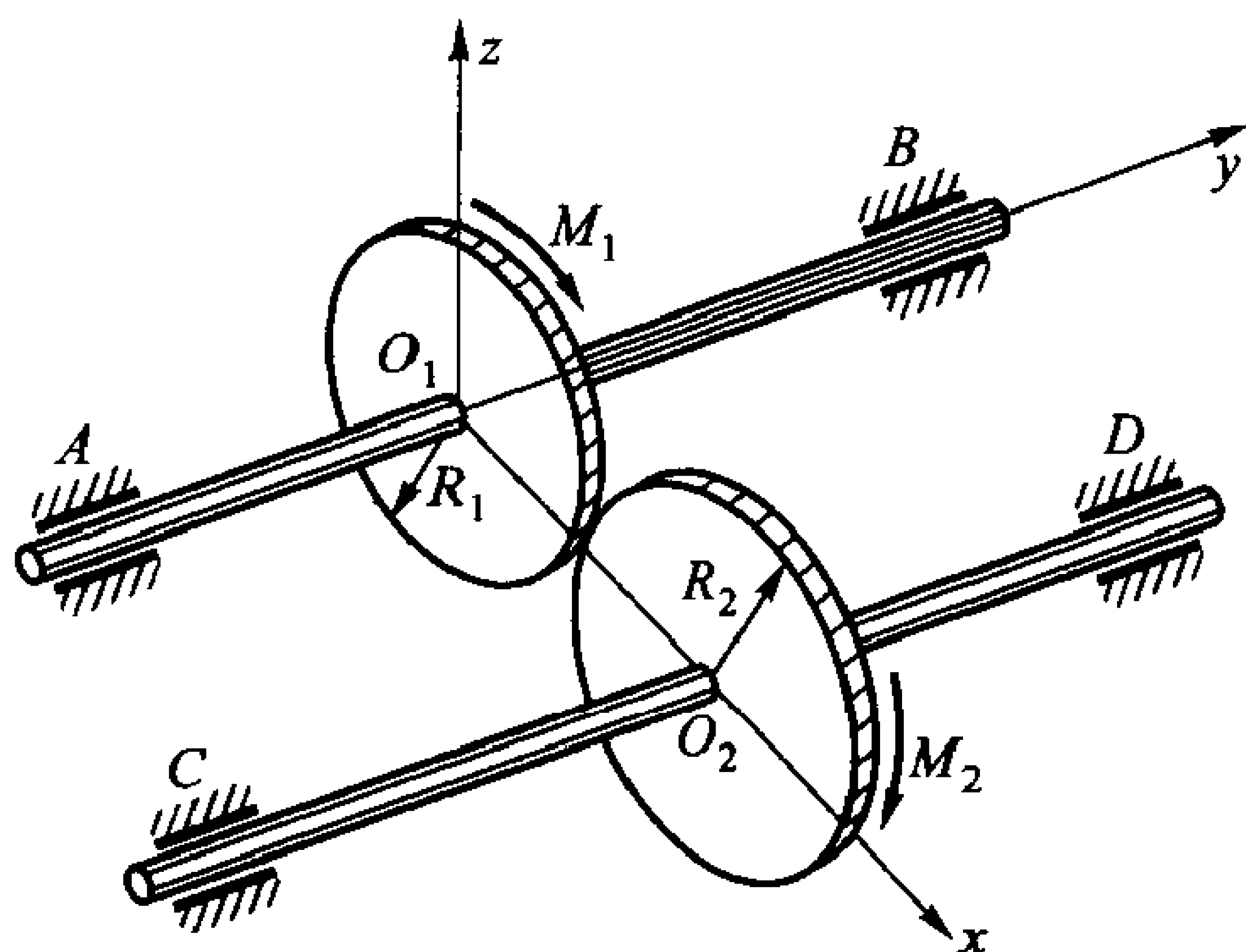


图 4-30

4-7 (1)空间力系中各力的作用线平行于某一固定平面;(2)空间力系中各力的作用线分别汇交于两个固定点。试分析这两种力系最多各有几个独立的平衡方程。

4-8 传动轴用两个止推轴承支持,每个轴承有三个未知力,共6个未知量。而空间任意力系的平衡方程恰好有6个,是否为静定问题?

4-9 空间任意力系总可以用两个力来平衡,为什么?

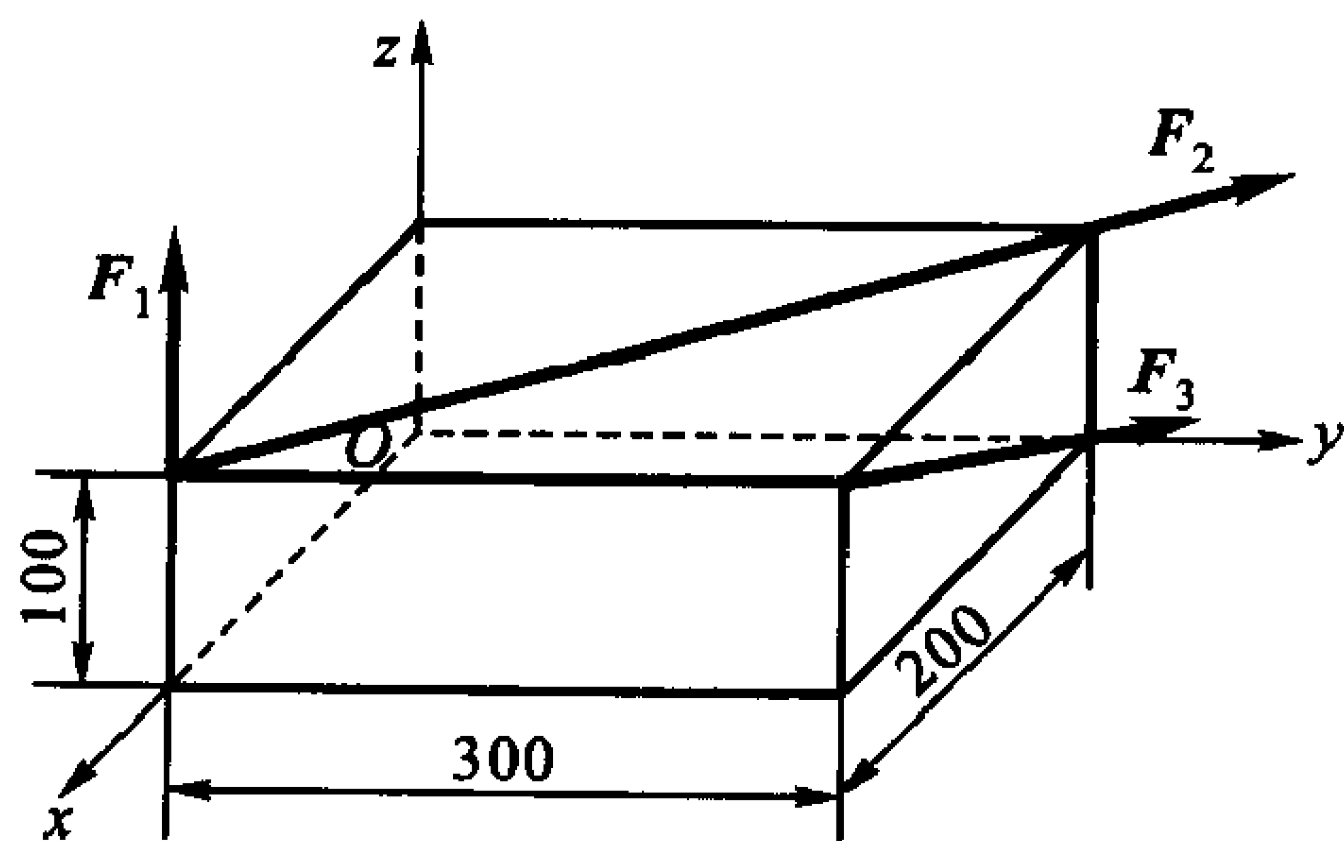
4-10 某一空间力系对不共线的三个点的主矩都等于零,问此力系是否一定平衡?

4-11 空间任意力系向两个不同的点简化,试问下述情况是否可能:(1)主矢相等,主矩也相等;(2)主矢不相等,主矩相等;(3)主矢相等,主矩不相等;(4)主矢、主矩都不相等。

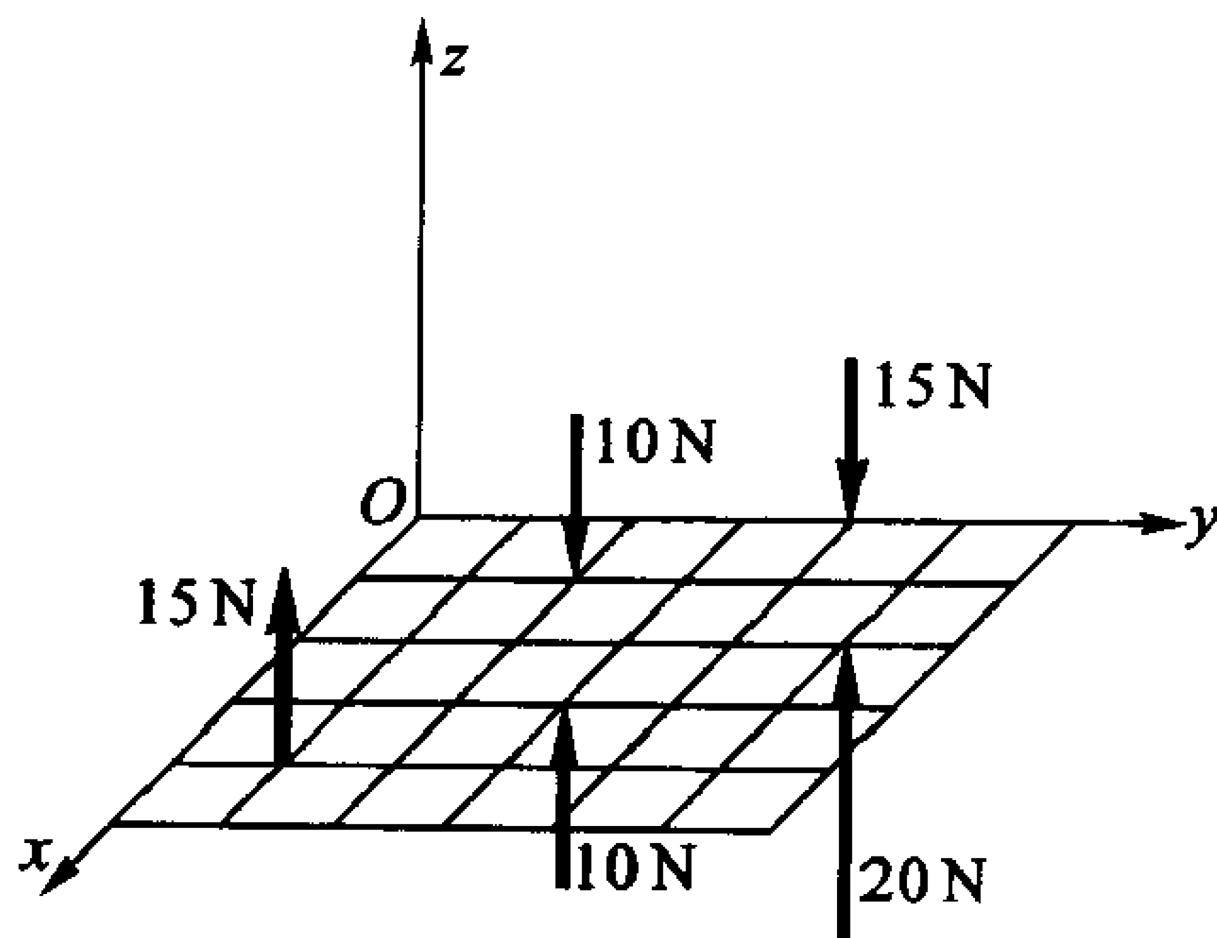
4-12 一均质等截面直杆的重心在哪里?若把它弯成半圆形,重心的位置是否改变?

习 题

4-1 力系中,$F_1=100$ N、$F_2=300$ N、$F_3=200$ N,各力作用线的位置如图所示。将力系向原点 O 简化。



题 4-1 图

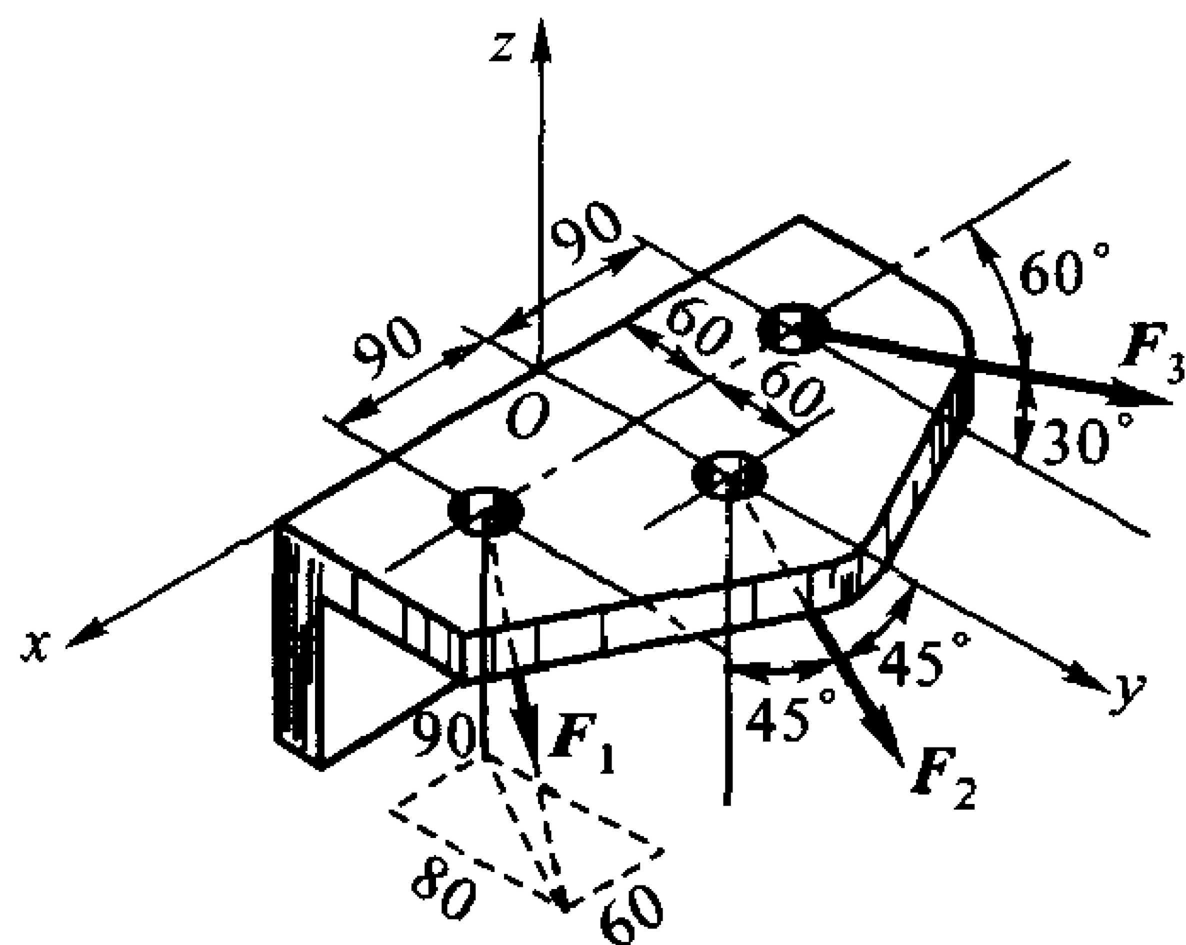


题 4-2 图

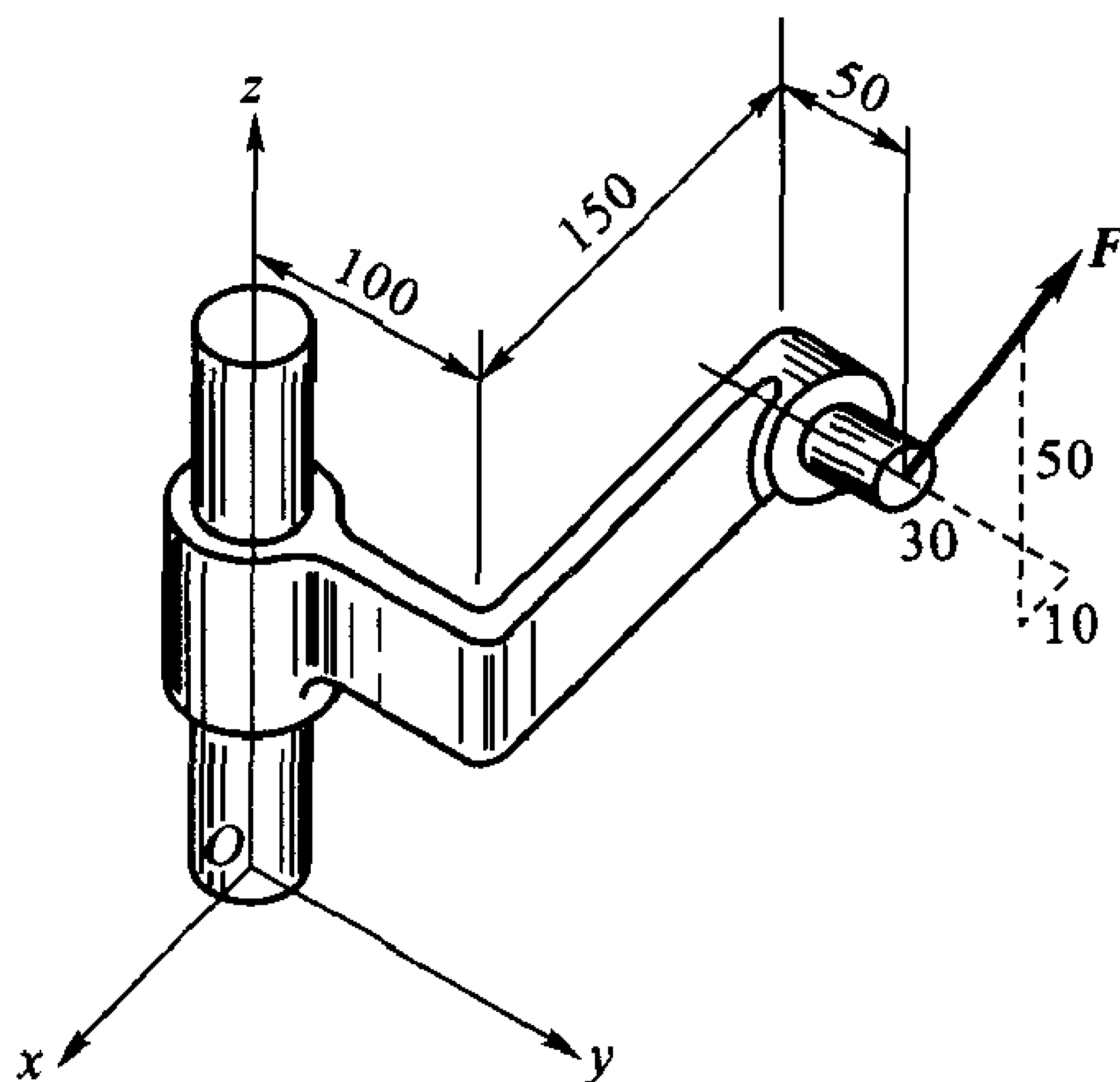
4-2 一平行力系由五个力组成,力的大小和作用线的位置如图所示。图中小正方格的

边长为 10 mm。求平行力系的合力。

4-3　图示力系的三力分别为 $F_1=350$ N、$F_2=400$ N 和 $F_3=600$ N，其作用线的位置如图所示。将此力系向原点 O 简化。



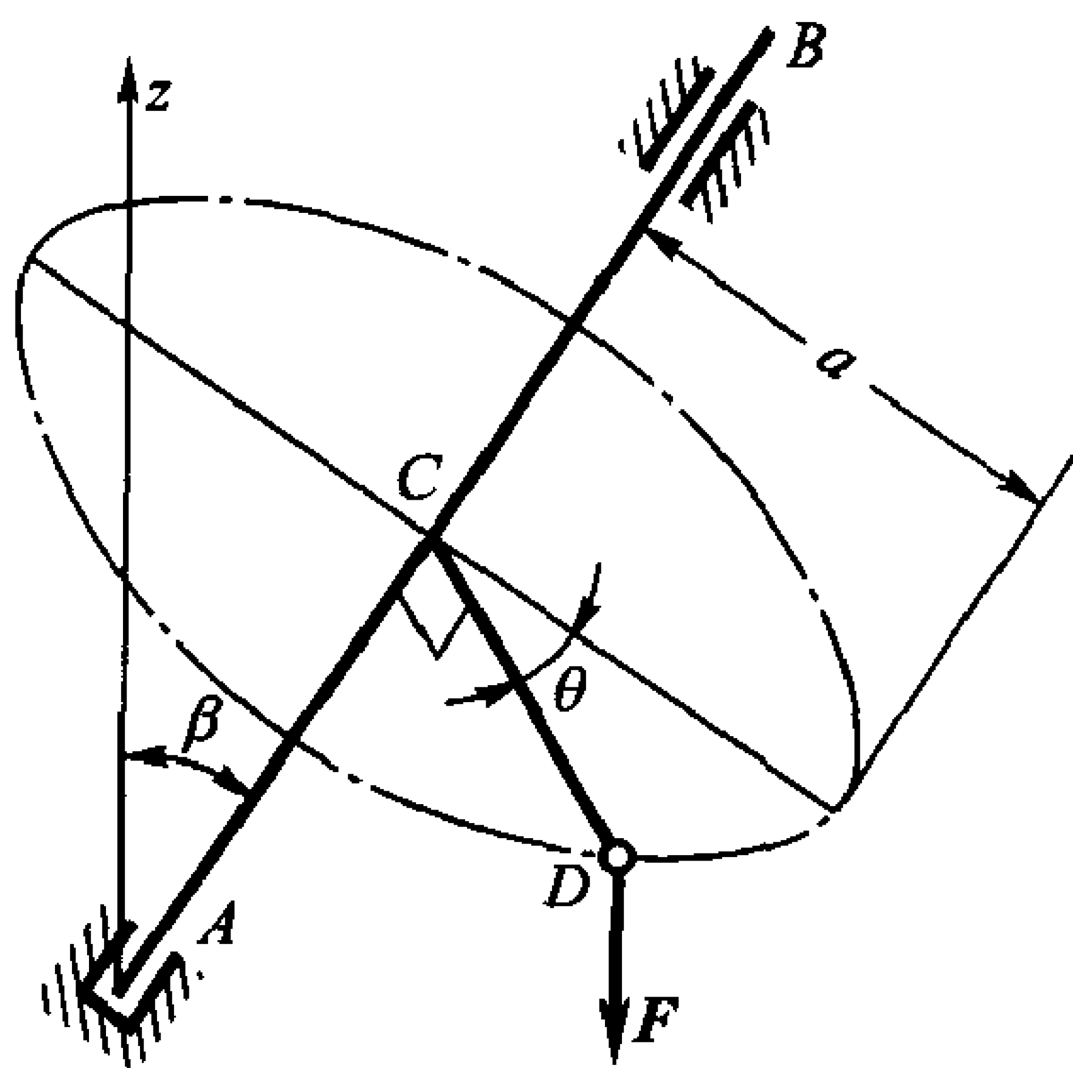
题 4-3 图



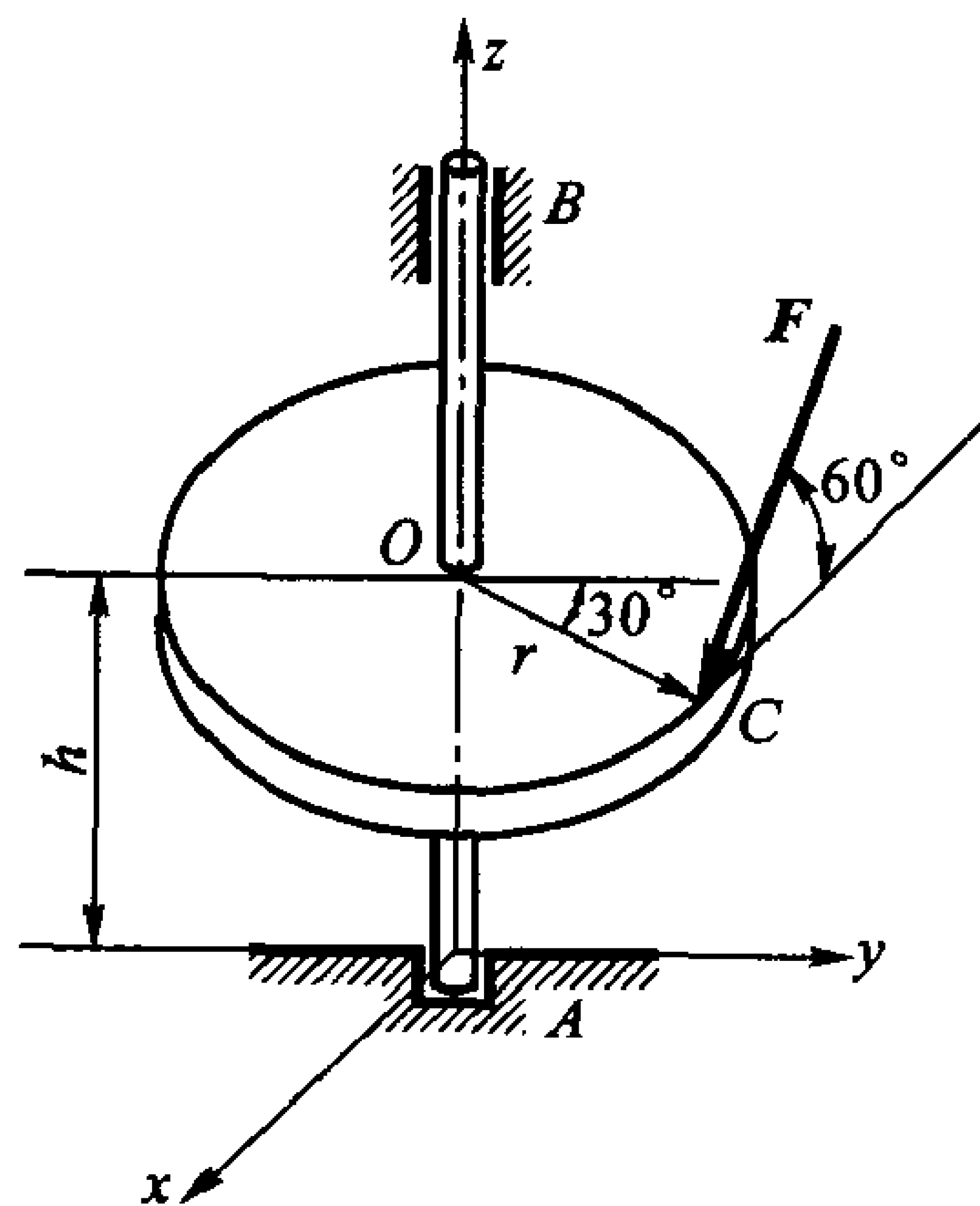
题 4-4 图

4-4　求图示力 $F=1\ 000$ N 对于 z 轴的力矩 M_z。

4-5　轴 AB 与铅直线成 β 角，悬臂 CD 与轴垂直地固定在轴上，其长为 β，并与铅直面 zAB 成 θ 角，如图所示。如在点 D 作用铅直向下的力 $\boldsymbol{F}$，求此力对轴 AB 的矩。



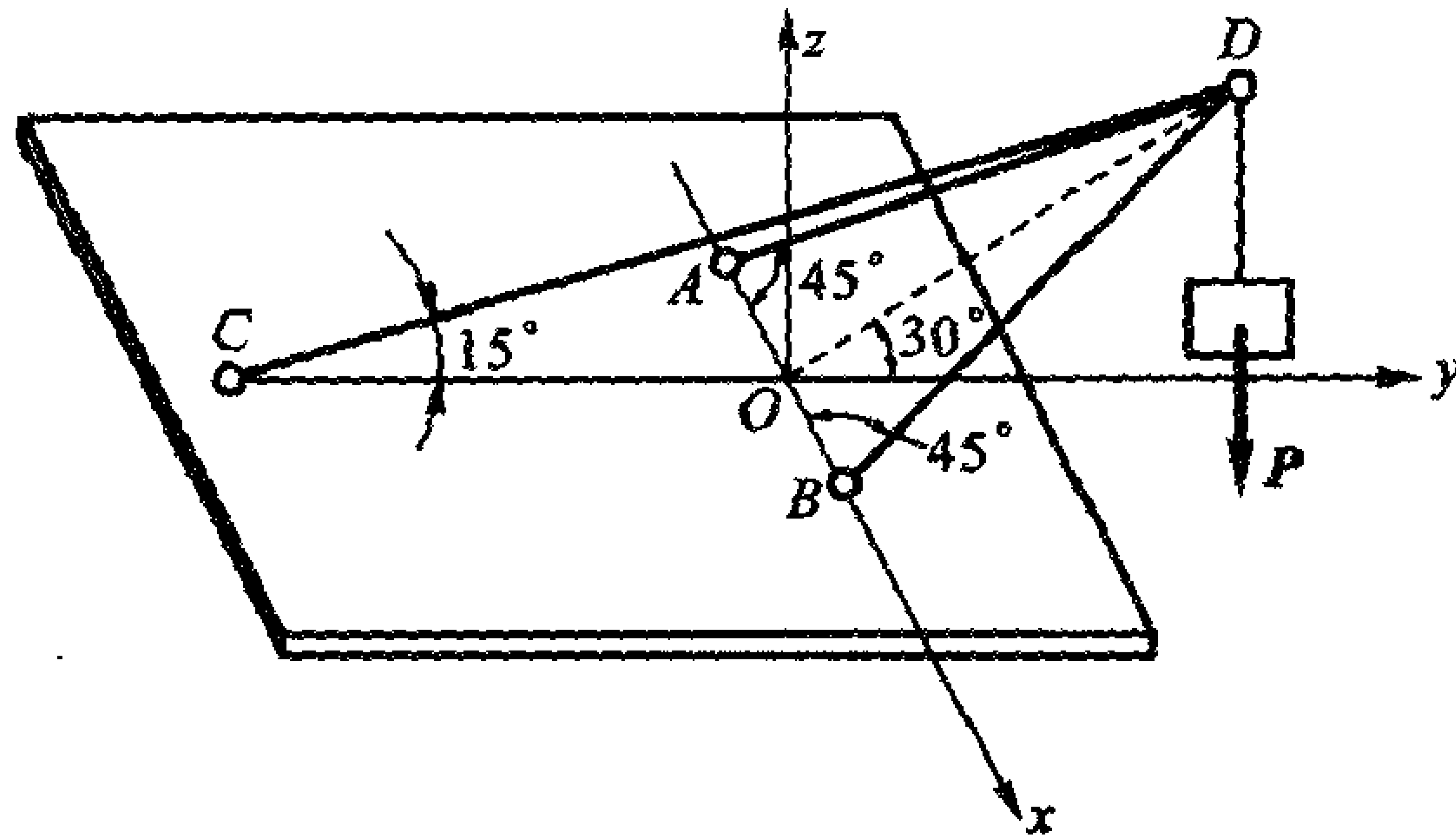
题 4-5 图



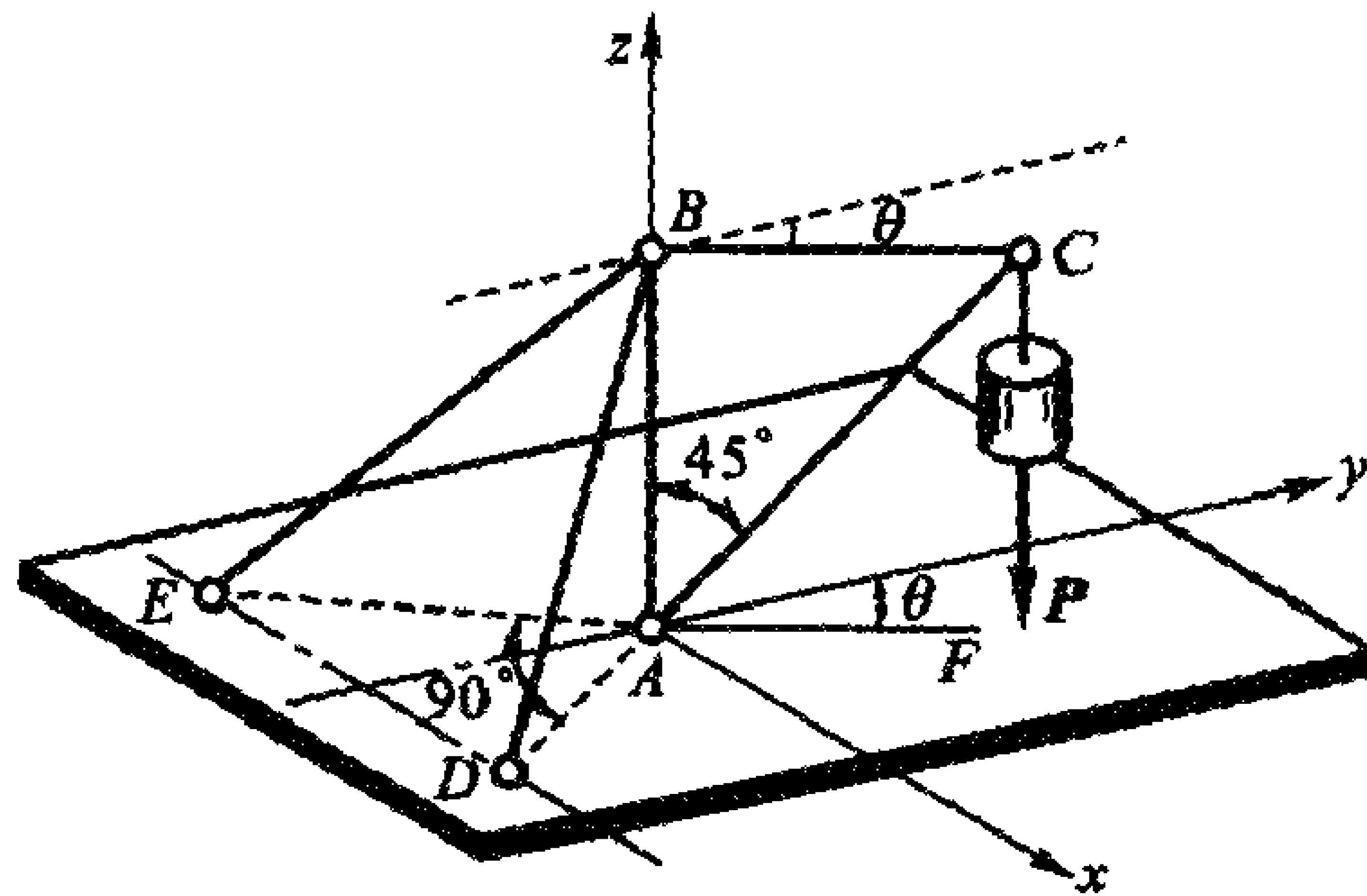
题 4-6 图

4-6　水平圆盘的半径为 r，外缘 C 处作用有已知力 $\boldsymbol{F}$。力 $\boldsymbol{F}$ 位于铅垂平面内，且与 C 处圆盘切线夹角为 60°，其他尺寸如图所示。求力 $\boldsymbol{F}$ 对 x,y,z 轴之矩。

4-7　图示空间构架由三根无重直杆组成，在 D 端用球铰链连接，如图所示。A,B 和 C 端则用球铰链固定在水平地板上。如果挂在 D 端的物重 $P=10$ kN，求铰链 A,B 和 C 的约束力。



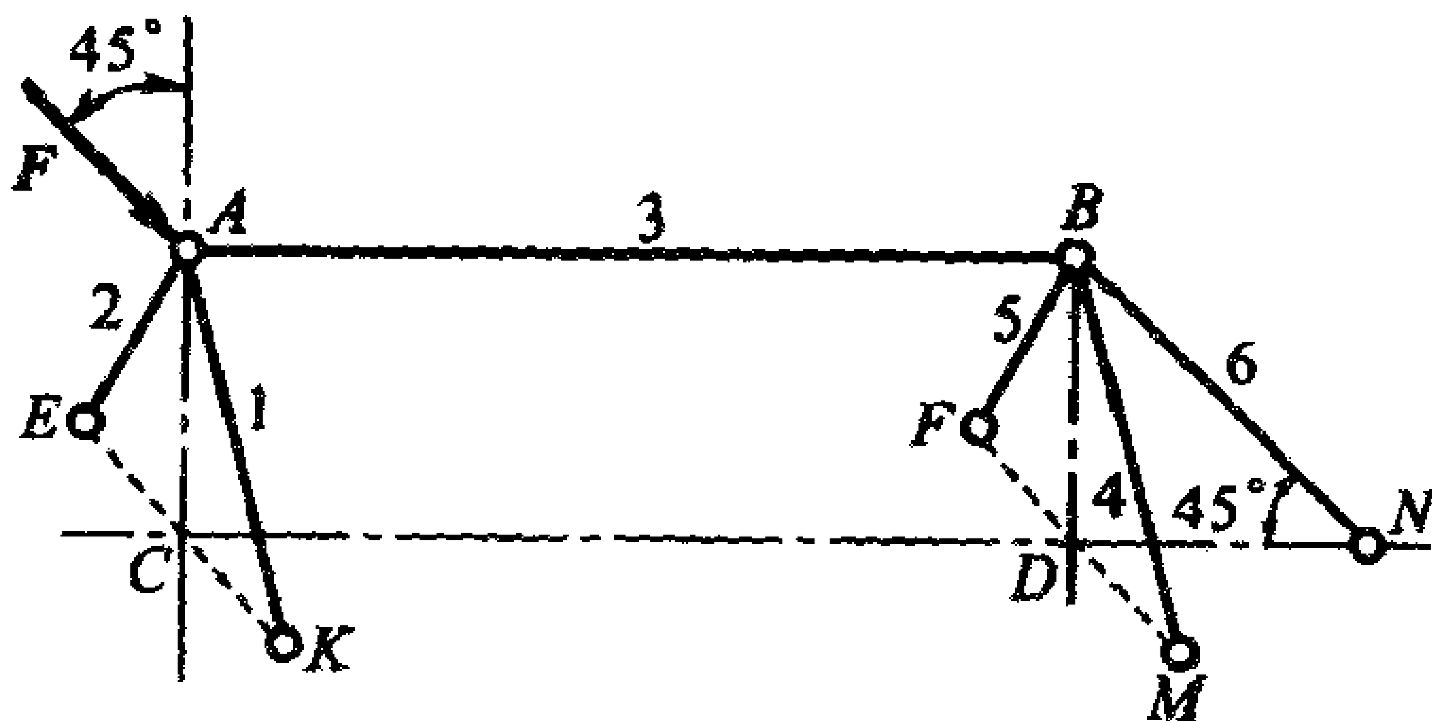
题 4－7 图



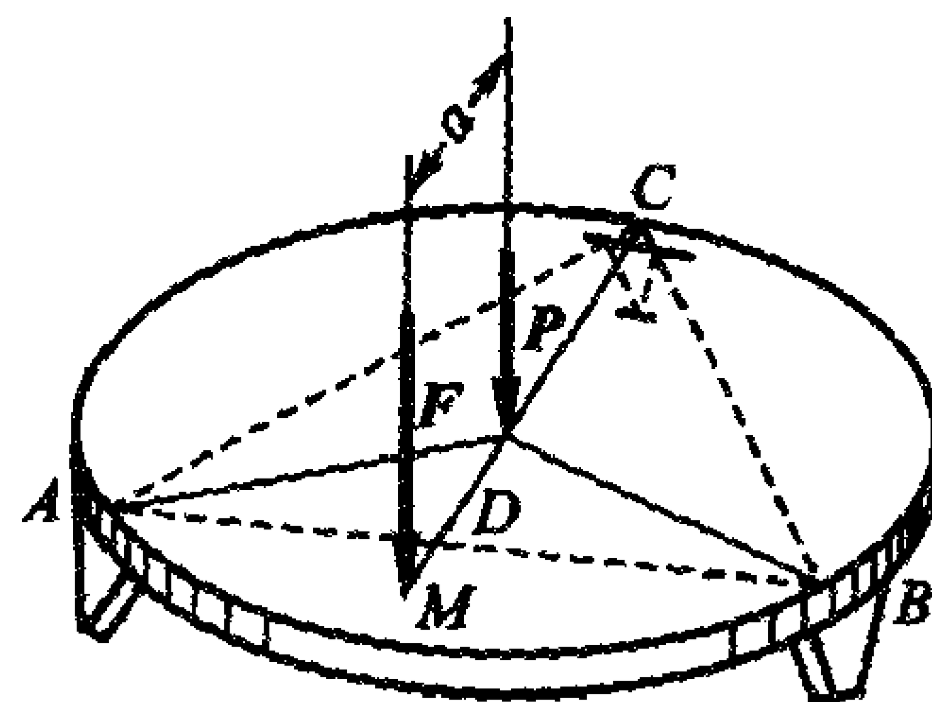
题 4－8 图

4－8 在图示起重机中，已知：$AB=BC=AD=AE$；点 A，B，D 和 E 等均为球铰链连接，如三角形 ABC 在 xy 平面的投影为 AF 线，AF 与 y 轴夹角为 θ，如图所示。求铅直支柱和各斜杆的内力。

4－9 图示空间桁架由六杆 1，2，3，4，5 和 6 构成。在节点 A 上作用一力 $\boldsymbol{F}$，此力在矩形 $ABDC$ 平面内，且与铅直线成 45°角。$\triangle EAK=\triangle FBM$。等腰三角形 EAK，FBM 和 NDB 在顶点 A，B 和 D 处均为直角，又 $EC=CK=FD=DM$。若 $F=10$ kN，求各杆的内力。



题 4－9 图

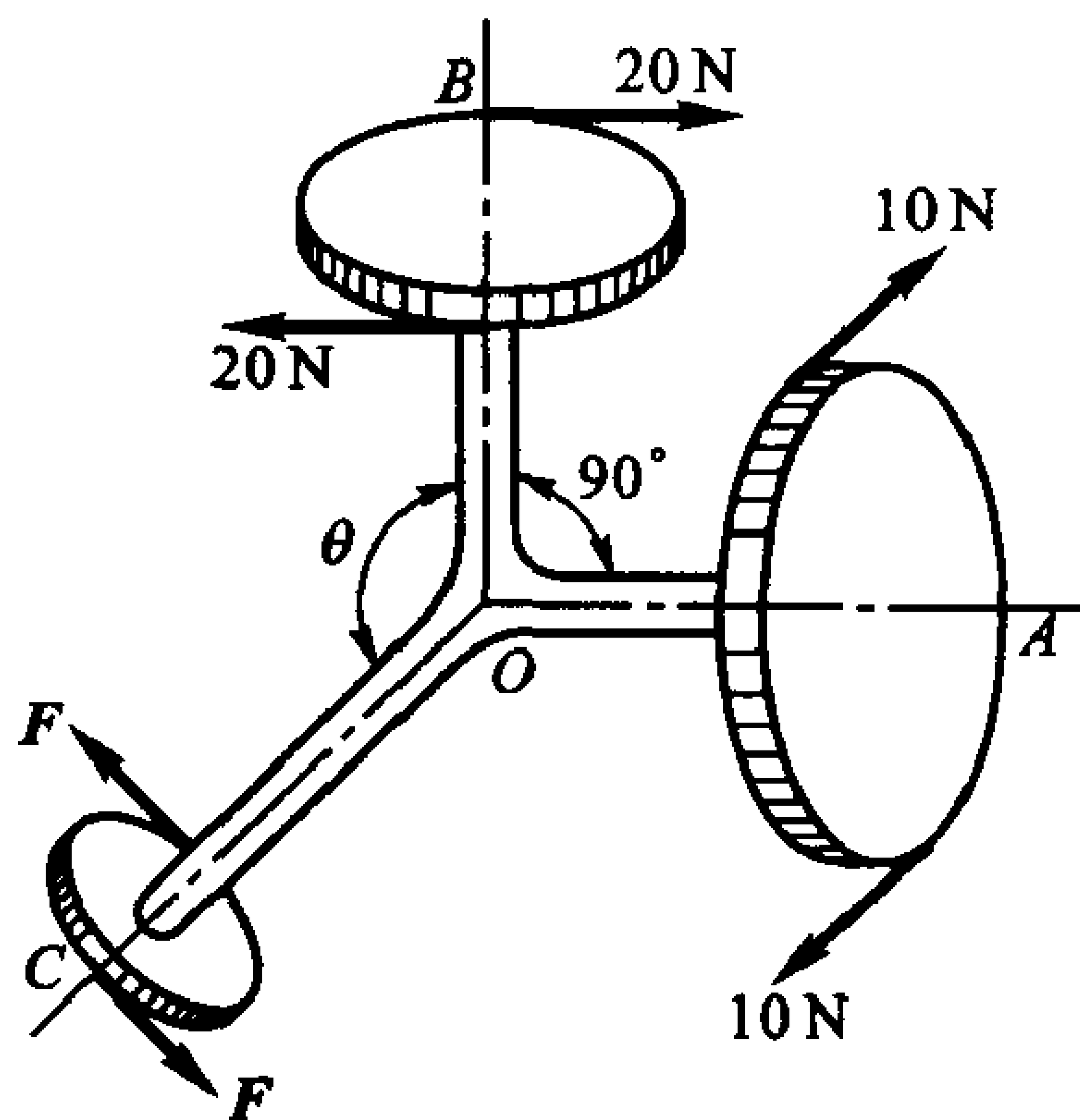


题 4－10 图

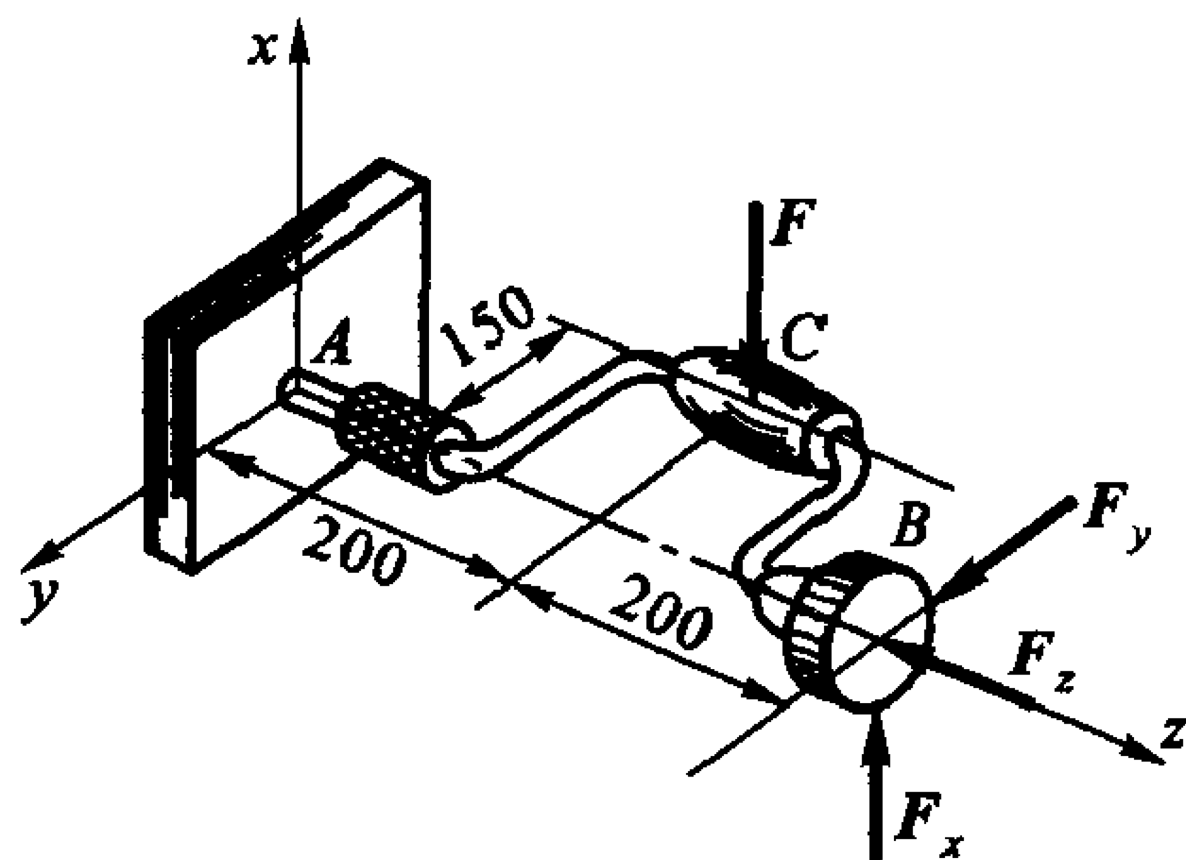
4－10 如图所示，三脚圆桌的半径为 $r=500$ mm，重为 $P=600$ N。圆桌的三脚 A，B 和 C 形成一等边三角形。若在中线 CD 上距圆心为 a 的点 M 处作用铅直力 $F=1\ 500$ N，求

使圆桌不致翻倒的最大距离 a。

4-11 图示三圆盘 A, B 和 C 的半径分别为 150 mm, 100 mm 和 50 mm。三轴 OA, OB 和 OC 在同一平面内，$\angle AOB$ 为直角。在这三圆盘上分别作用力偶，组成各力偶的力作用在轮缘上，它们的大小分别等于 10 N, 20 N 和 F。如这三圆盘所构成的物系是自由的，不计物系重量，求能使此物系平衡的力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和角 θ。



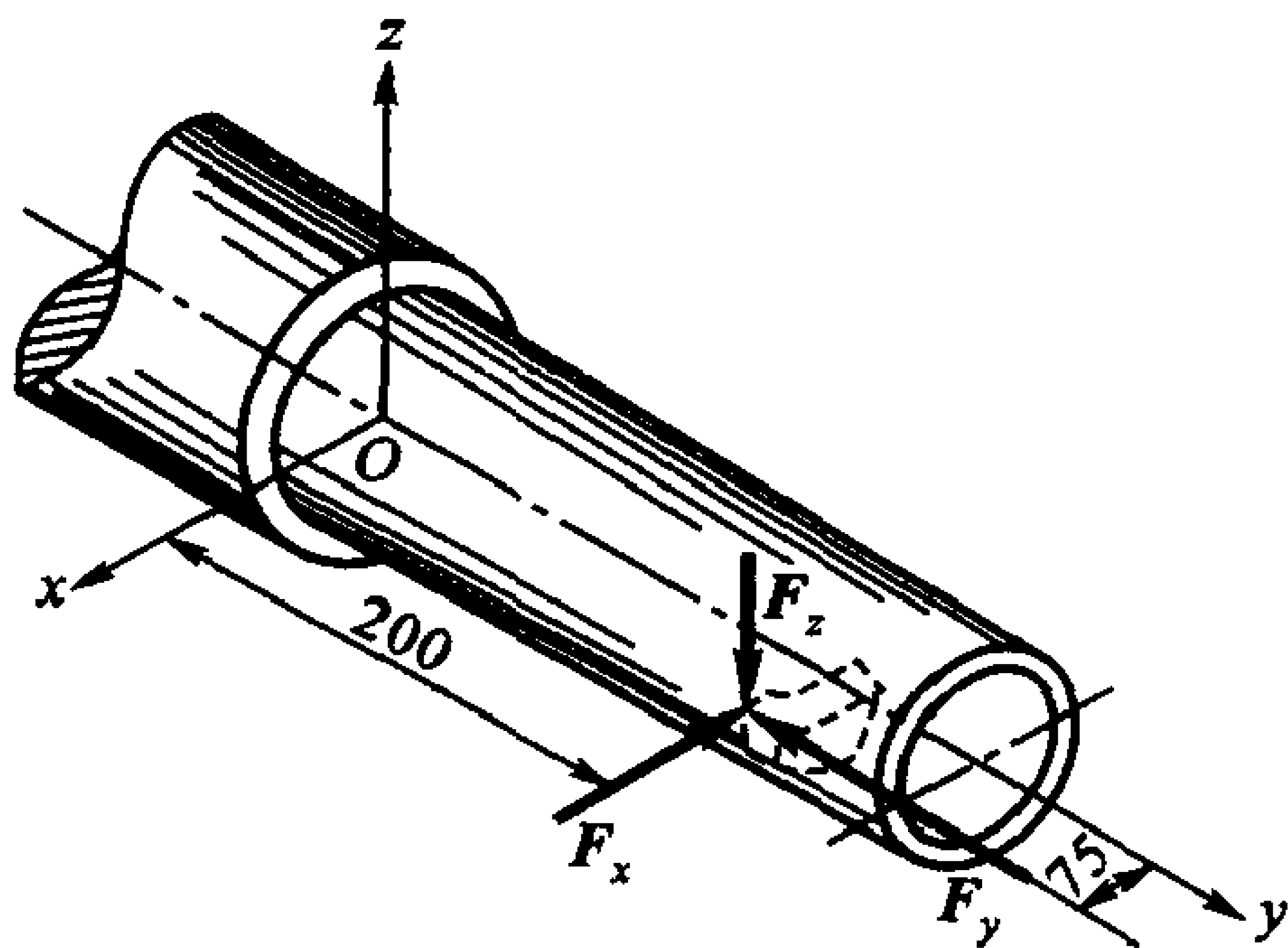
题 4-11 图



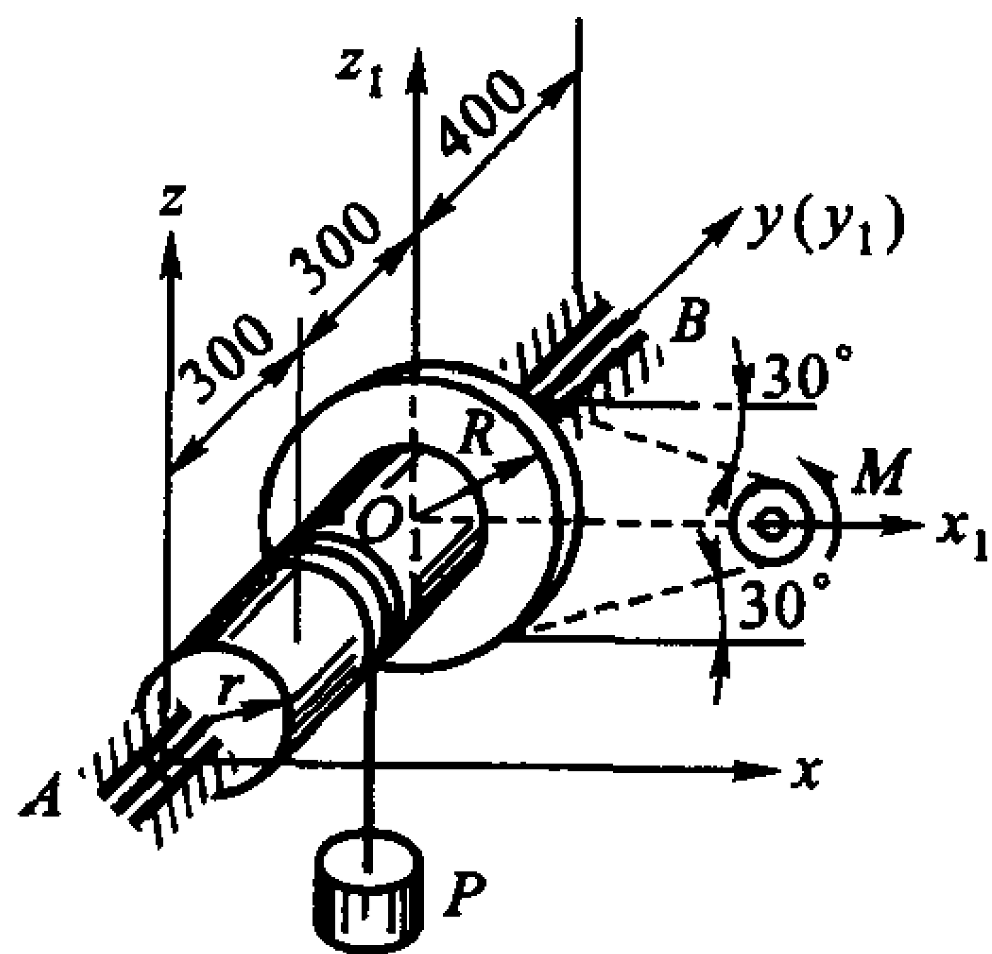
题 4-12 图

4-12 图示手摇钻由支点 B、钻头 A 和一个弯曲的手柄组成。当支点 B 处加压力 $\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$ 和 $\boldsymbol{F}_z$ 以及手柄上加力 $\boldsymbol{F}$ 后，即可带动钻头绕轴 AB 转动而钻孔，已知 $F_z = 50$ N, $F = 150$ N。求：(1) 钻头受到的阻抗力偶矩 M；(2) 材料给钻头的反力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$, $\boldsymbol{F}_{Ay}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Az}$ 的值；(3) 压力 $\boldsymbol{F}_x$ 和 $\boldsymbol{F}_y$ 的值。

4-13 如图所示，已知镗刀杆刀头上受切削力 $F_z = 500$ N，径向力 $F_x = 150$ N，轴向力 $F_y = 75$ N，刀尖位于 Oxy 平面内，其坐标 $x = 75$ mm, $y = 200$ mm。工件重量不计，试求被切削工件左端 O 处的约束力。



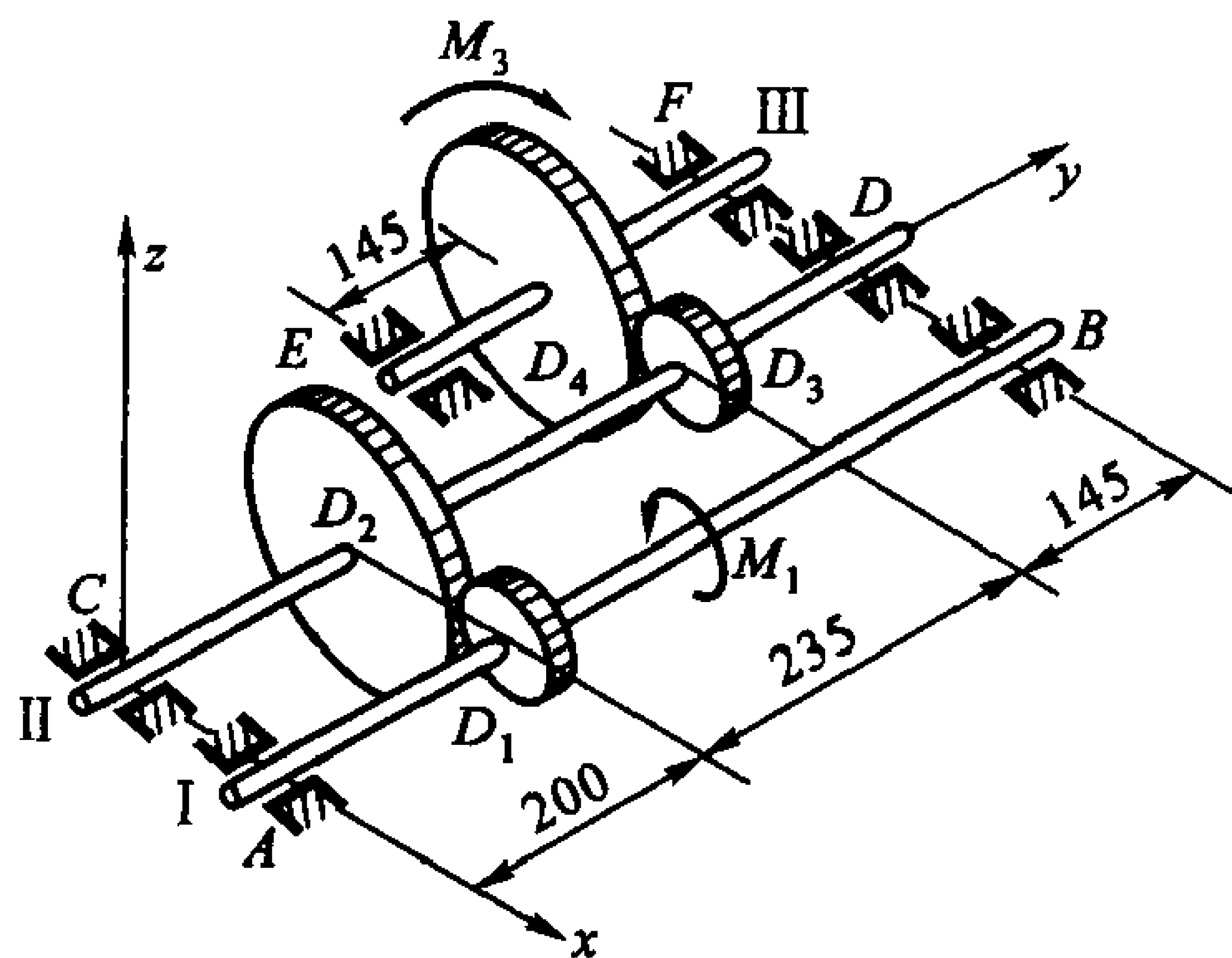
题 4-13 图



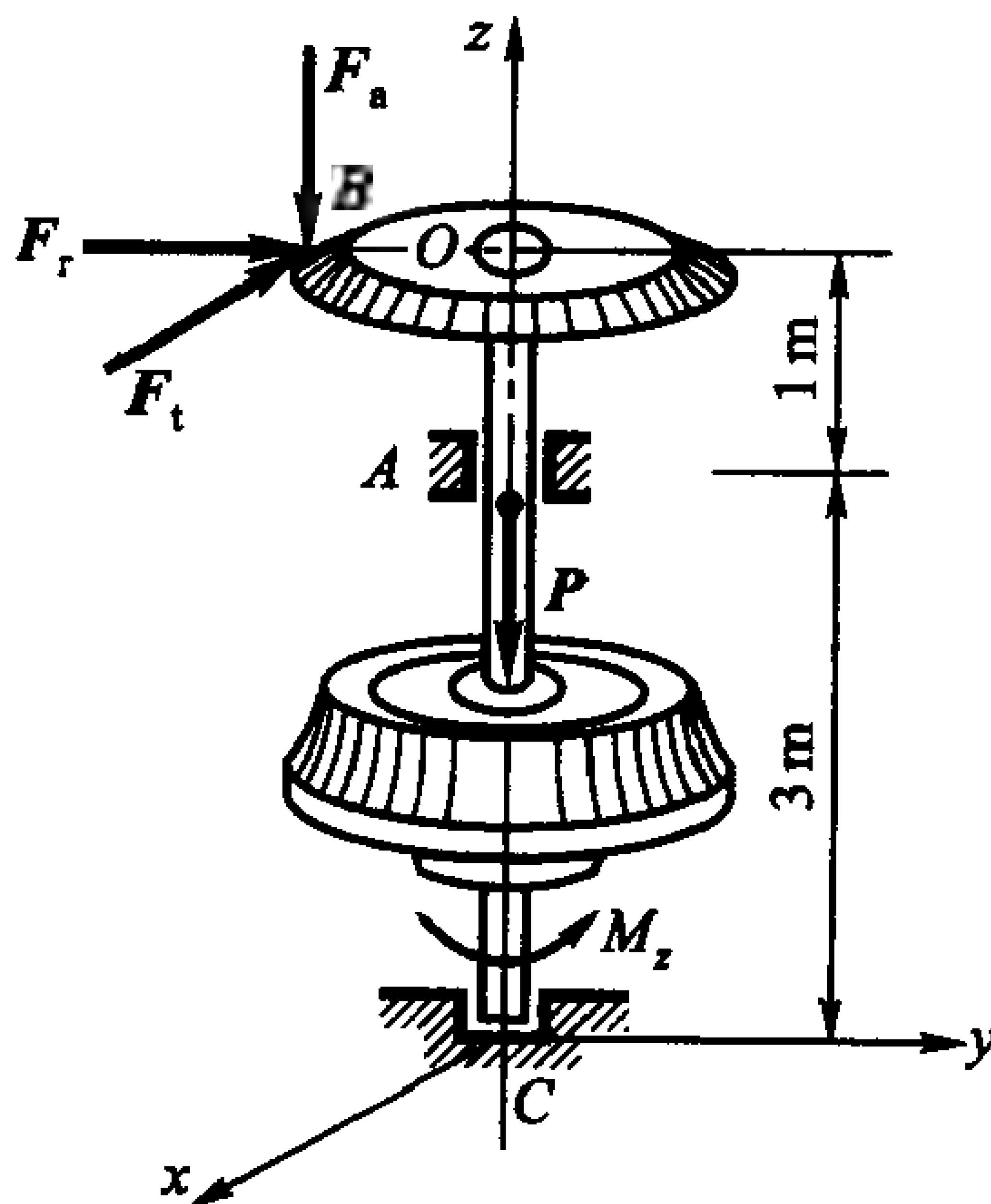
题 4-14 图

4-14 图示电动机以转矩 M 通过链条传动将重物 P 等速提起，链条与水平线成 30°角（直线 O_1x_1 平行于直线 Ax）。已知：$r=100$ mm，$R=200$ mm，$P=10$ kN，链条主动边（下边）的拉力为从动边拉力的两倍。轴及轮重不计，求支座 A 和 B 的约束力以及链条的拉力。

4-15 某减速箱由三轴组成如图示，动力由 I 轴输入，在 I 轴上作用转矩 $M_1=697$ N·m。如齿轮节圆直径为 $D_1=160$ mm，$D_2=632$ mm，$D_3=204$ mm，齿轮压力角为 20°。不计摩擦及轮、轴重量，求等速传动时，轴承 A,B,C,D 的约束力。



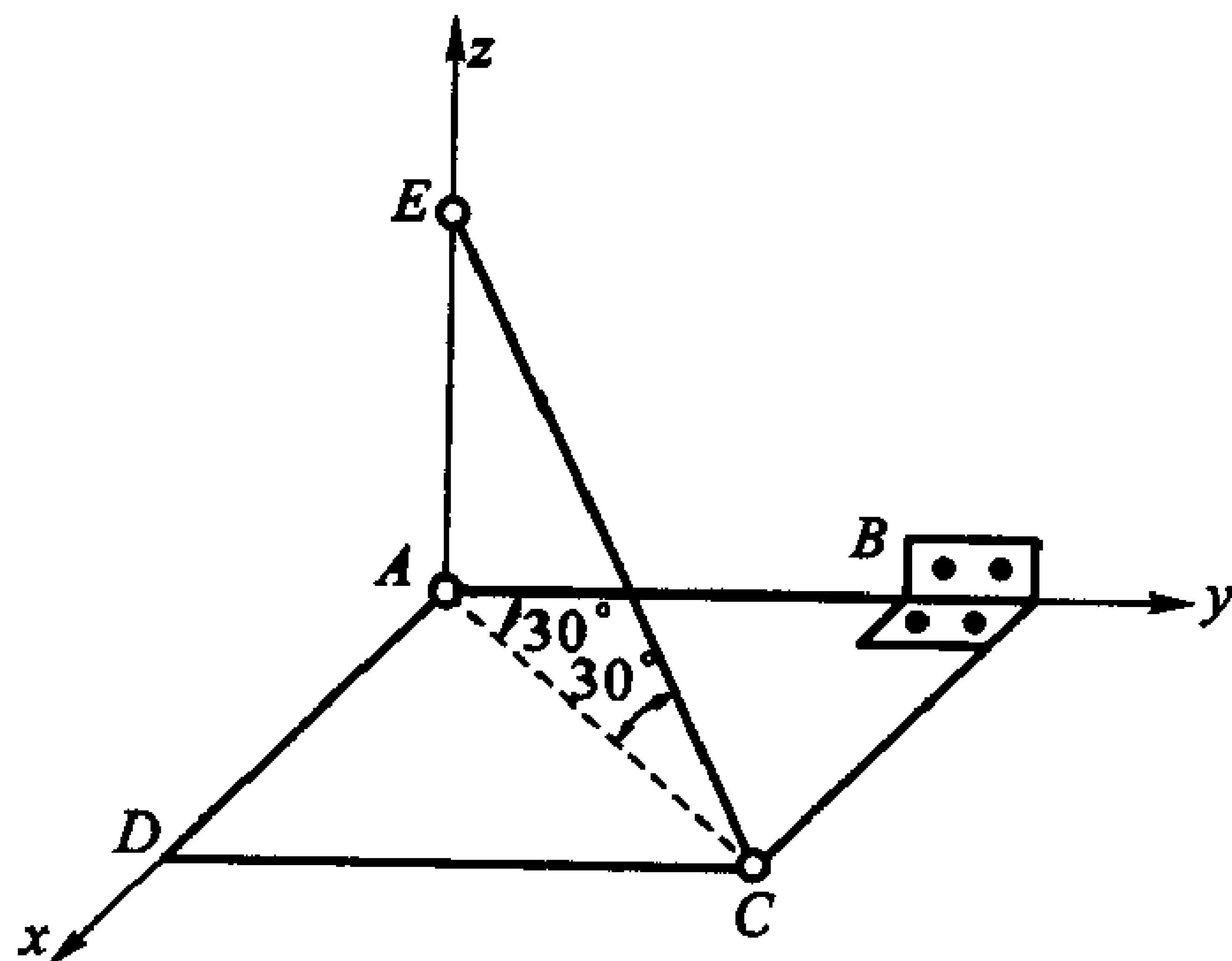
题 4-15 图



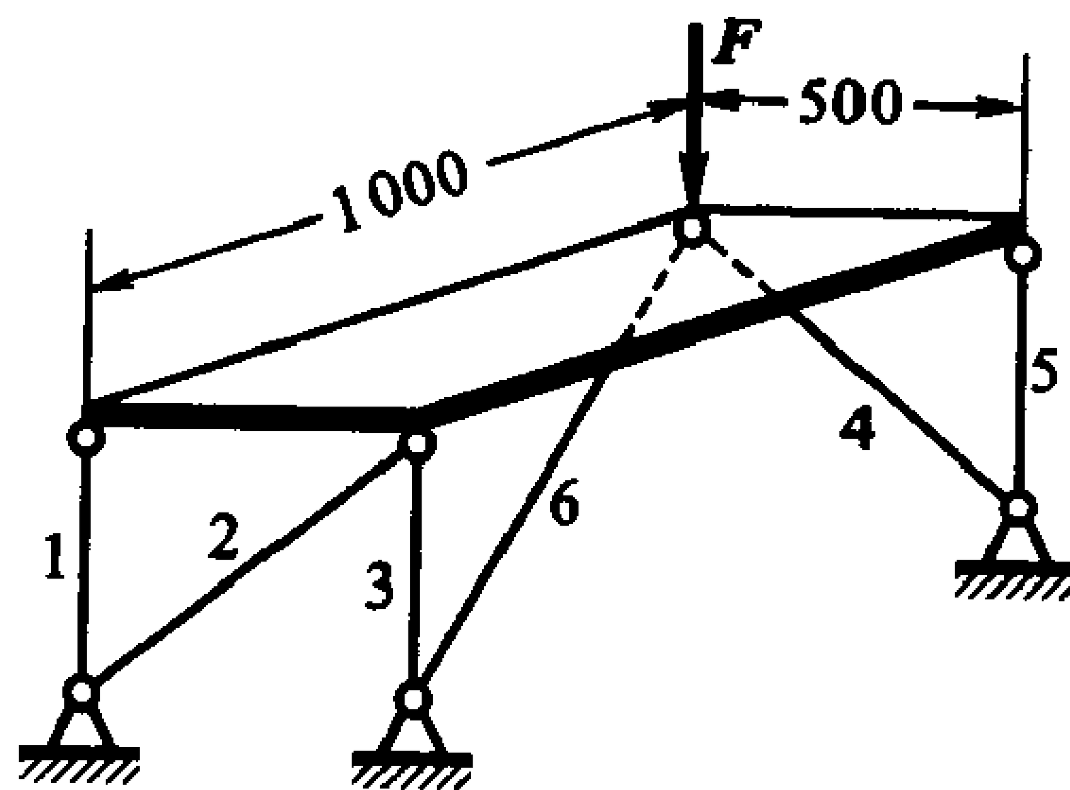
题 4-16 图

4-16 使水涡轮转动的力偶矩为 $M_z=1\ 200$ N·m。在锥齿轮 B 处受到的力分解为三个分力：切向力 $\boldsymbol{F}_t$，轴向力 $\boldsymbol{F}_a$ 和径向力 $\boldsymbol{F}_r$。这些力的比例为 $F_t:F_a:F_r=1:0.32:0.17$。已知水涡轮连同轴和锥齿轮的总重为 $P=12$ kN，其作用线沿轴 Cz，锥齿轮的平均半径 $OB=0.6$ m，其余尺寸如图示。求止推轴承 C 和轴承 A 的约束力。

4-17 如图所示，均质长方形薄板重 $P=200$ N，用球铰链 A 和蝶铰链 B 固定在墙上，并用绳子 CE 维持在水平位置。求绳子的拉力和支座约束力。



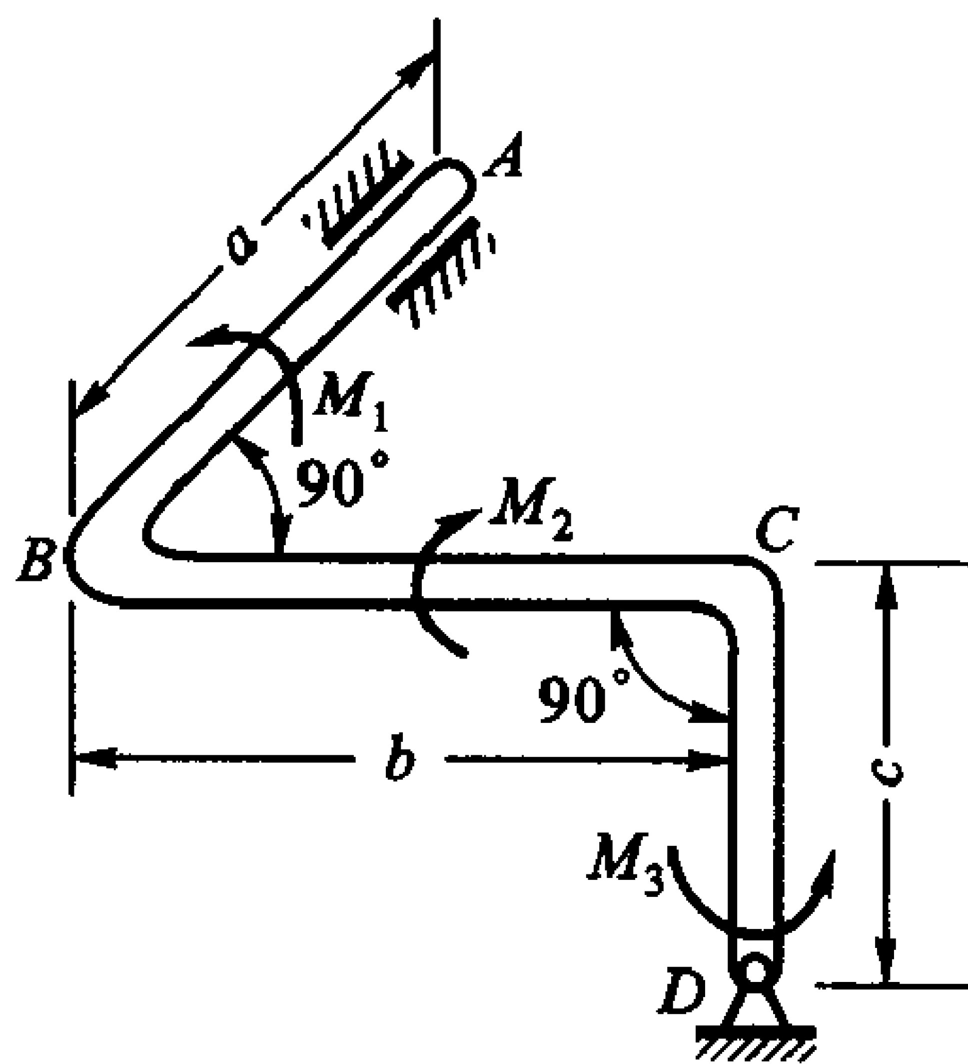
题 4-17 图



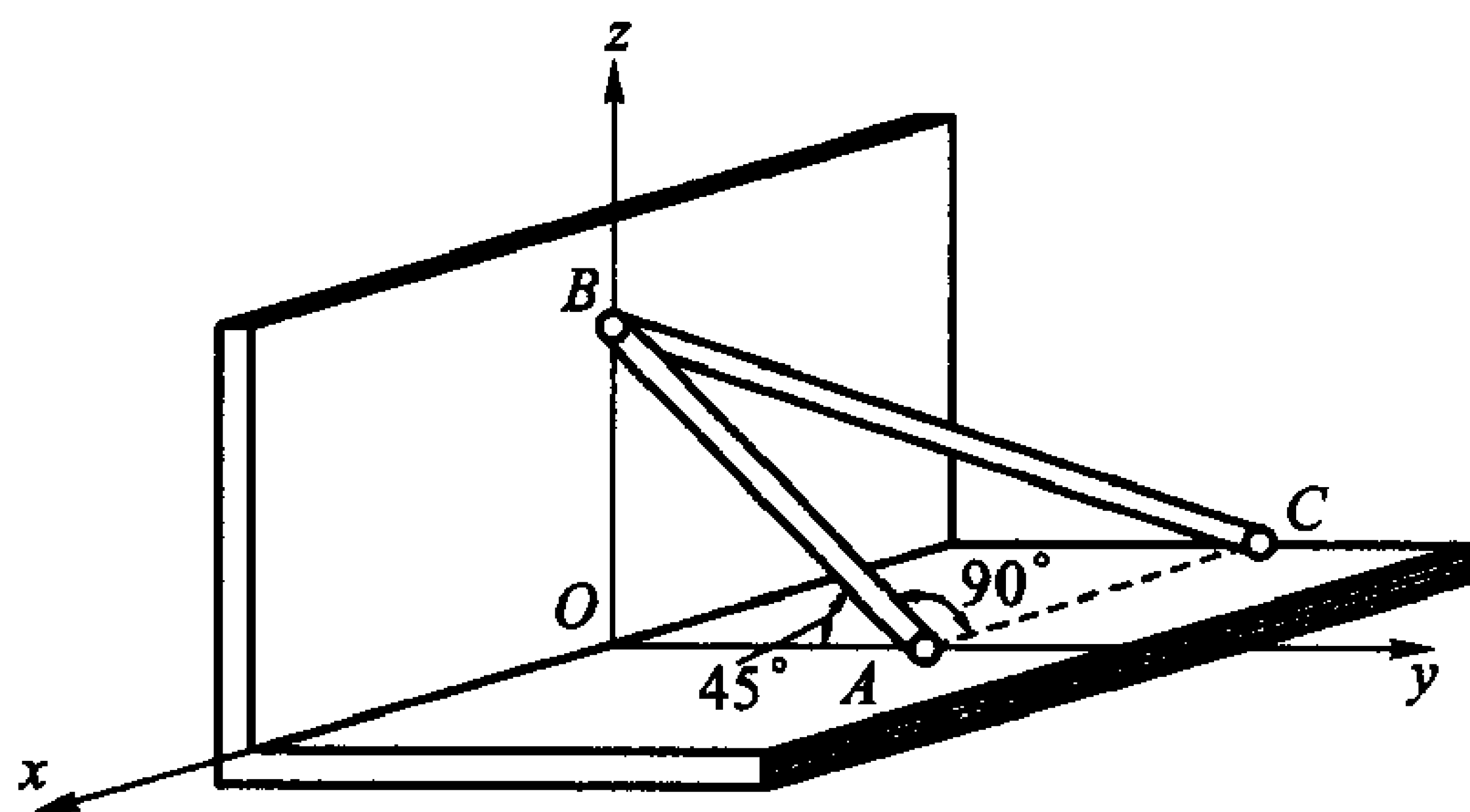
题 4-18 图

4-18 图示六杆支撑一水平板，在板角处受铅直力 F 作用。设板和杆自重不计，求各杆的内力。

4-19 无重曲杆 $ABCD$ 有两个直角，且平面 ABC 与平面 BCD 垂直。杆的 D 端为球铰支座，另一 A 端受轴承支持，如图所示。在曲杆的 AB，BC 和 CD 上作用三个力偶，力偶所在平面分别垂直于 AB，BC 和 CD 三线段。已知力偶矩 M_2 和 M_3，求使曲杆处于平衡的力偶矩 M_1 和支座约束力。



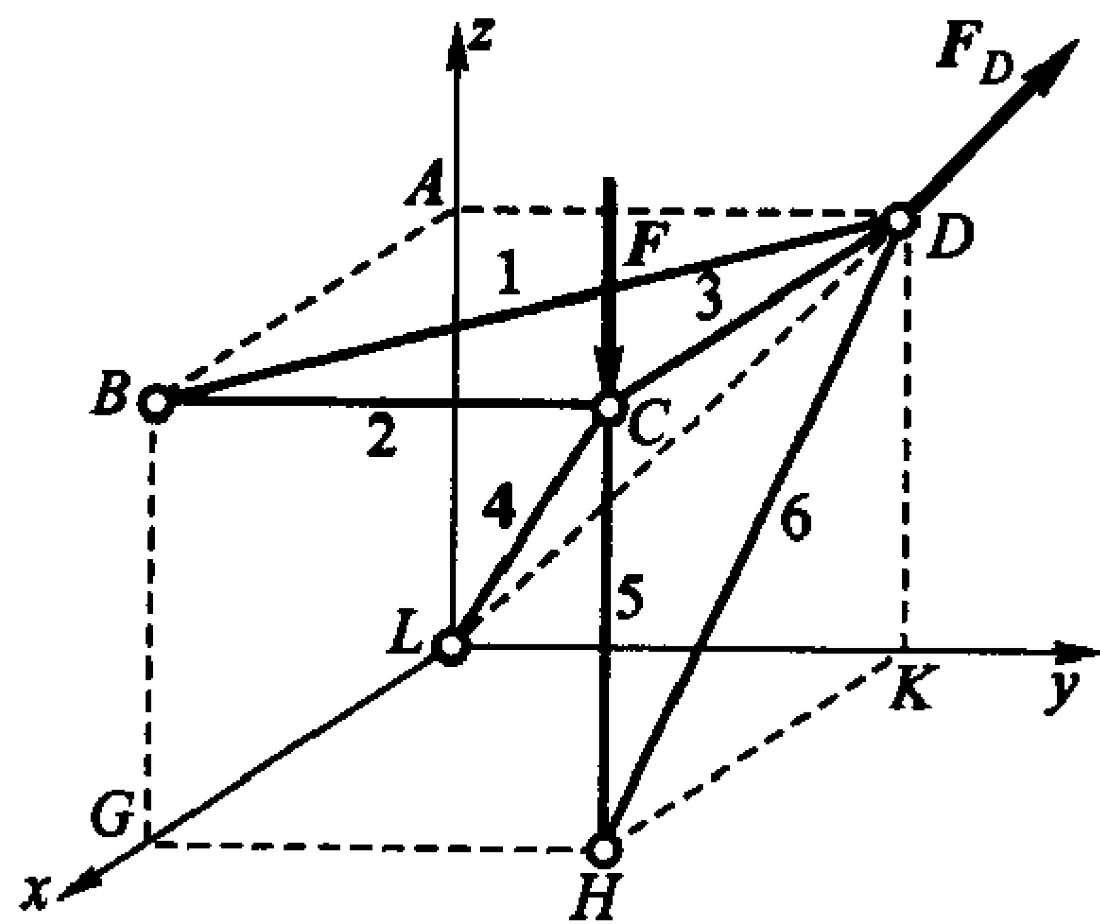
题 4-19 图



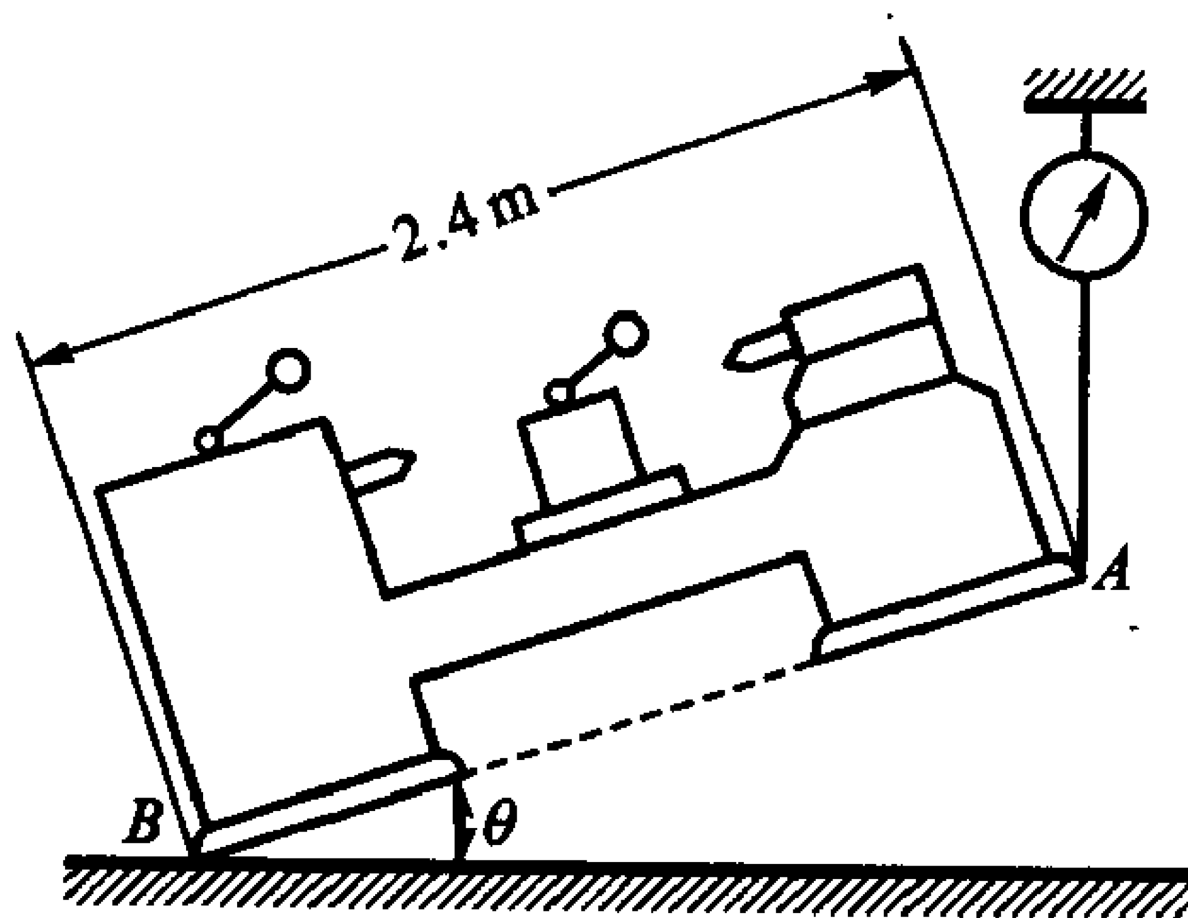
题 4-20 图

4-20 两个均质杆 AB 和 BC 分别重 P_1 和 P_2，其端点 A 和 C 用球铰固定在水平面上，另一端 B 由球铰链相连接，靠在光滑的铅直墙上，墙面与 AC 平行，如图所示。如 AB 与水平线交角为 45°，$\angle BAC = 90°$，求 A 和 C 的支座约束力以及墙上点 B 所受的压力。

4-21 杆系由球铰连接，位于正方体的边和对角线上，如图所示。在节点 D 沿对角线 LD 方向作用力 $\boldsymbol{F}_D$。在节点 C 沿 CH 边铅直向下作用力 $\boldsymbol{F}$。如球铰 B，L 和 H 是固定的，杆重不计，求各杆的内力。



题 4-21 图

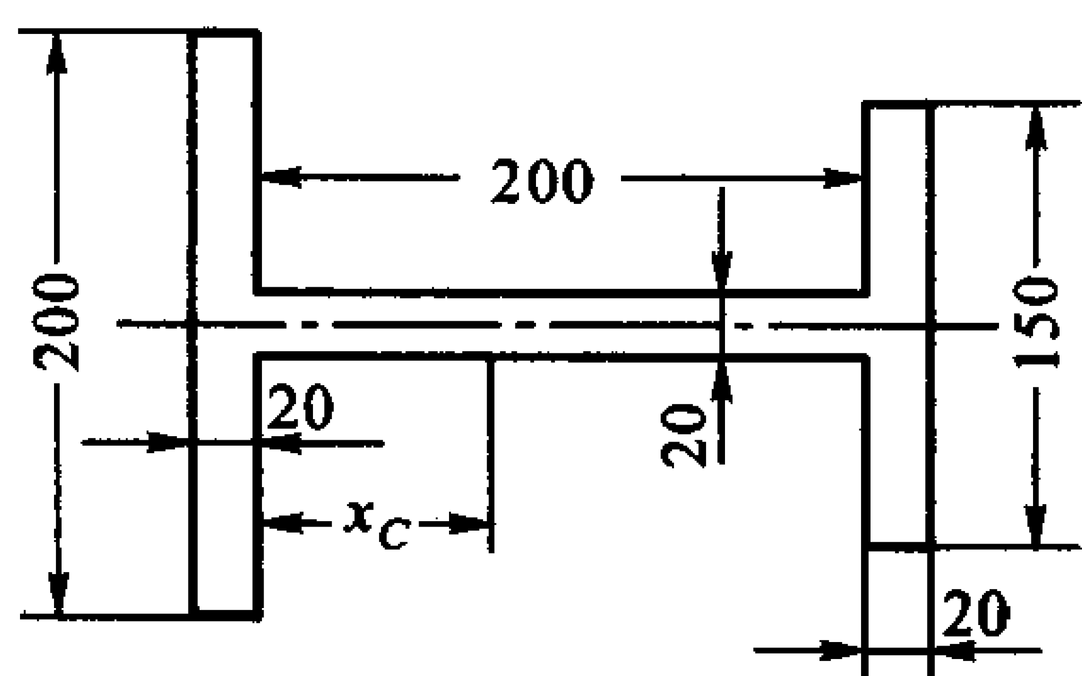


题 4-22 图

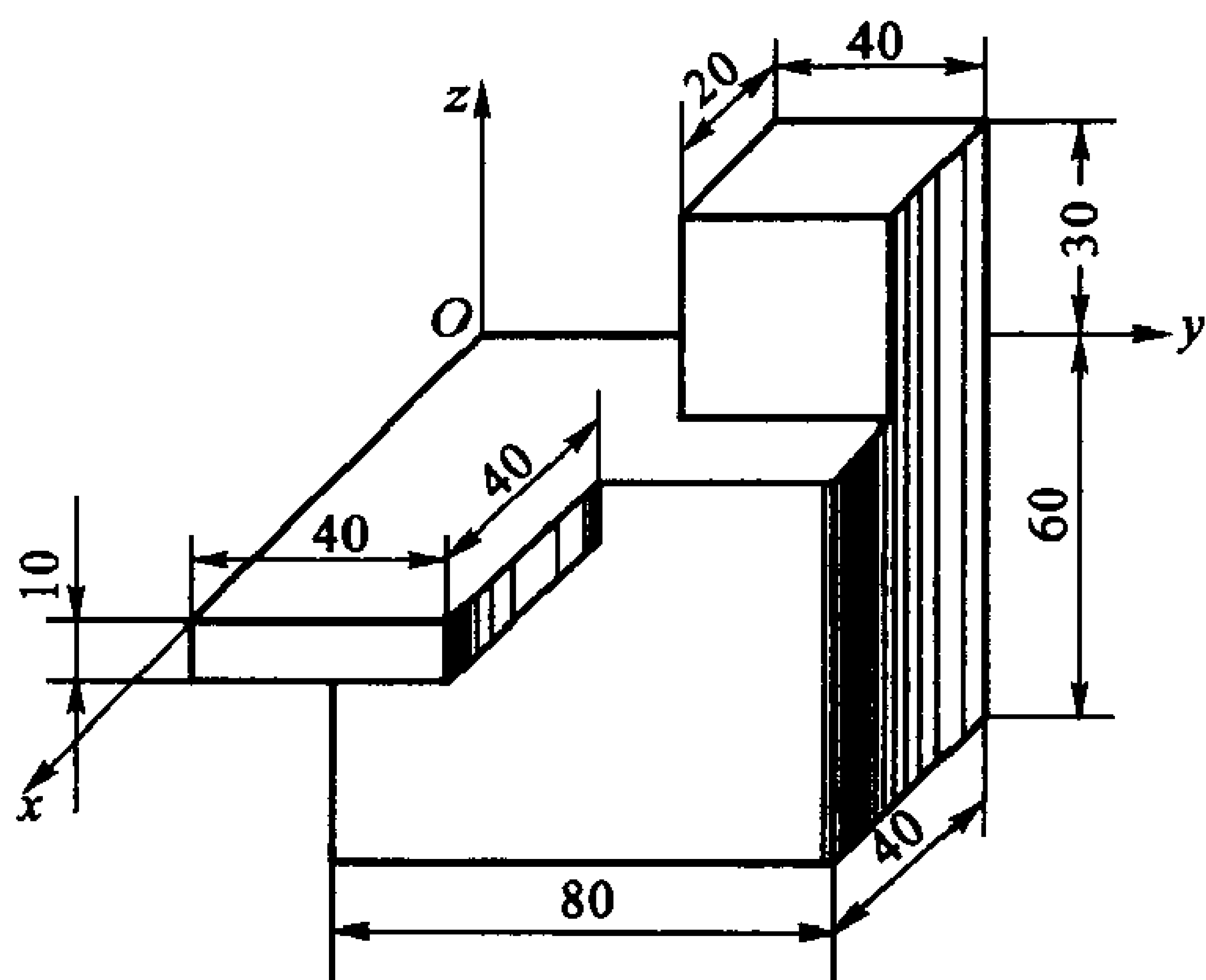
4-22 图示机床重 50 kN，当水平放置时（$\theta = 0°$）秤上读数为 35 kN，当 $\theta = 20°$ 时秤上读

数为 30 kN,试确定机床重心的位置。

4-23 工字钢截面尺寸如图所示,求此截面的几何中心。



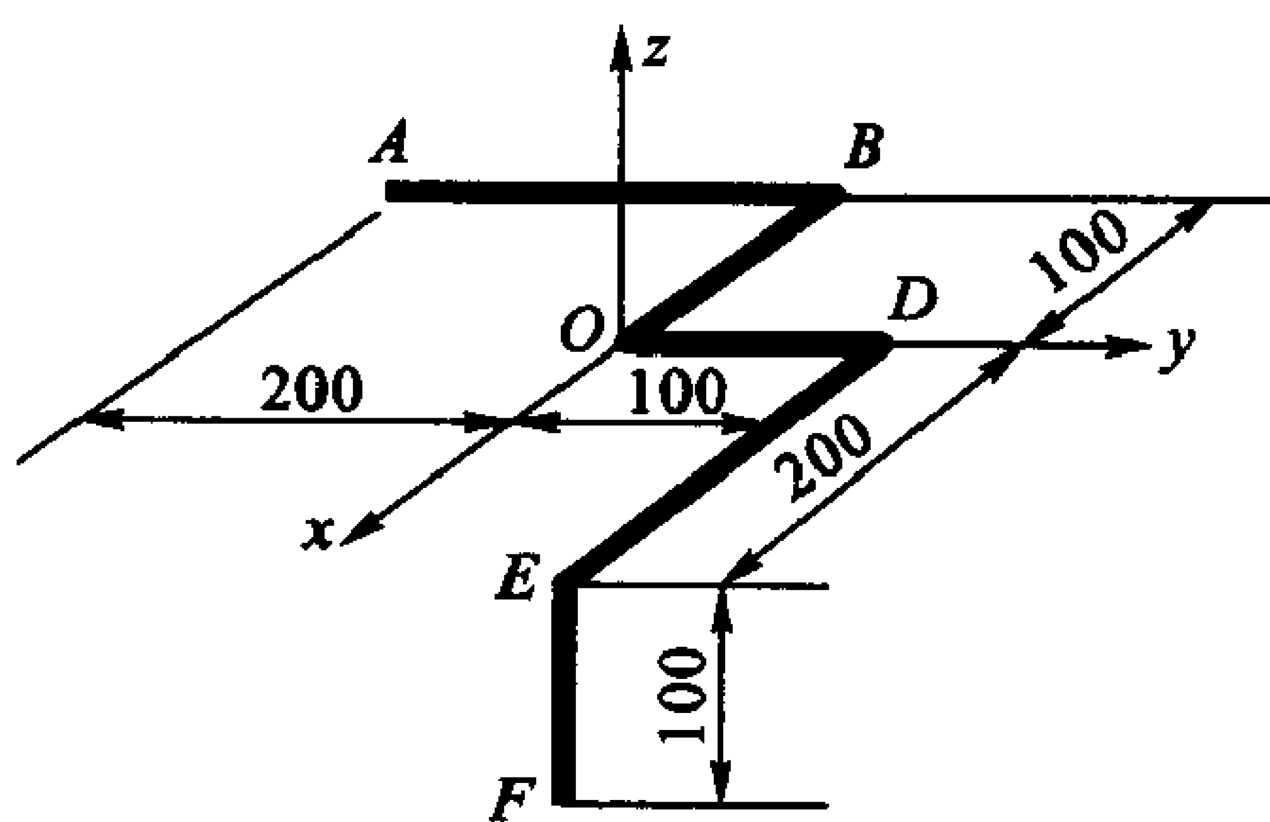
题 4-23 图



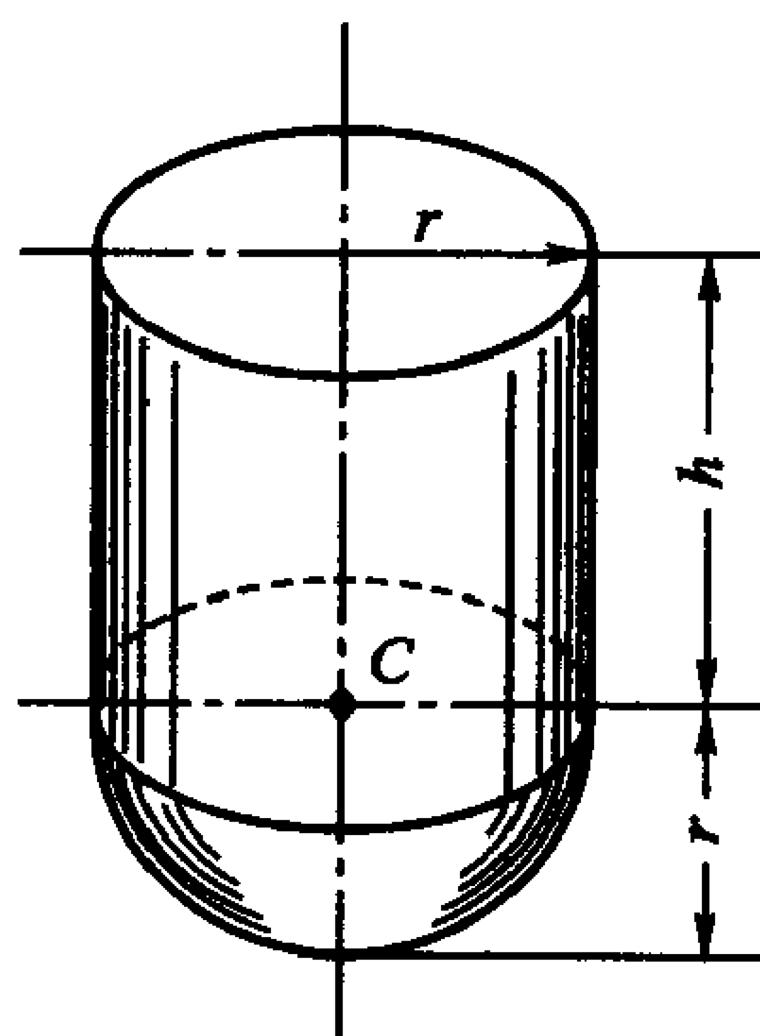
题 4-24 图

4-24 均质块尺寸如图所示,求其重心的位置。

4-25 均质曲杆尺寸如图所示,求此曲杆重心坐标。



题 4-25 图



题 4-26 图

4-26 图示均质物体由半径为 r 的圆柱体和半径为 r 的半球体相结合组成。如均质物体的重心位于半球体的大圆的中心点 C,求圆柱体的高。

第五章 摩 擦

本章将介绍滑动摩擦及滚动摩阻定律，由于**摩擦**是一种极其复杂的物理－力学现象，这里仅介绍工程中常用的近似理论，另外将重点研究有摩擦存在时物体的平衡问题。

§5－1 滑动摩擦

两个表面粗糙的物体，当其接触表面之间有相对滑动趋势或相对滑动时，彼此作用有阻碍相对滑动的阻力，即滑动摩擦力。**摩擦力**作用于相互接触处，其方向与相对滑动的趋势或相对滑动的方向相反，它的大小根据主动力作用的不同，可以分为三种情况，即静滑动摩擦力，最大静滑动摩擦力和动滑动摩擦力。

1. 静滑动摩擦力及最大静滑动摩擦力

在粗糙的水平面上放置一重为 P 的物体，该物体在重力 $\boldsymbol{P}$ 和法向反力 $\boldsymbol{F}_N$ 的作用下处于静止状态(图 5－1a)。今在该物体上作用一大小可变化的水平拉力 $\boldsymbol{F}$，当拉力 $\boldsymbol{F}$ 由零值逐渐增加但不很大时，物体仅有相对滑动趋势，但仍保持静止。可见支承面对物体除法向约束力 $\boldsymbol{F}_N$ 外，还有一个阻碍物体沿水平面向右滑动的切向约束力，此力即**静滑动摩擦力**，简称静摩擦力，常以 $\boldsymbol{F}_s$ 表示，方向向左，如图 5－1b。它的大小由平衡条件确定。此时有

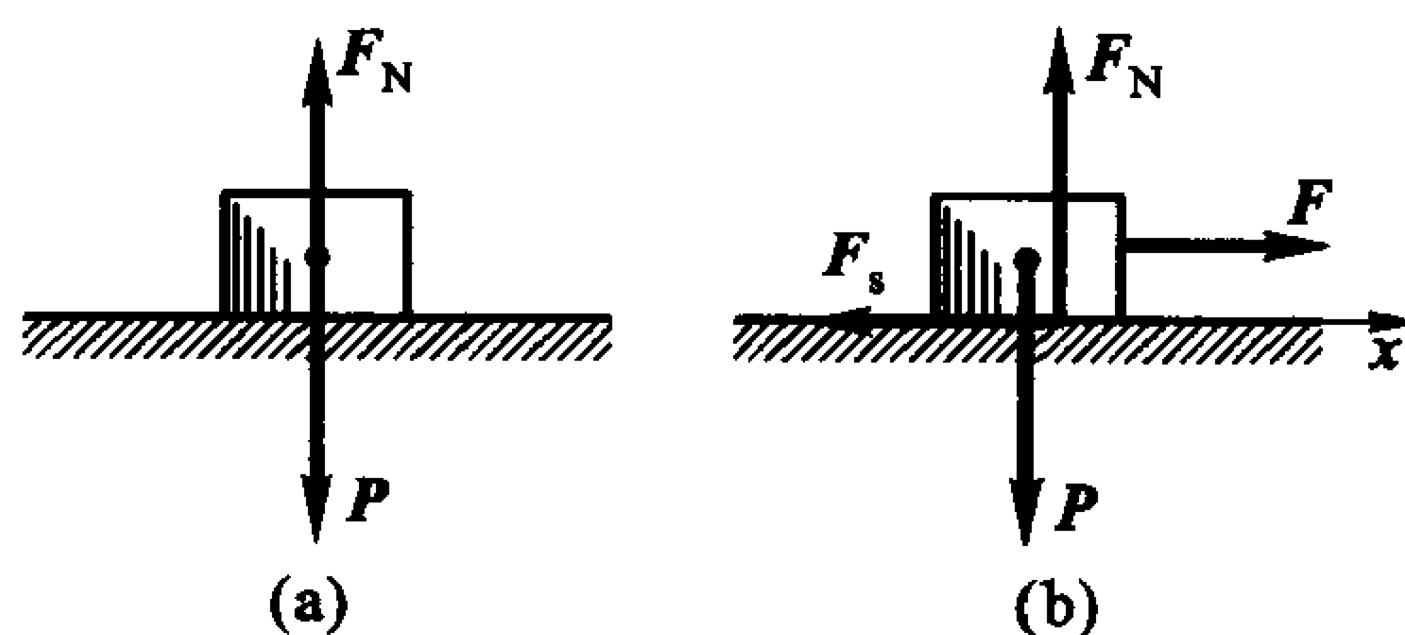


图 5－1

$$\Sigma F_x = 0, F_s = F$$

由上式可知，静摩擦力的大小随主动力 $\boldsymbol{F}$ 的增大而增大，这是静摩擦力和一般约束力共同的性质。

静摩擦力又与一般约束力不同，它并不随主动力 $\boldsymbol{F}$ 的增大而无限度地增

大。当主动力 $\boldsymbol{F}$ 的大小达到一定数值时，物块处于平衡的临界状态。这时，静摩擦力达到最大值，即为最大静滑动摩擦力，简称最大静摩擦力，以 F_{max} 表示。此后，如果主动力 $\boldsymbol{F}$ 再继续增大，但静摩擦力不能再随之增大，物体将失去平衡而滑动。这就是静摩擦力的特点。

综上所述可知，静摩擦力的大小随主动力的情况而改变，但介于零与最大值之间，即

$$0 \leqslant F_s \leqslant F_{max} \tag{5-1}$$

实验表明：最大静摩擦力的大小与两物体间的正压力(即法向约束力)成正比，即

$$F_{max} = f_s F_N \tag{5-2}$$

式中 f_s 是比例常数，称为**静摩擦因数**，它是量纲一的量。

式(5-2)称为静摩擦定律(又称**库仑摩擦定律**)，是工程中常用的近似理论。

静摩擦因数的大小需由实验测定。它与接触物体的材料和表面情况(如粗糙度、温度和湿度等)有关，而与接触面积的大小无关。

静摩擦因数的数值可在工程手册中查到，表 5-1 中列出了一部分常用材料的摩擦因数。但影响摩擦因数的因素很复杂，如果需用比较准确的数值时，必须在具体条件下进行实验测定。

表 5-1 常用材料的滑动摩擦因数

材料名称	静摩擦因数		动摩擦因数	
	无润滑	有润滑	无润滑	有润滑
钢-钢	0.15	0.1~0.12	0.15	0.05~0.1
钢-软钢			0.2	0.1~0.2
钢-铸铁	0.3		0.18	0.05~0.15
钢-青铜	0.15	0.1~0.15	0.15	0.1~0.15
软钢-铸铁	0.2		0.18	0.05~0.15
软钢-青铜	0.2		0.18	0.07~0.15
铸铁-铸铁		0.18	0.15	0.07~0.12
铸铁-青铜			0.15~0.2	0.07~0.15
青铜-青铜		0.1	0.2	0.07~0.1
皮革-铸铁	0.3~0.5	0.15	0.6	0.15
橡皮-铸铁			0.8	0.5
木材-木材	0.4~0.6	0.1	0.2~0.5	0.07~0.15

2. 动滑动摩擦力

当滑动摩擦力已达到最大值时，若主动力 $\boldsymbol{F}$ 再继续加大，接触面之间将出现相对滑动。此时，接触物体之间仍作用有阻碍相对滑动的阻力，这种阻力称为

动滑动摩擦力，简称**动摩擦力**，以 F 表示。实验表明：动摩擦力的大小与接触物体间的正压力成正比，即

$$F = fF_N \tag{5-3}$$

式中 f 是**动摩擦因数**，它与接触物体的材料和表面情况有关。

一般情况下，动摩擦因数小于静摩擦因数，即 $f < f_s$。

实际上动摩擦因数还与接触物体间相对滑动的速度大小有关。对于不同材料的物体，动摩擦因数随相对滑动的速度变化规律也不同。多数情况下，动摩擦因数随相对滑动速度的增大而稍减小。但当相对滑动速度不大时，动摩擦因数可近似地认为是个常数，参阅表 5-1。

在机器中，往往用降低接触表面的粗糙度或加入润滑剂等方法，使动摩擦因数 f 降低，以减小摩擦和磨损。

§5-2 摩擦角和自锁现象

1. 摩擦角

当有摩擦时，支承面对平衡物体的约束力包含法向约束力 $\boldsymbol{F}_N$ 和切向约束力 $\boldsymbol{F}_s$（即静摩擦力）。这两个分力的几何和 $\boldsymbol{F}_{RA} = \boldsymbol{F}_N + \boldsymbol{F}_s$ 称为支承面的全约束力，它的作用线与接触面的公法线成一偏角 φ，如图 5-2a 所示。当物块处于平衡的临界状态时，静摩擦力达到由式(5-2)确定的最大值，偏角 φ 也达到最大值 φ_f，如图 5-2b 所示。全约束力与法线间的夹角的最大值 φ_f 称为**摩擦角**。由图可得

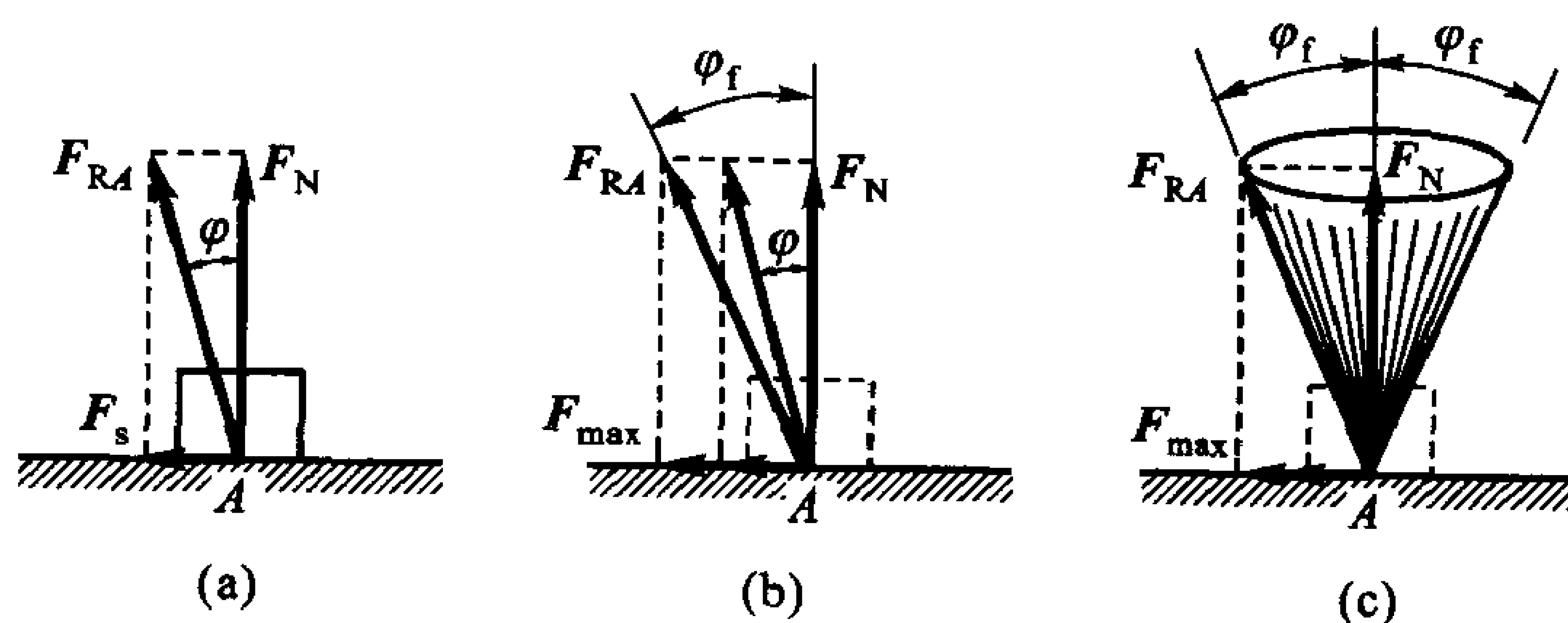


图 5-2

$$\tan \varphi_f = \frac{F_{max}}{F_N} = \frac{f_s F_N}{F_N} = f_s \tag{5-4}$$

即：摩擦角的正切等于静摩擦因数。可见，摩擦角与摩擦因数一样，都是表示材料的表面性质的量。

当物块的滑动趋势方向改变时，全约束力作用线的方位也随之改变；在临界状态下，$\boldsymbol{F}_{RA}$的作用线将画出一个以接触点A为顶点的锥面，如图5－2c所示，称为摩擦锥。设物块与支承面间沿任何方向的摩擦因数都相同，即摩擦角都相等，则摩擦锥将是一个顶角为$2\varphi_f$的圆锥。

2．自锁现象

物块平衡时，静摩擦力不一定达到最大值，可在零与最大值F_{max}之间变化，所以全约束力与法线间的夹角φ也在零与摩擦角φ_f之间变化，即

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_f \tag{5-5}$$

由于静摩擦力不可能超过最大值，因此全约束力的作用线也不可能超出摩擦角以外，即全约束力必在摩擦角之内。由此可知：

（1）如果作用于物块的全部主动力的合力$\boldsymbol{F}_R$的作用线在摩擦角φ_f之内，则无论这个力怎样大，物块必保持静止。这种现象称为**自锁现象**。因为在这种情况下，主动力的合力$\boldsymbol{F}_R$与法线间的夹角$\theta<\varphi_f$，因此，$\boldsymbol{F}_R$和全约束力$\boldsymbol{F}_{RA}$必能满足二力平衡条件，且$\theta=\varphi<\varphi_f$，如图5－3a所示。工程实际中常应用自锁条件设计一些机构或夹具，如千斤顶、压榨机、圆锥销等，使它们始终保持在平衡状态下工作。

（2）如果全部主动力的合力$\boldsymbol{F}_R$的作用线在摩擦角φ_f之外，则无论这个力怎样小，物块一定会滑动。因为在这种情况下，$\theta>\varphi_f$，而$\varphi\leqslant\varphi_f$，支承面的全约束力$\boldsymbol{F}_{RA}$和主动力的合力$\boldsymbol{F}_R$不能满足二力平衡条件，如图5－3b所示。应用这个道理，可以设法避免发生自锁现象。

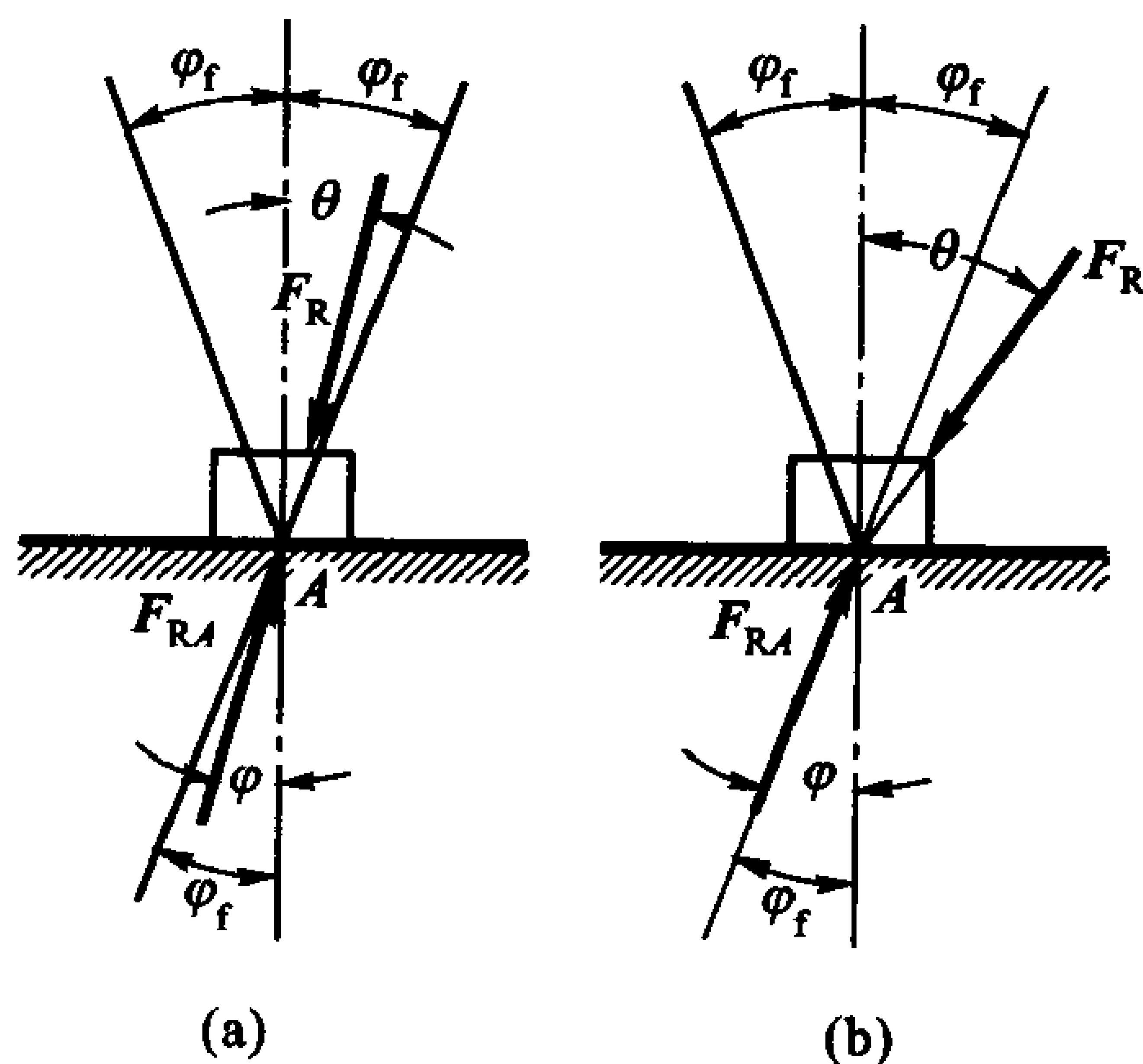


图5－3

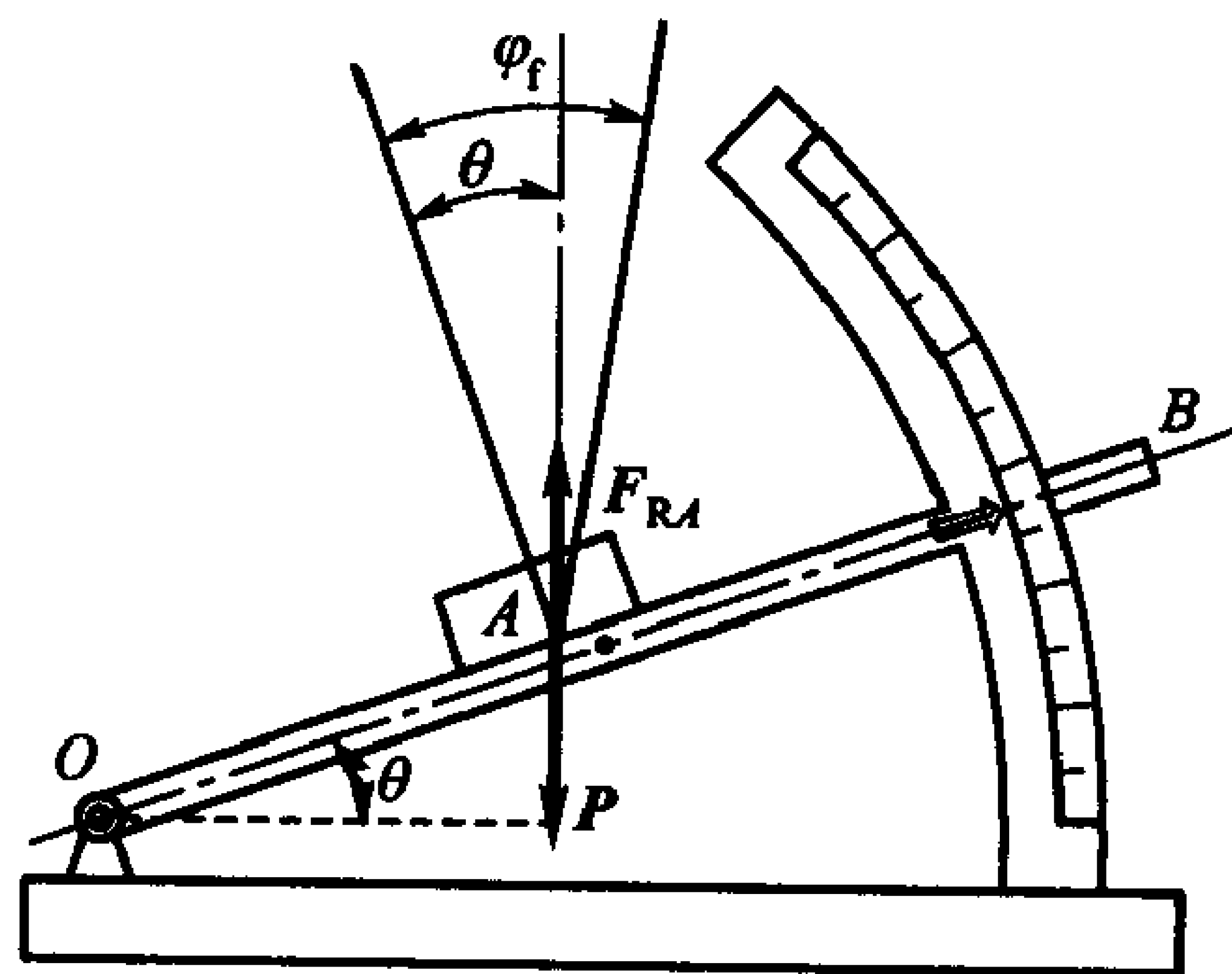


图5－4

利用摩擦角的概念，可用简单的试验方法，测定静摩擦因数。如图5－4所

示，把要测定的两种材料分别做成斜面和物块，把物块放在斜面上，并逐渐从零起增大斜面的倾角 θ，直到物块刚开始下滑时为止。这时的 θ 角就是要测定的摩擦角 φ_f，因为当物块处于临界状态时，$\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{F}_{RA}$，$\theta=\varphi_f$。由式(5-4)求得摩擦因数，即

$$f_s=\tan\varphi_f=\tan\theta$$

斜面的自锁条件就是螺纹(图 5-5a)的自锁条件。因为螺纹可以看成为绕在一圆柱体上的斜面，如图 5-5b 所示，螺纹升角 θ 就是斜面的倾角，如图 5-5c 所示。螺母相当于斜面上的滑块 A，加于螺母的轴向载荷 $\boldsymbol{P}$，相当物块 A 的重力。要使螺纹自锁，必须使螺纹的升角 θ 小于或等于摩擦角 φ_f。因此螺纹的自锁条件是

$$\theta\leqslant\varphi_f$$

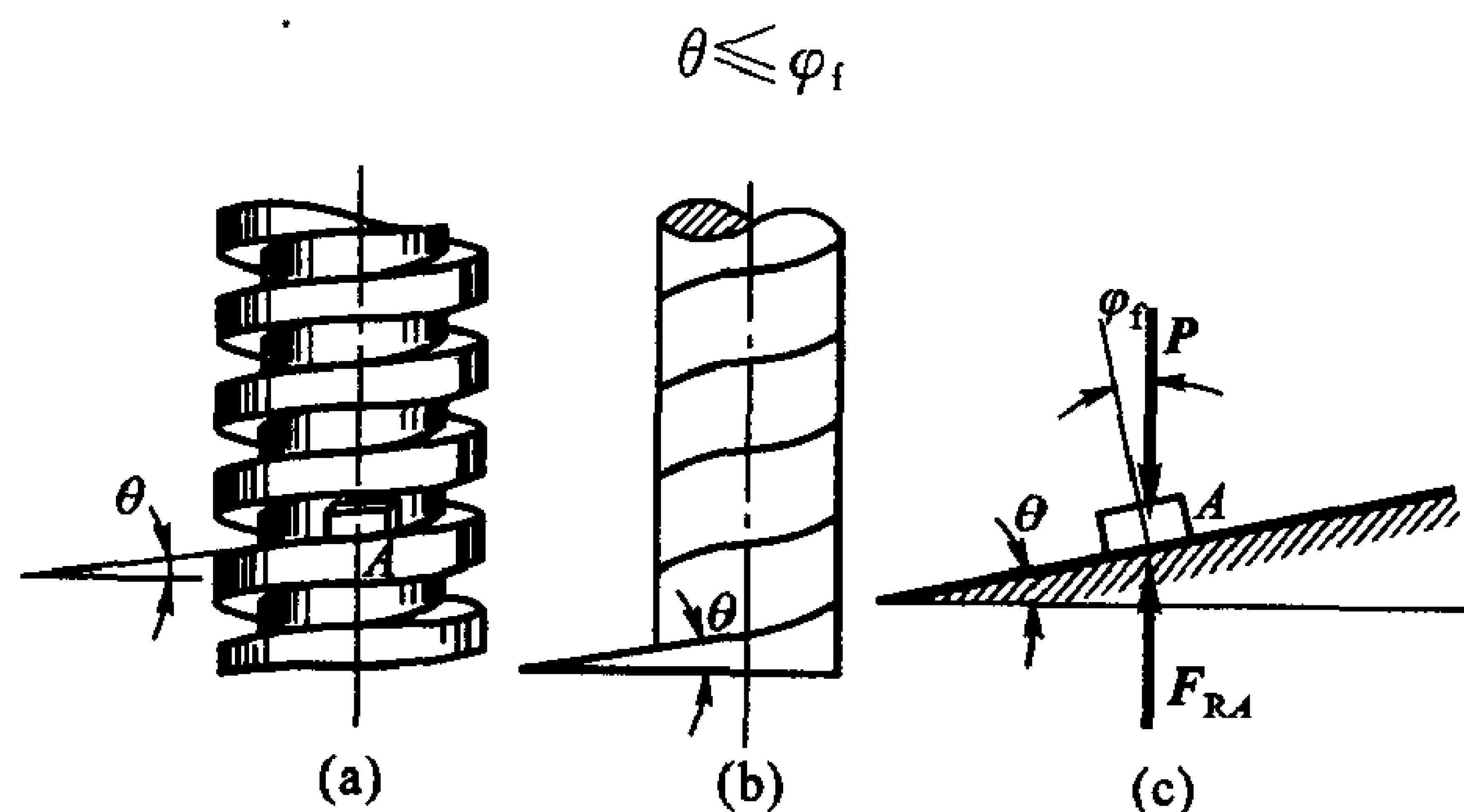


图 5-5

若螺旋千斤顶的螺杆与螺母之间的摩擦因数为 $f_s=0.1$，则

$$\tan\varphi_f=f_s=0.1$$

得

$$\varphi_f=5°43'$$

为保证螺旋千斤顶自锁，一般取螺纹升角 $\theta=4°\sim4°30'$。

§5-3　考虑摩擦时物体的平衡问题

考虑摩擦时，求解物体平衡问题的步骤与前几章所述大致相同，但有如下的几个特点：(1) 分析物体受力时，必须考虑接触面间切向的摩擦力 $\boldsymbol{F}_s$，通常增加了未知量的数目；(2) 为确定这些新增加的未知量，还需列出补充方程，即 $F_s\leqslant f_sF_N$，补充方程的数目与摩擦力的数目相同；(3) 由于物体平衡时摩擦力有一定的范围(即 $0\leqslant F_s\leqslant f_sF_N$)，所以有摩擦时平衡问题的解亦有一定的范围，而不是

一个确定的值。

工程中有不少问题只需要分析平衡的临界状态，这时静摩擦力等于其最大值，补充方程只取等号。有时为了计算方便，也先在临界状态下计算，求得结果后再分析、讨论其解的平衡范围。

例 5-1 物体重为 P，放在倾角为 θ 的斜面上，它与斜面间的摩擦因数为 f_s，如图 5-6a 所示。当物体处于平衡时，试求水平力 $\boldsymbol{F}_1$ 的大小。

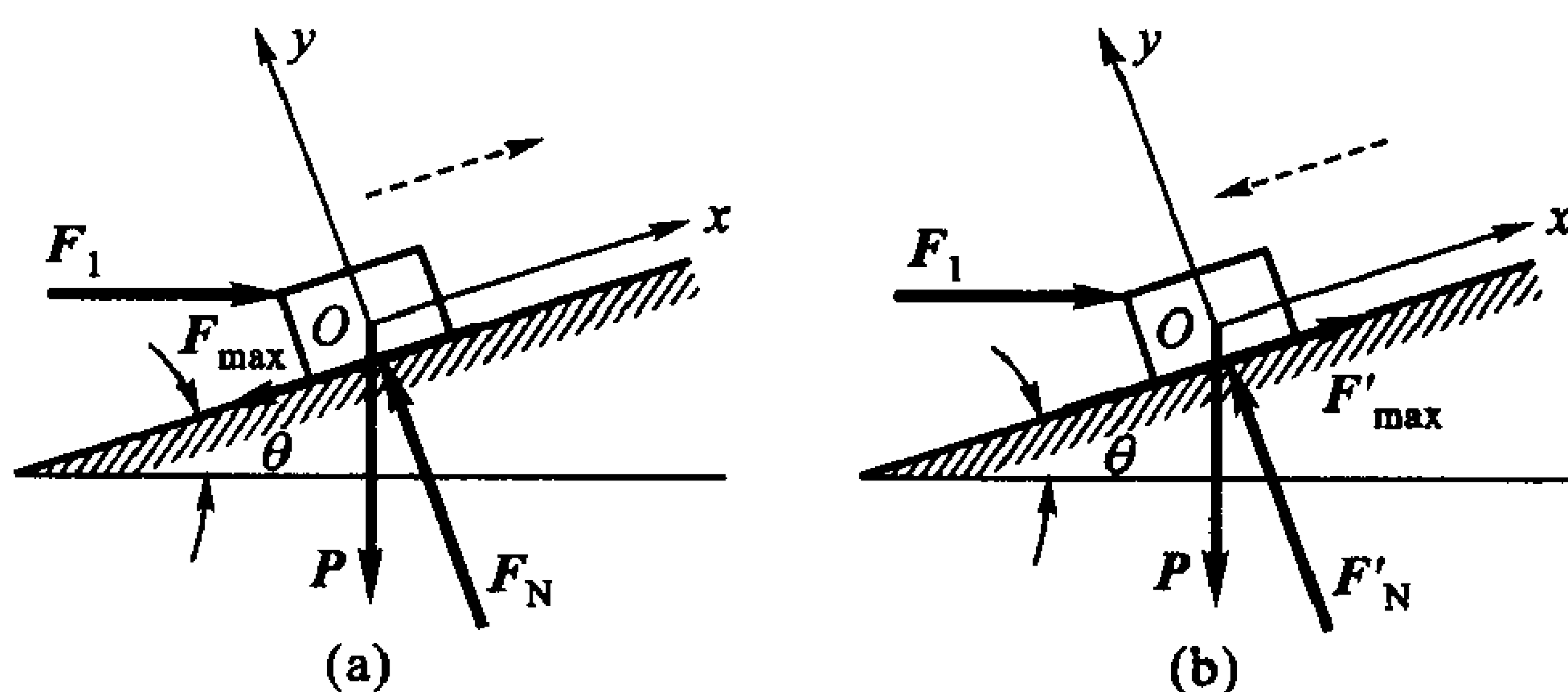


图 5-6

解： 由经验易知，力 F_1 太大，物块将上滑；力 F_1 太小，物块将下滑，因此 F_1 应在最大与最小值之间。

先求力 F_1 的最大值。当力 F_1 达到此值时，物体处于将要向上滑动的临界状态。在此情形下，摩擦力 $\boldsymbol{F}_s$ 沿斜面向下，并达到最大值 F_{max}。物体共受 4 个力作用：已知力 $\boldsymbol{P}$，未知力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_N$，$\boldsymbol{F}_{max}$，如图 5-6a 所示。列平衡方程

$$\Sigma F_x = 0,\quad F_1\cos\theta - P\sin\theta - F_{max} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0,\quad F_N - F_1\sin\theta - P\cos\theta = 0$$

此外，还有 1 个补充方程，即

$$F_{max} = f_s F_N$$

三式联立，可解得水平推力 F_1 的最大值为

$$F_{1max} = P\frac{\sin\theta + f_s\cos\theta}{\cos\theta - f_s\sin\theta}$$

现再求 F_1 的最小值。当力 F_1 达到此值时，物体处于将要向下滑动的临界状态。在此情形下，摩擦力沿斜面向上，并达到另一最大值，用 $\boldsymbol{F}'_{max}$ 表示此力，物体的受力情况如图 5-3b 所示。列平衡方程

$$\Sigma F_x = 0,\quad F_1\cos\theta - P\sin\theta - F'_{max} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0,\quad F'_N - F_1\sin\theta - P\cos\theta = 0$$

此外，再列出补充方程

$$F'_{max} = f_s F'_N$$

三式联立，可解得水平推力 F_1 的最小值为

$$F_{1min} = P\frac{\sin\theta - f_s\cos\theta}{\cos\theta + f_s\sin\theta}$$

综合上述两个结果可知：为使物块静止，力 F_1 必须满足如下条件

$$P\frac{\sin\theta - f_s\cos\theta}{\cos\theta + f_s\sin\theta} \leqslant F_1 \leqslant P\frac{\sin\theta + f_s\cos\theta}{\cos\theta - f_s\sin\theta}$$

此题如不计摩擦（$f_s = 0$），平衡时应有 $F_1 = P\tan\theta$，其解答是唯一的。

本题也可以利用摩擦角的概念，使用全约束力来进行求解。当物块有向上滑动趋势且达临界状态时，全约束力 $\boldsymbol{F}_R$ 与法线夹角为摩擦角 φ_f，物块受力如图 5-7a 所示。这是平面汇交力系，平衡方程如下：

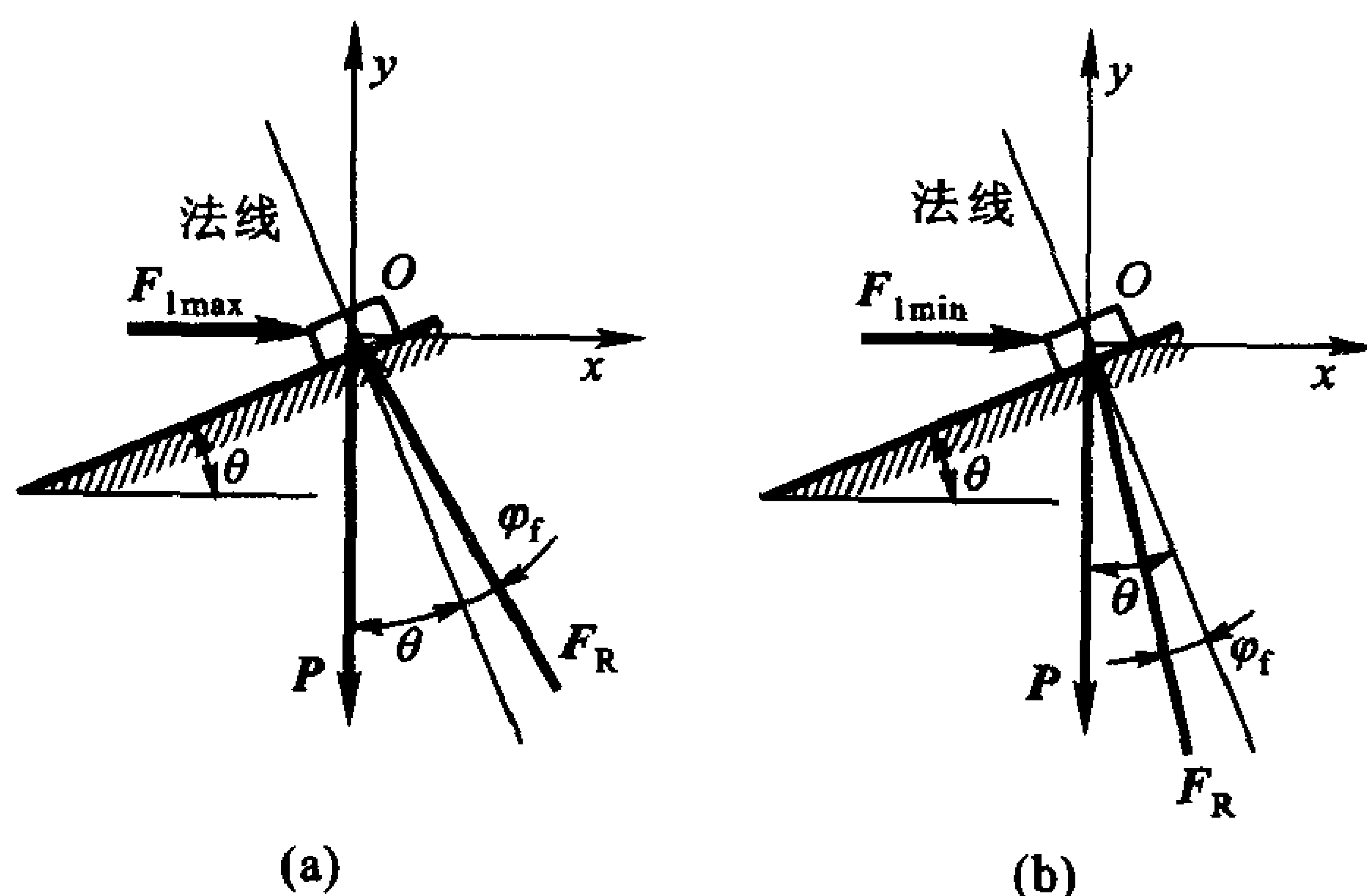


图 5-7

$$\sum F_y = 0 \qquad F_R\cos(\theta + \varphi_f) - P = 0$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{1\max} - F_R\sin(\theta + \varphi_f) = 0$$

解得

$$F_{1\max} = P\tan(\theta + \varphi_f)$$

同样，当物块有向下滑动趋势且达临界状态时，受力如图 5-7b 所示，平衡方程为

$$\sum F_y = 0 \qquad F_R\cos(\theta - \varphi_f) - P = 0$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{1\min} - F_R\sin(\theta - \varphi_f) = 0$$

解得

$$F_{1\min} = P\tan(\theta - \varphi_f)$$

由以上计算知，使物块平衡的力 $\boldsymbol{F}_1$ 应满足

$$P\tan(\theta - \varphi_f) \leqslant F_1 \leqslant P\tan(\theta + \varphi_f)$$

这一结果与用解析法计算的结果是相同的。对图 5-7a，b 所示的两个平面汇交力系也可以不列平衡方程，只需用几何法画出封闭的力三角形就可以直接求出 $F_{1\max}$ 与 $F_{1\min}$。

在此例题中，如斜面的倾角小于摩擦角，即 $\theta < \varphi_f$ 时，水平推力 $F_{1\min}$ 为负值。这说明，此时物块不需要力 F_1 的支持就能静止于斜面上；而且无论重力 $\boldsymbol{P}$ 值多大，物块也不会下滑，这就是自锁现象。

应该强调指出，在临界状态下求解有摩擦的平衡问题时，必须根据相对滑动的趋势，正确判定摩擦力的方向。这是因为解题中引用了补充方程 $F_{\max} = f_s F_N$，由于 f_s 为正值，$F_{\max}$ 与 F_N 必须有相同的符号。法向约束力 $\boldsymbol{F}_N$ 的方向总是确定的，F_N 值永为正，因而 $F_{\max}$ 也应为正值，即摩擦力 $\boldsymbol{F}_{\max}$ 的方向不能假定，

必须按真实方向给出。

例 5-2　图 5-8a 所示为凸轮机构。已知推杆(不计自重)与滑道间的摩擦因数为 f_s，滑道宽度为 b。设凸轮与推杆接触处的摩擦忽略不计。问 a 为多大，推杆才不致被卡住。

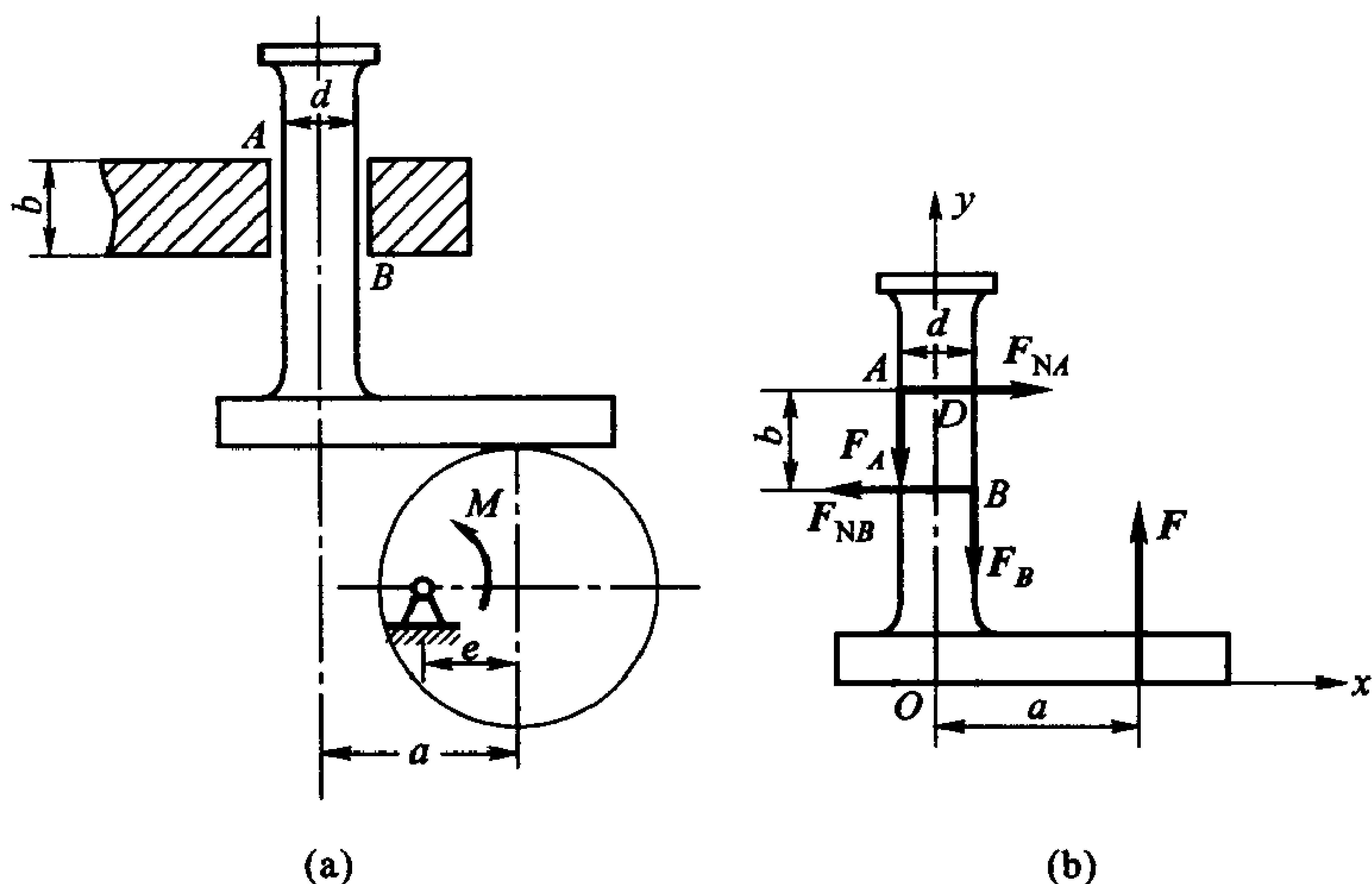


图 5-8

解：　取推杆为研究对象。其受力图如图 5-8b 所示，推杆除受凸轮推力 $\boldsymbol{F}$ 作用外，在滑道 A，B 处还受法向反力 $\boldsymbol{F}_{NA}$，$\boldsymbol{F}_{NB}$ 作用，由于推杆有向上滑动趋势，则摩擦力 $\boldsymbol{F}_A$，$\boldsymbol{F}_B$ 的方向向下。

列平衡方程

$$\Sigma F_x = 0,\quad F_{NA} - F_{NB} = 0 \tag{a}$$

$$\Sigma F_y = 0,\quad -F_A - F_B + F = 0 \tag{b}$$

$$\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0,\quad Fa - F_{NB}b - F_B\frac{d}{2} + F_A\frac{d}{2} = 0 \tag{c}$$

考虑平衡的临界情况(即推杆将动而尚未动时)，摩擦力都达最大值，可以列出两个补充方程

$$F_A = f_s F_{NA} \tag{d}$$

$$F_B = f_s F_{NB} \tag{e}$$

由式(a)得

$$F_{NA} = F_{NB} = F_N$$

代入式(d)、(e)，得

$$F_A = F_B = F_{max} = f_s F_N$$

代入式(b)，得

$$F = 2F_{max}$$

最后代入式(c)，注意 $F_{NB} = F_{max}/f_s$，解得

$$a_{极限} = \frac{b}{2f_s}$$

保持 F 和 b 不变，由式(c)可见，当 a 减小时，$F_{NB}(=F_{NA})$亦减小，因而最大静摩擦力减小，式(b)不能成立，因而当 $a<\frac{b}{2f_s}$时，推杆不能平衡，即推杆不会被卡住。

本题也可以用摩擦角及全约束力来进行求解。取推杆为研究对象，这时应将 A，B 处的摩擦力和法向约束力分别合成为全约束力 $\boldsymbol{F}_{RA}$ 和 $\boldsymbol{F}_{RB}$。于是，推杆受 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}_{RA}$ 和 $\boldsymbol{F}_{RB}$ 三个力作用。

用比例尺在图上画出推杆的几何尺寸，并自 A，B 两点各作与法线成夹角 φ_f(摩擦角)的直线，两线交于点 C 如图5-9所示，点 C 至推杆中心线的距离即为所求的临界值 $a_{极限}$，可用比例尺从图上量出。或按下式计算，得

$$a_{极限}=\frac{b}{2}\cot\varphi_f=\frac{b}{2f_s}$$

由摩擦力的性质可知，A，B 处的全约束力只能在摩擦角以内，也就是两力的作用线的交点只可能在点 C 或 C 的右侧(阴影部分内)。根据三力平衡的汇交条件可知，只有 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}_{RA}$ 和 $\boldsymbol{F}_{RB}$ 三个力汇交于一点时推杆才能平衡。由于 $\boldsymbol{F}_{RA}$ 和 $\boldsymbol{F}_{RB}$ 在点 C 左侧不可能相交，因而当 $a<a_{极限}$，或 $a<\frac{b}{2f_s}$时，三力不可能汇交，即推杆不能被卡住。而当 $a\geqslant\frac{b}{2f_s}$时，三力将汇交于一点而平衡，此时无论推力 $\boldsymbol{F}$ 多大也不能推动推杆，推杆将被卡住(自锁)。

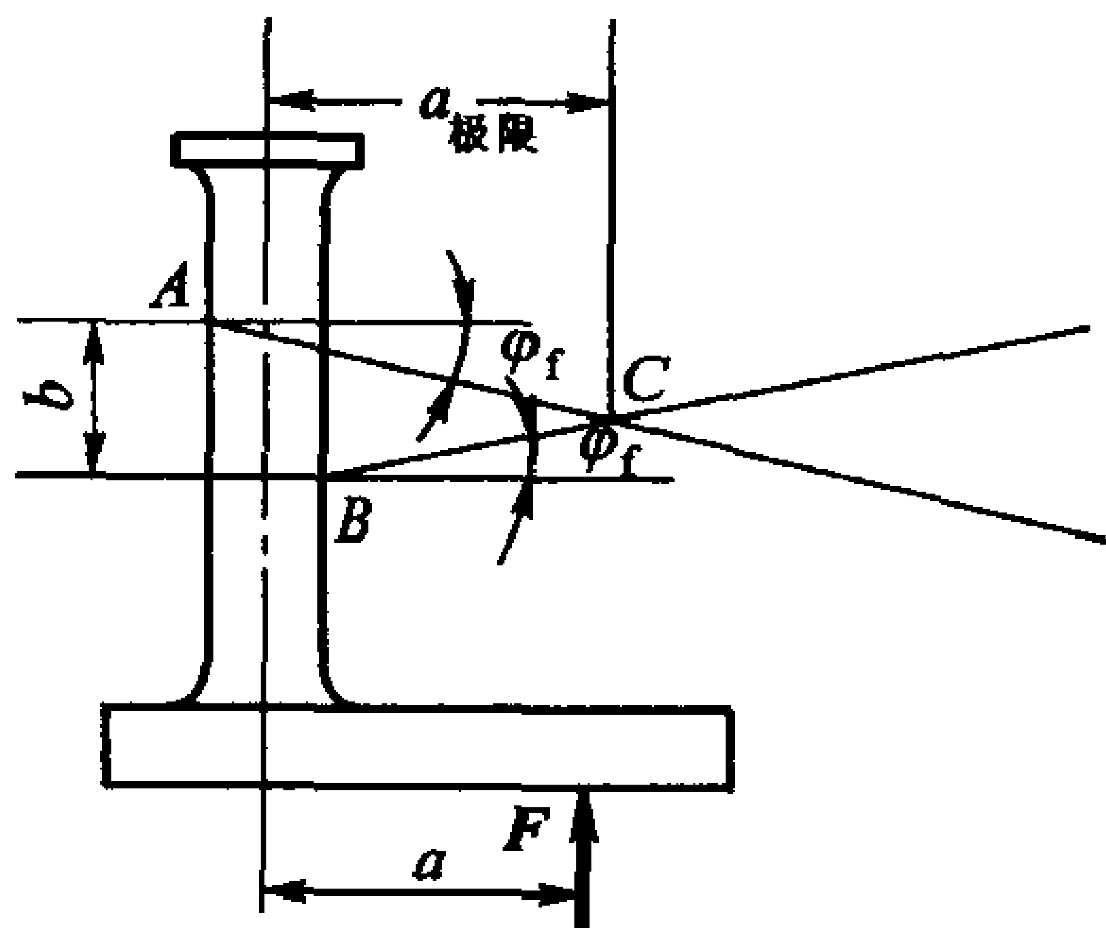


图5-9

例5-3 制动器的构造和主要尺寸如图5-10a所示。制动块与鼓轮表面间的摩擦因数为 f_s，试求制止鼓轮转动所必需的力 F。

解： 先取鼓轮为研究对象，受力图如图5-10b所示。鼓轮在绳拉力 $\boldsymbol{F}_T(F_T=P)$作用下，有逆时针转动的趋势；因此，闸块除给鼓轮正压力 $\boldsymbol{F}_N$ 外，还有一个向左的摩擦力 $\boldsymbol{F}_s$。列方程

$$\sum M_{O1}(\boldsymbol{F})=0,\quad F_T r-F_s R=0 \tag{a}$$

解得

$$F_s=\frac{r}{R}F=\frac{r}{R}P \tag{b}$$

再取杠杆 OAB 为研究对象，其受力图如图5-10c所示。列力矩方程

$$\sum M_O(\boldsymbol{F})=0,\quad Fa+F'_s c-F'_N b=0 \tag{c}$$

补充方程

$$F'_s\leqslant f_s F'_N \tag{d}$$

由式(c)，(d)得

$$F'_s\leqslant\frac{f_s aF}{b-f_s c} \tag{e}$$

由 $F_s=F'_s$，解得

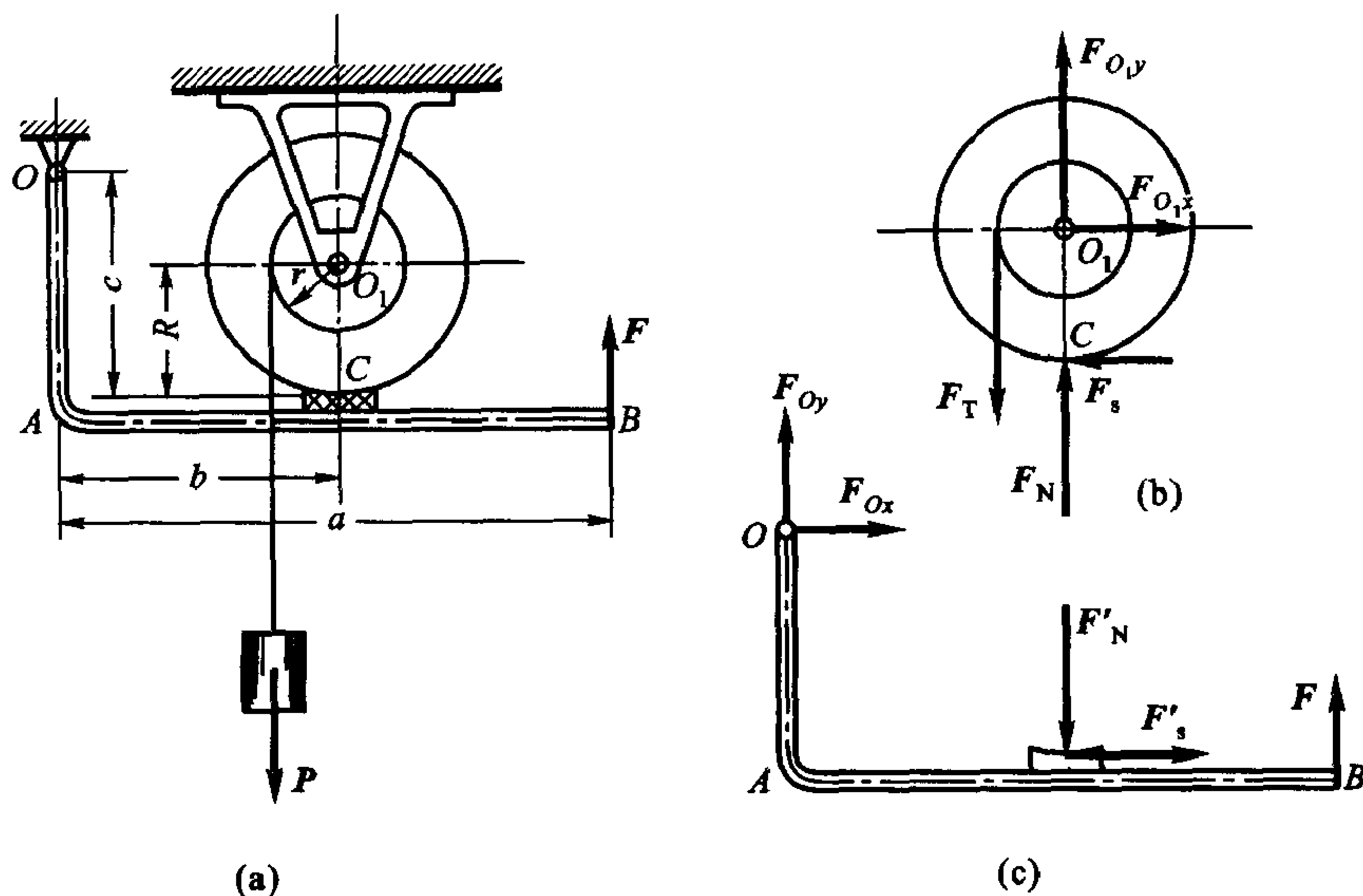


图 5-10

$$F \geqslant \frac{rP(b - f_s c)}{f_s Ra}$$

例 5-4　图 5-11 所示的均质木箱重 $P=5$ kN，它与地面间的静摩擦因数 $f_s=0.4$。图中 $h=2a=2$ m，$\theta=30°$。求：(1) 当 D 处的拉力 $F=1$ kN 时，木箱是否平衡？(2) 能保持木箱平衡的最大拉力。

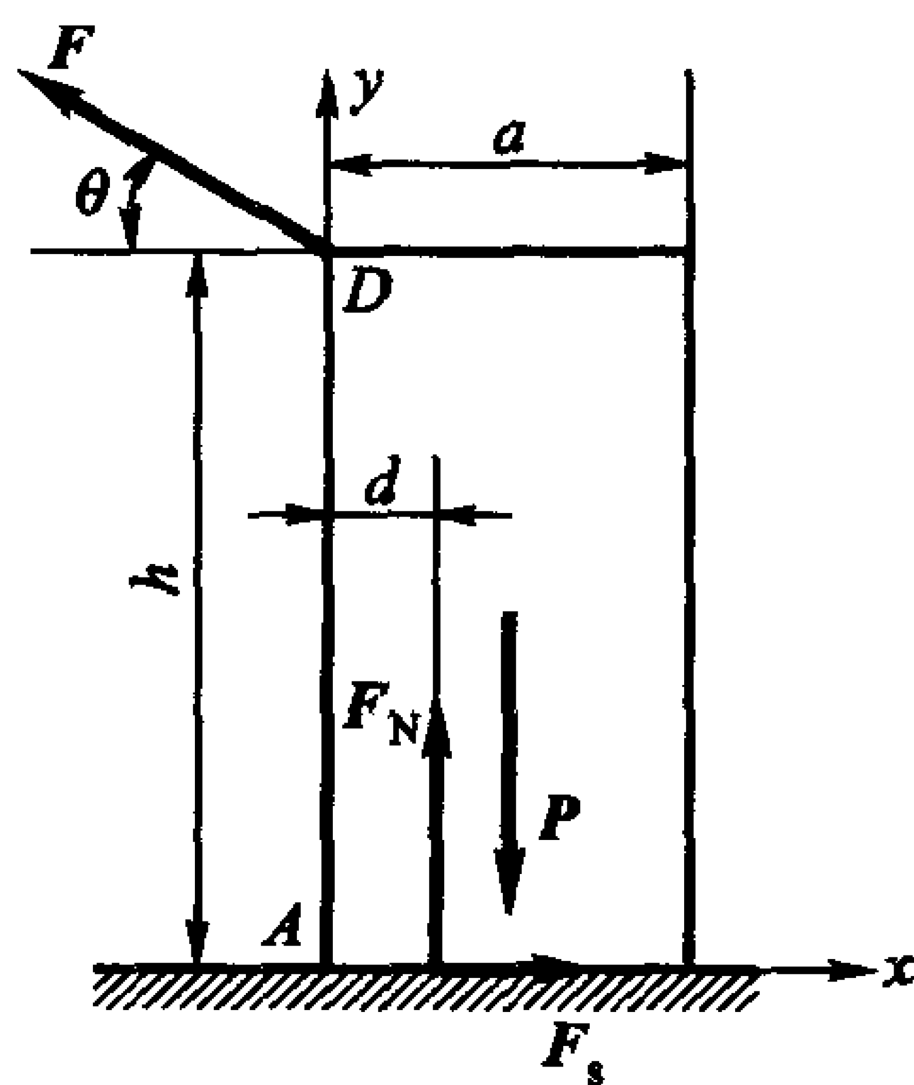


图 5-11

解：　欲保持木箱平衡，必须满足两个条件：一是不发生滑动，即要求静摩擦力 $F_s \leqslant F_{max} = f_s F_N$；二是不绕 A 点翻倒，这时法向约束力 F_N 的作用线应在木箱内，即 $d>0$。

(1) 取木箱为研究对象，受力如图 5-11 所示，列平衡方程

$$\Sigma F_x=0, F_s-F\cos\theta=0 \tag{a}$$

$$\Sigma F_y=0, F_N-P+F\sin\theta=0 \tag{b}$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F})=0 \quad hF\cos\theta-P\frac{a}{2}+F_N d=0 \tag{c}$$

求解以上各方程，得

$$F_s=0.866\ \text{kN}, F_N=4.5\ \text{kN}, d=0.171\ \text{m}$$

此时木箱与地面间最大摩擦力

$$F_{max}=f_s F_N=1.8\ \text{kN}$$

可见，$F_s<F_{max}$，木箱不滑动；又 $d>0$，木箱不会翻倒。因此，木箱保持平衡。

(2) 为求保持平衡的最大拉力 F，可分别求出木箱将滑动时的临界拉力 $F_{滑}$ 和木箱将绕 A 点翻倒的临界拉力 $F_{翻}$。二者中取其较小者，即为所求。

木箱将滑动的条件为

$$F_s=F_{max}=f_s F_N \tag{d}$$

由式(a)，(b)，(d)联立解得

$$F_{滑}=\frac{f_s P}{\cos\theta+f_s\sin\theta}=1.876\ \text{kN}$$

木箱将绕 A 点翻倒的条件为 $d=0$，代入式(c)，得

$$F_{翻}=\frac{Pa}{2h\cos\theta}=1.443\ \text{kN}$$

由于 $F_{翻}<F_{滑}$，所以保持木箱平衡的最大拉力为

$$F=F_{翻}=1.443\ \text{kN}$$

这说明，当拉力 F 逐渐增大时，木箱将先翻倒而失去平衡。

§5－4　滚动摩阻的概念

由实践可知，使滚子滚动比使它滑动省力。所以在工程中，为了提高效率，减轻劳动强度，常利用物体的滚动代替物体的滑动。设在水平面上有一滚子，重量为 P，半径为 r，在其中心 O 上作用一水平力 $\boldsymbol{F}$，当力 $\boldsymbol{F}$ 不大时，滚子仍保持静止。若滚子的受力情况如图 5－12 所示，则滚子不可能保持平衡。因为静滑动摩擦力 $\boldsymbol{F}_s$ 与力 $\boldsymbol{F}$ 组成一力偶，将使滚子发生滚动。但是，实际上当力 $\boldsymbol{F}$ 不大时，滚子是可以平衡的。这是因为滚子和平面实际上并不是刚体，它们在力的作用下都会发生变形，有一个接触面，如图 5－13a 所示。在接触面上，物体受分布力的作用，这些力向点 A 简化，得到一个力 $\boldsymbol{F}_R$ 和一个力偶，力偶的矩为 M_f，如图 5－13b 所示。这个力 $\boldsymbol{F}_R$ 可分解为摩擦力 $\boldsymbol{F}_s$ 和法向约束力 $\boldsymbol{F}_N$，这个矩为 M_f 的力偶称为**滚动摩阻力偶**(简称滚阻力偶)，它与力偶($\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}_s$)平衡，它的转向与滚动的趋向相反，如图 5－13c 所示。

与静滑动摩擦力相似，**滚动摩阻力偶矩** M_f 随着主动力的增加而增大，当力

$\boldsymbol{F}$ 增加到某个值时，滚子处于将滚未滚的临界平衡状态；这时，滚动摩阻力偶矩达到最大值，称为最大滚动摩阻力偶矩，用 M_{max} 表示。若力 $\boldsymbol{F}$ 再增大一点，轮子就会滚动。在滚动过程中，滚动摩阻力偶矩近似等于 M_{max}。

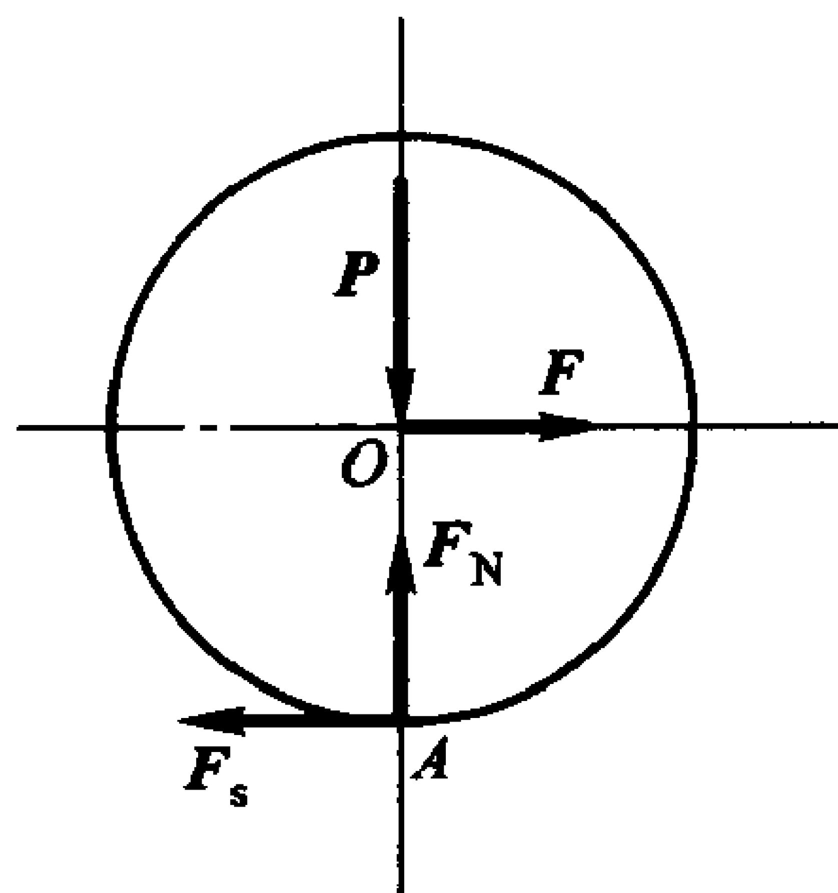


图 5-12

由此可知，滚动摩阻力偶矩 M_f 的大小介于零与最大值之间，即

$$0 \leqslant M_f \leqslant M_{max} \qquad (5-6)$$

由实验表明：最大滚动摩阻力偶矩 M_{max} 与滚子半径无关，而与支承面的正压力（法向约束力）$\boldsymbol{F}_N$ 的大小成正比，即

$$M_{max} = \delta F_N \qquad (5-7)$$

这就是滚动摩阻定律，其中 δ 是比例常数，称为**滚动摩阻系数**，简称滚阻系数。由上式知，滚动摩阻系数具有长度的量纲，单位一般用 mm。

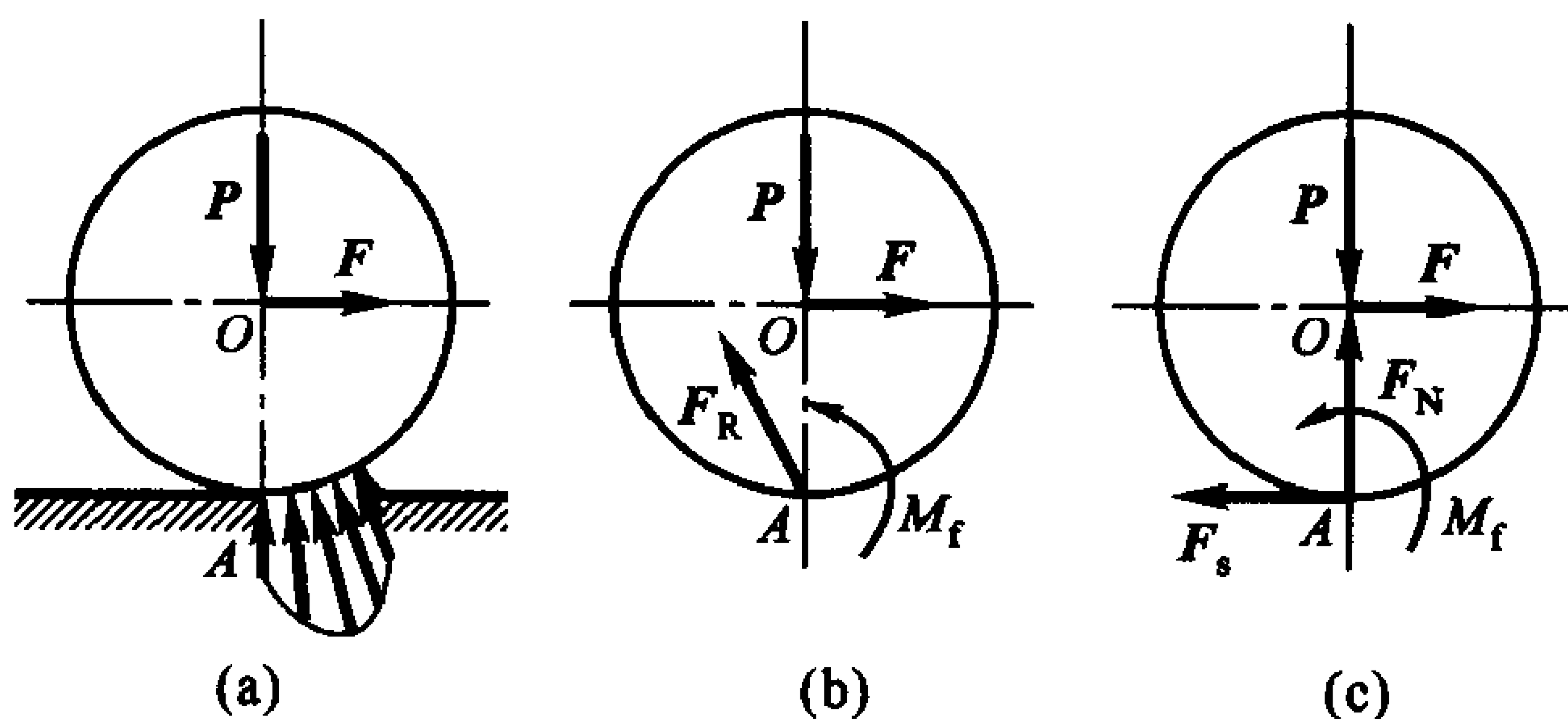


图 5-13

滚动摩阻系数由实验测定，它与滚子和支承面的材料的硬度和湿度等有关，与滚子的半径无关。表 5-2 是几种材料的滚动摩阻系数的值。

表 5-2 滚动摩阻系数 δ

材料名称	δ/mm	材料名称	δ/mm
铸铁与铸铁	0.5	软钢与钢	0.5
钢质车轮与钢轨	0.05	有滚珠轴承的料车与钢轨	0.09
木与钢	0.3~0.4	无滚珠轴承的料车与钢轨	0.21
木与木	0.5~0.8	钢质车轮与木面	1.5~2.5
软木与软木	1.5	轮胎与路面	2~10
淬火钢珠与钢	0.01		

滚阻系数的物理意义如下。滚子在即将滚动的临界平衡状态时，其受力图如图 5-14a 所示。根据力的平移定理，可将其中的法向约束力 $\boldsymbol{F}_N$ 与最大滚动

摩阻力偶 M_{max} 合成为一个力 $\boldsymbol{F}'_N$，且 $F'_N=F_N$。力 $\boldsymbol{F}'_N$ 的作用线距中心线的距离为 d，如图 5-14b 所示。即

$$d=\frac{M_{max}}{F'_N}$$

与式(5-7)比较，得

$$\delta=d$$

因而滚动摩阻系数 δ 可看成在即将滚动时，法向约束力 $\boldsymbol{F}'_N$ 离中心线的最远距离，也就是最大滚阻力偶($\boldsymbol{F}'_N,\boldsymbol{P}$)的臂。故它具有长度的量纲。

由于滚动摩阻系数较小，因此，在大多数情况下滚动摩阻是可以忽略不计的。

由图 5-14a，可以分别计算出使滚子滚动或滑动所需要的水平拉力 $\boldsymbol{F}$。

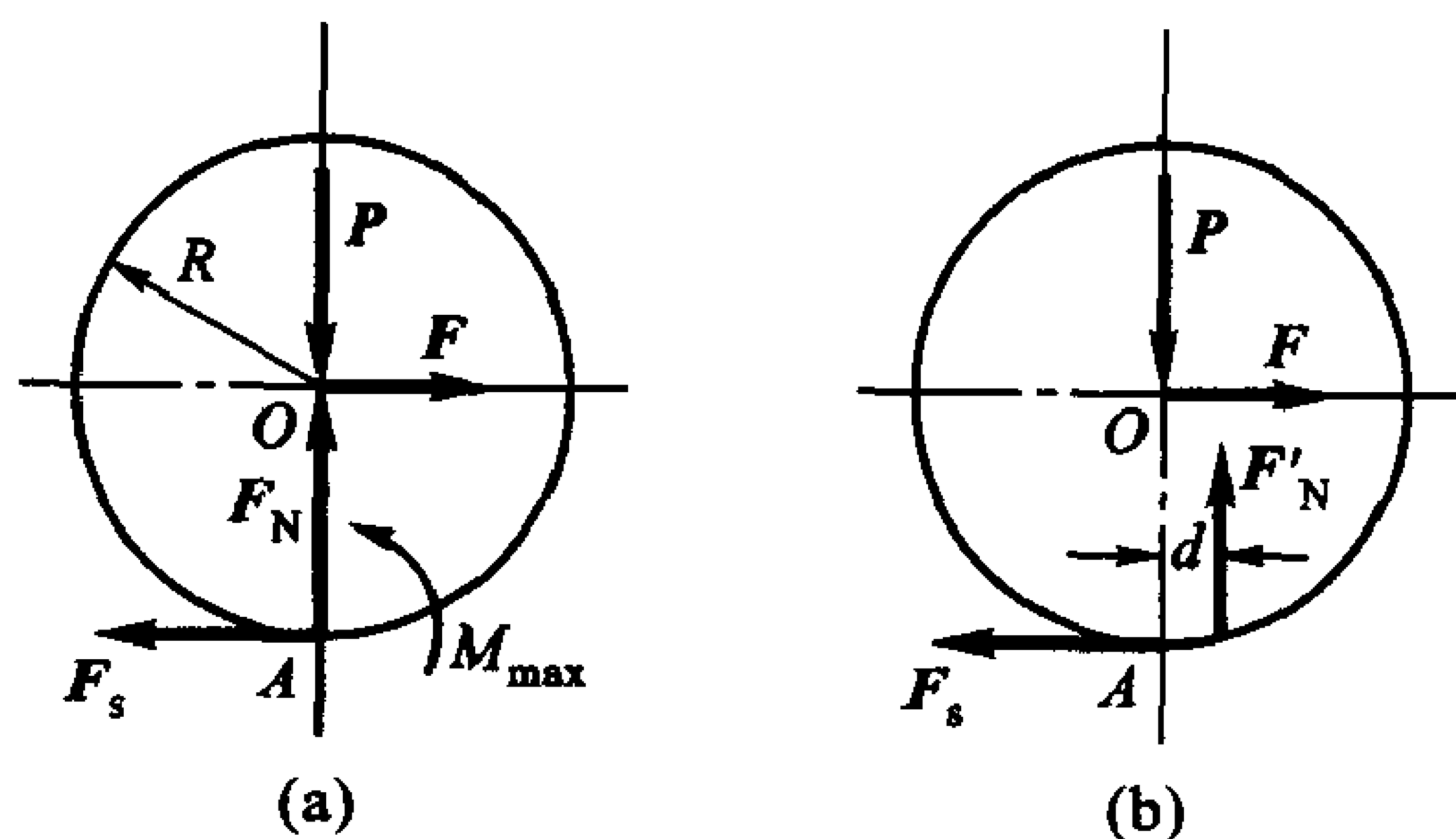


图 5-14

由平衡方程 $\sum M_A(\boldsymbol{F})=0$，可以求得

$$F_{滚}=\frac{M_{max}}{R}=\frac{\delta F_N}{R}=\frac{\delta}{R}P$$

由平衡方程 $\Sigma F_x=0$，可以求得

$$F_{滑}=F_{max}=f_sF_N=f_sP$$

一般情况下，有

$$\frac{\delta}{R}\ll f_s$$

因而使滚子滚动比滑动省力得多。

例 5-5　半径为 R 的滑轮 B 上作用有力偶，轮上绕有细绳拉住半径为 R、重量为 $\boldsymbol{P}$ 的圆柱，如图 5-15a 所示。斜面倾角为 θ，圆柱与斜面间的滚动摩阻系数为 δ。求保持圆柱平衡时，力偶矩 M_B 的最大与最小值。

解：　取圆柱为研究对象，先求绳子拉力。圆柱在即将滚动的临界状态下，滚阻力偶达最大值，即 $M_{max}=\delta F_N$，转向与滚动趋势相反。当绳拉力为最小值时，圆柱有向下滚动的趋势；当绳拉力为最大值时，圆柱有向上滚动的趋势。

(1) 先求最小拉力 $\boldsymbol{F}_{T1}$，受力如图 5-15b 所示，列平衡方程

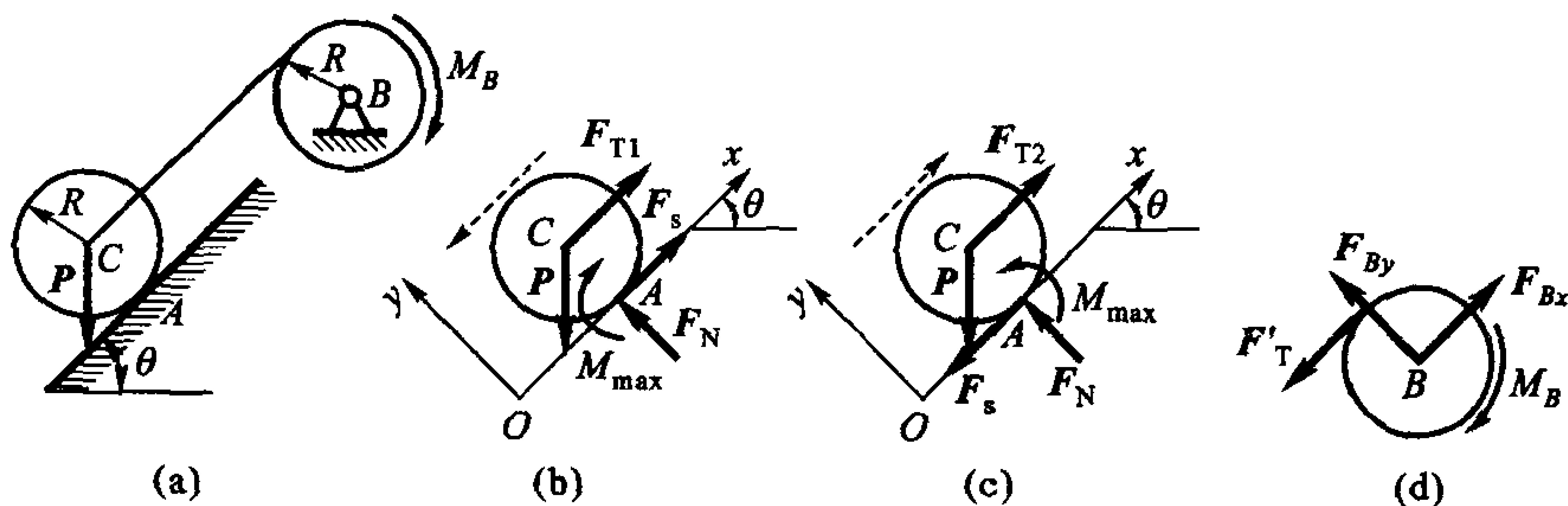


图 5-15

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad P\sin\theta\cdot R-F_{T1}R-M_{max}=0 \tag{a}$$

$$\Sigma F_y=0,\quad F_N-P\cos\theta=0 \tag{b}$$

临界状态的补充方程

$$M_{max}=\delta F_N \tag{c}$$

联立求得最小拉力值

$$F_{T1}=P\left(\sin\theta-\frac{\delta}{R}\cos\theta\right)$$

(2) 再求最大拉力 F_{T2},受力如图 5-15c 所示,列平衡方程

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad P\sin\theta\cdot R-F_{T2}R+M_{max}=0 \tag{d}$$

$$\Sigma F_y=0,\quad F_N-P\cos\theta=0 \tag{e}$$

列补充方程

$$M_{max}=\delta F_N \tag{f}$$

联立解得最大拉力值 $F_{T2}=P\left(\sin\theta+\dfrac{\delta}{R}\cos\theta\right)$

(3) 以滑轮 B 为研究对象,受力如图 5-15d 所示,列平衡方程

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad F'_TR-M_B=0$$

当绳拉力分别为 $\boldsymbol{F}_{T2}$ 或 $\boldsymbol{F}_{T1}$ 时,得力偶矩 M_B 的最大与最小值为

$$M_{Bmax}=F_{T2}R=P(R\sin\theta+\delta\cos\theta)$$

$$M_{Bmin}=F_{T1}R=P(R\sin\theta-\delta\cos\theta)$$

即 M_B 的平衡范围为

$$P(R\sin\theta-\delta\cos\theta)\leqslant M_B\leqslant P(R\sin\theta+\delta\cos\theta)$$

小 结

1. 摩擦现象分为滑动摩擦和滚动摩阻两类。

2. 滑动摩擦力是在两个物体相互接触的表面之间有相对滑动趋势或有相对滑动时出现的切向约束力。前者称为静滑动摩擦力,后者称为动滑动摩擦力。

(1) 静摩擦力 $\boldsymbol{F}_s$ 的方向与接触面间相对滑动趋势的方向相反,其值满足

$$0\leqslant F_s\leqslant F_{max}$$

静摩擦定律为 $F_{max}=f_s F_N$

其中 f_s 为静摩擦因数，F_N 为法向约束力。

(2) 动摩擦力的方向与接触面间相对滑动的速度方向相反，其大小为

$$F=fF_N$$

其中 f 为动摩擦因数，一般情况下略小于静摩擦因数 f_s。

3. 摩擦角 φ_f 为全约束力与法线间夹角的最大值，且有

$$\tan\varphi_f=f_s$$

全约束力与法线间夹角 φ 的变化范围为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_f$$

当主动力的合力作用线在摩擦角之内时发生自锁现象。

4. 物体滚动时会受到阻碍滚动的滚动摩阻力偶作用。

物体平衡时，滚动摩阻力偶矩 M_f 随主动力的大小变化，范围为

$$0\leqslant M_f\leqslant M_{max}$$

又

$$M_{max}=\delta F_N$$

其中 δ 为滚动摩阻系数，单位为 mm。

物体滚动时，滚动摩阻力偶矩近似等于 M_{max}。

思　考　题

5-1　已知一物块重 $P=100$ N，用水平力 $F=500$ N 的力压在一铅直表面上，如图 5-16 所示，其摩擦因数 $f_s=0.3$，问此时物块所受的摩擦力等于多少？

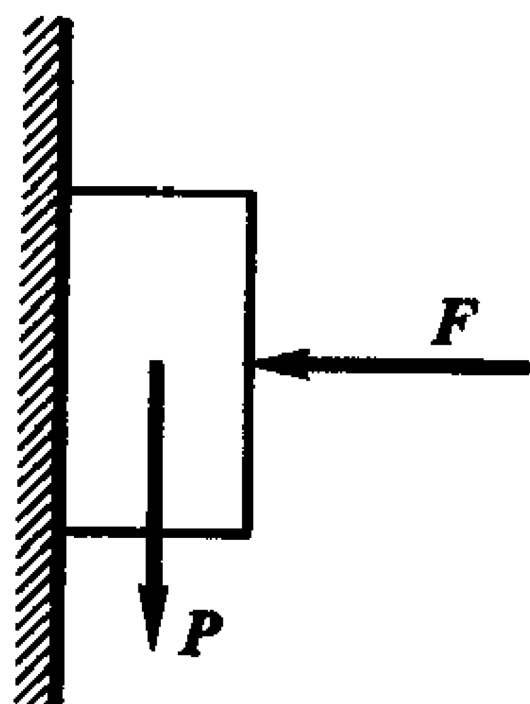


图 5-16

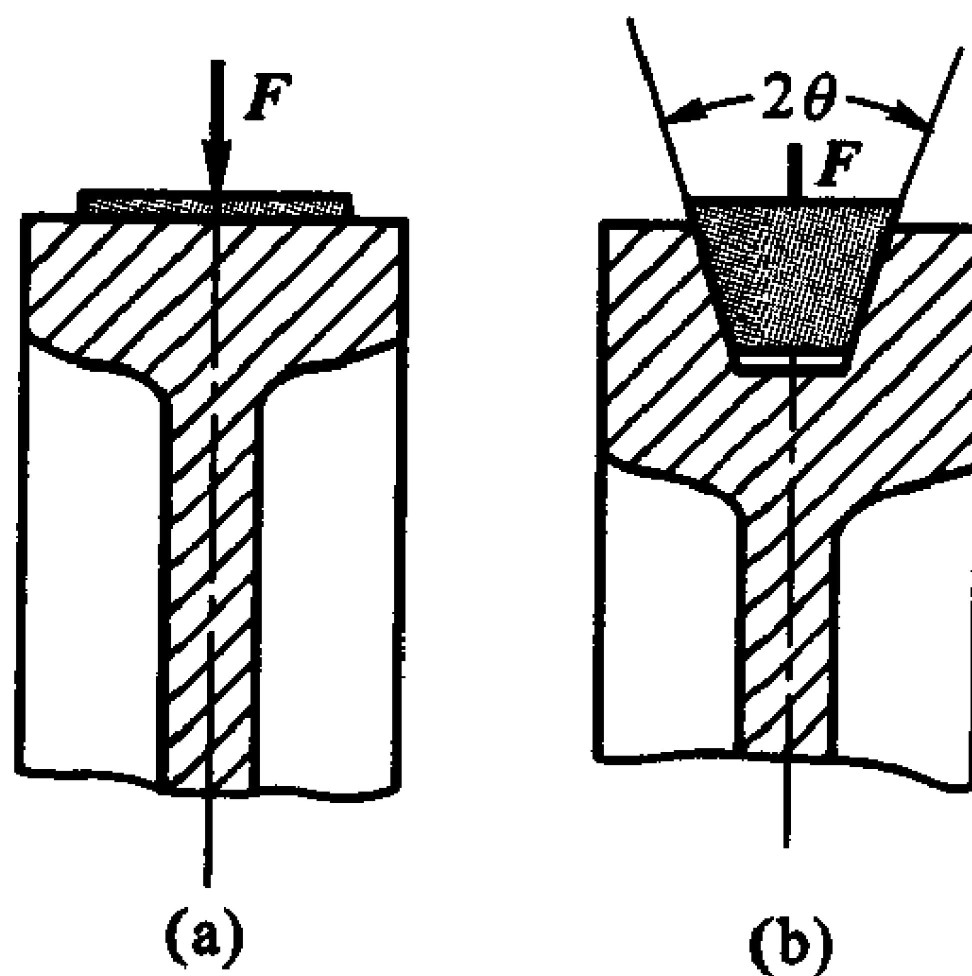


图 5-17

5-2　如图 5-17 所示，试比较用同样材料、在相同的光洁度和相同的胶带压力 F 作用

下，平胶带与三角胶带所能传递的最大拉力。

5-3 为什么传动螺纹多用方牙螺纹(如丝杠)？而锁紧螺纹多用三角螺纹(如螺钉)？

5-4 如图 5-18 所示，砂石与胶带间的静摩擦因数 $f_s=0.5$，试问输送带的最大倾角 θ 为多大？

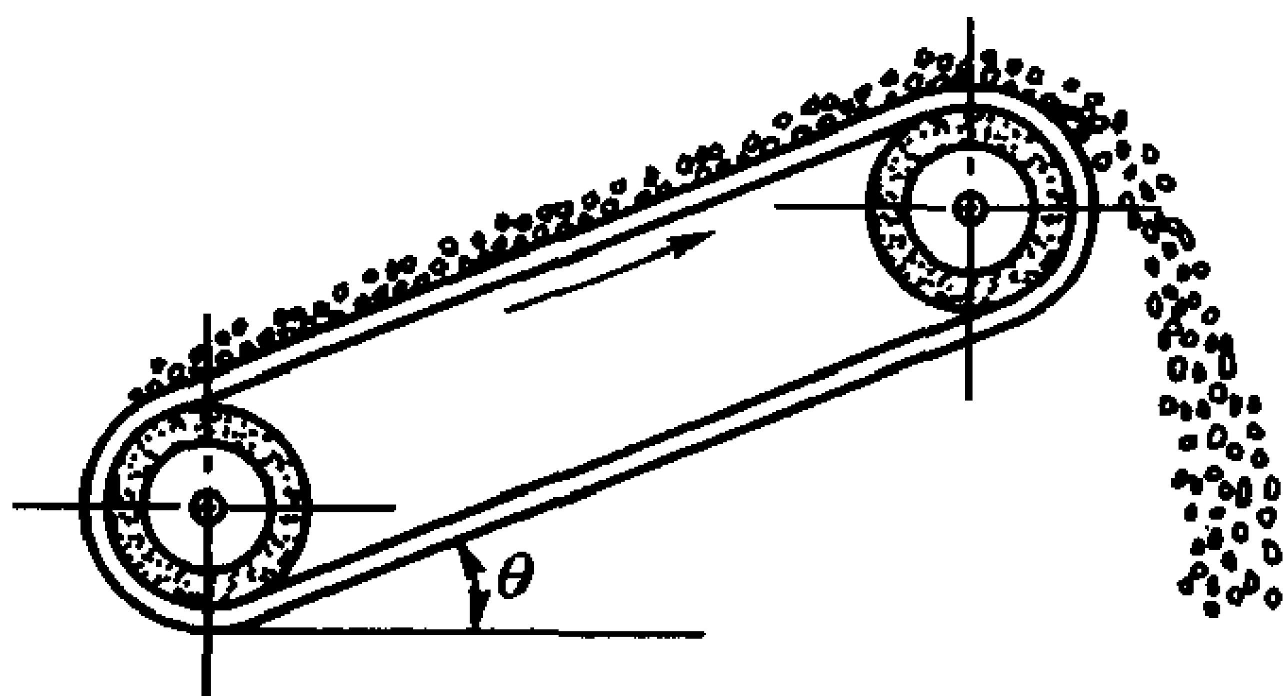


图 5-18

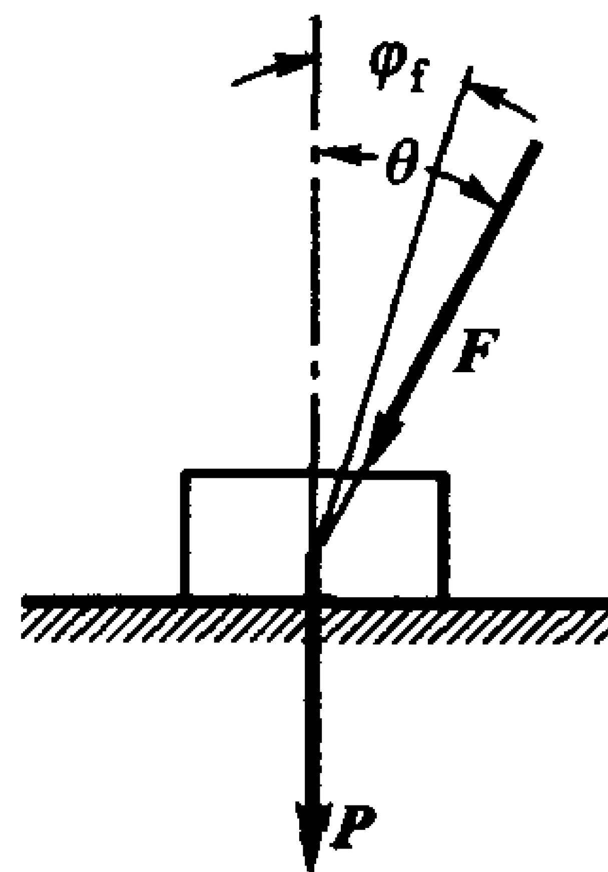


图 5-19

5-5 物块重 P，一力 F 作用在摩擦角之外，如图 5-19 所示。已知 $\theta=25^\circ$，摩擦角 $\varphi_f=20^\circ$，$F=P$。问物块动不动？为什么？

5-6 如图 5-20 所示，用钢楔劈物，接触面间的摩擦角为 φ_f。劈入后欲使楔不滑出，问钢楔两个平面间的夹角 θ 应该多大？楔重不计。

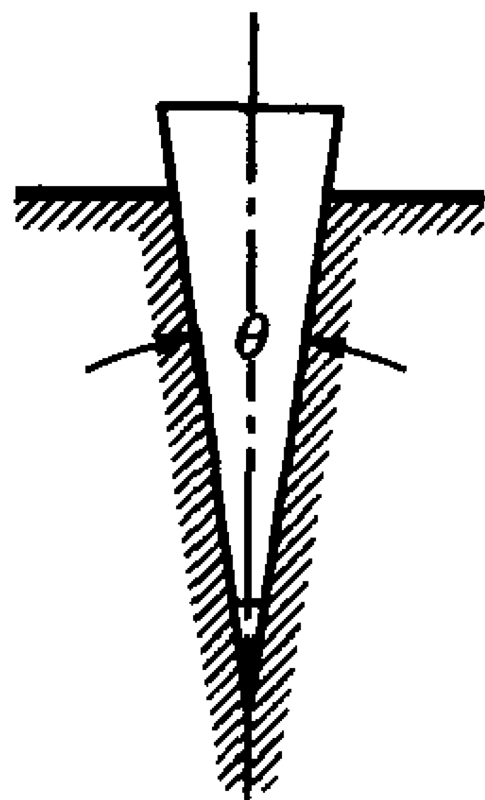


图 5-20

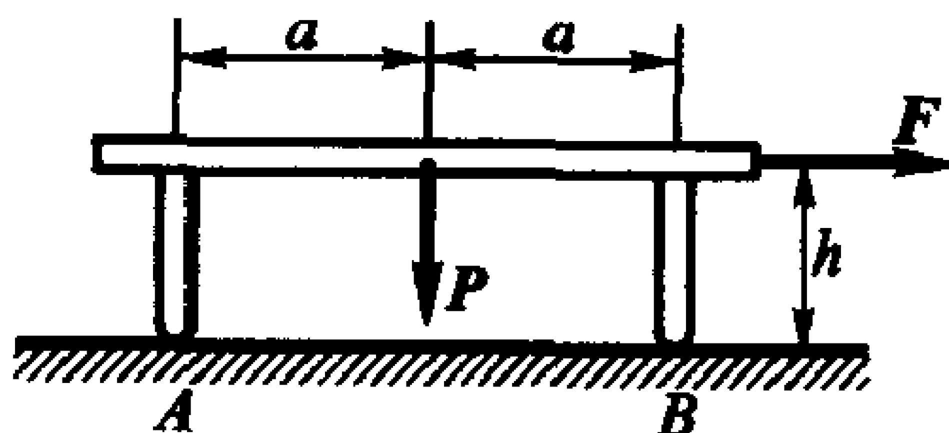


图 5-21

5-7 已知 π 形物体重为 P，尺寸如图 5-21 所示。现以水平力 F 拉此物体，当刚开始拉动时，A，B 两处的摩擦力是否都达到最大值？如 A，B 两处的静摩擦因数均为 f_s，此二处最大静摩擦力是否相等？又，如力 F 较小而未能拉动物体时，能否分别求出 A，B 两处的静摩擦力？

5-8 汽车匀速水平行驶时，地面对车轮有滑动摩擦也有滚动摩阻，而车轮只滚不滑。汽车前轮受车身施加的一个向前推力 F(图 5-22a)，而后轮受一驱动力偶 M，并受车身向后的反力 F'(图 5-22b)。试画全前、后轮的受力图。在同样摩擦情况下，试画出自行车前、后

轮的受力图。又如何求其滑动摩擦力？是否等于其动滑动摩擦力 fF_N？是否等于其最大静摩擦力？

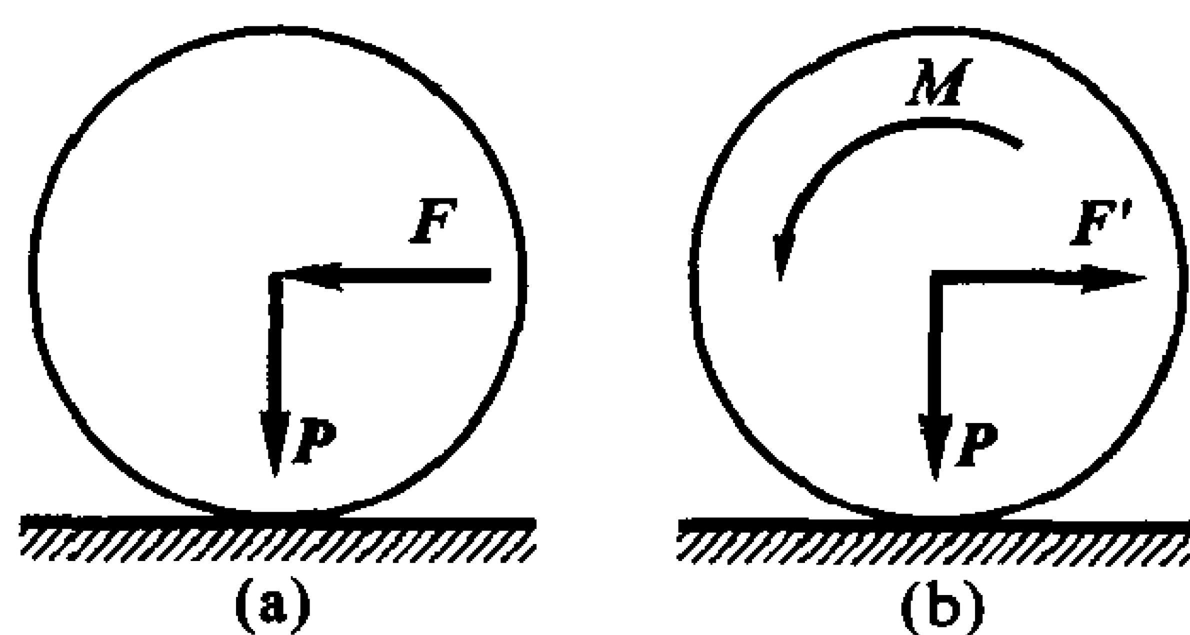
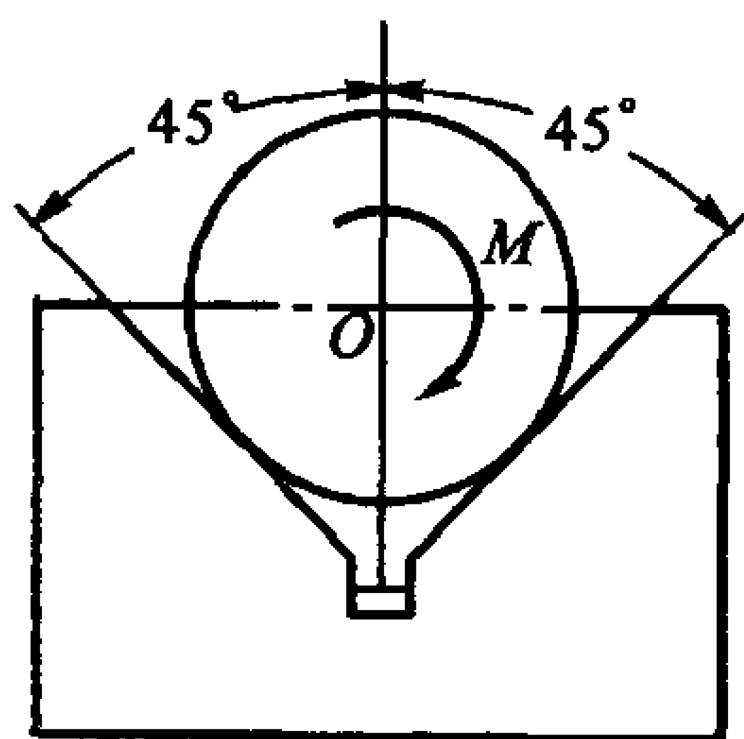


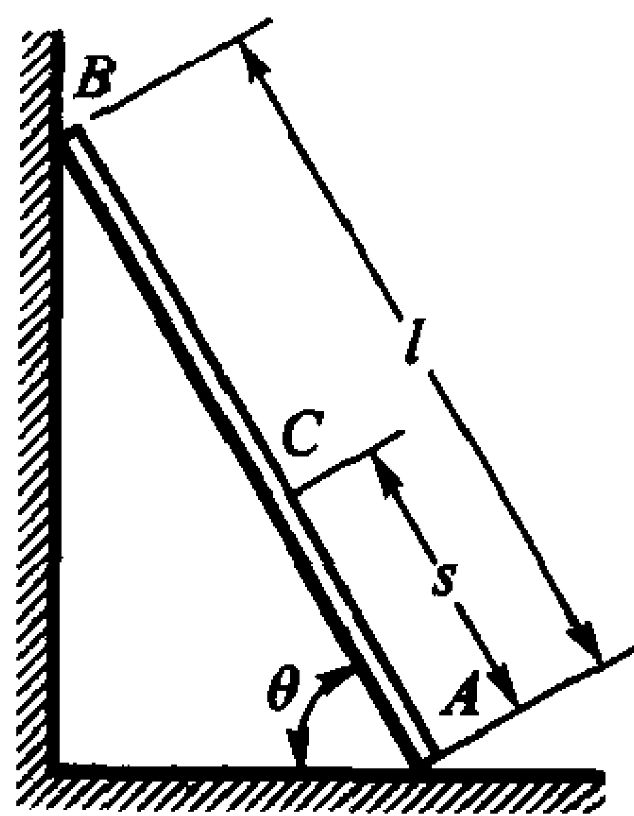
图 5-22

习　　题

5-1　如图所示，置于 V 型槽中的棒料上作用一力偶，力偶的矩 $M=15\ \text{N·m}$ 时，刚好能转动此棒料。已知棒料重 $P=400\ \text{N}$，直径 $D=0.25\ \text{m}$，不计滚动摩阻。求棒料与 V 形槽间的静摩擦因数 f_s。



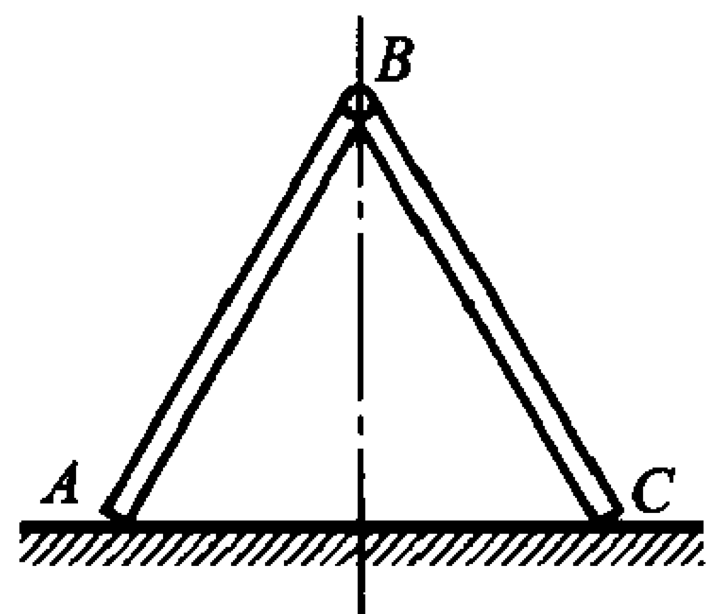
题 5-1 图



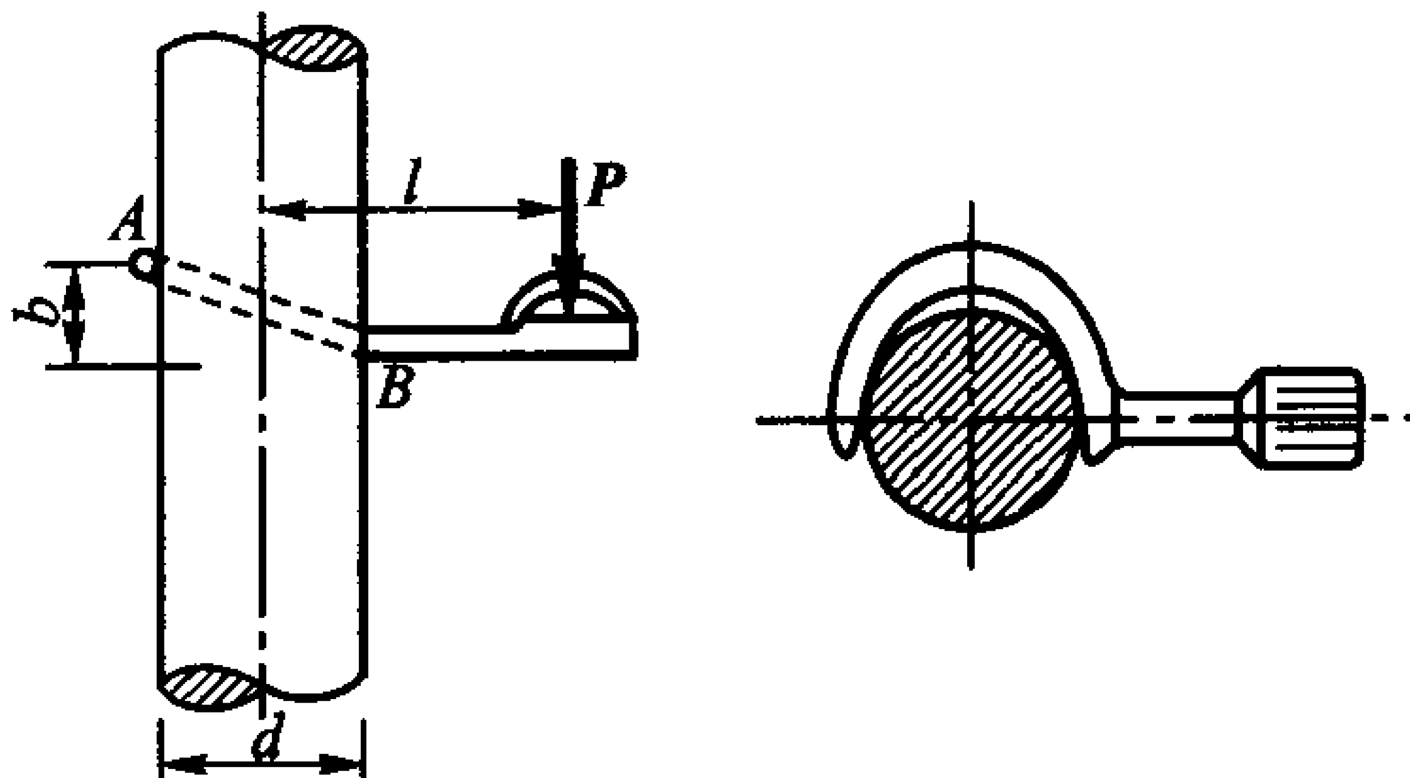
题 5-2 图

5-2　梯子 AB 靠在墙上，其重为 $P=200\ \text{N}$，如图所示。梯长为 l，并与水平面交角 $\theta=60°$。已知接触面间的摩擦因数均为 0.25。今有一重 650 N 的人沿梯上爬，问人所能达到的最高点 C 到 A 点的距离 s 应为多少？

5-3　两根相同的匀质杆 AB 和 BC，在端点 B 用光滑铰链连接，A，C 端放在不光滑的水平面上，如图所示。当 ABC 成等边三角形时，系统在铅直面内处于临界平衡状态。求杆端与水平面间的摩擦因数。



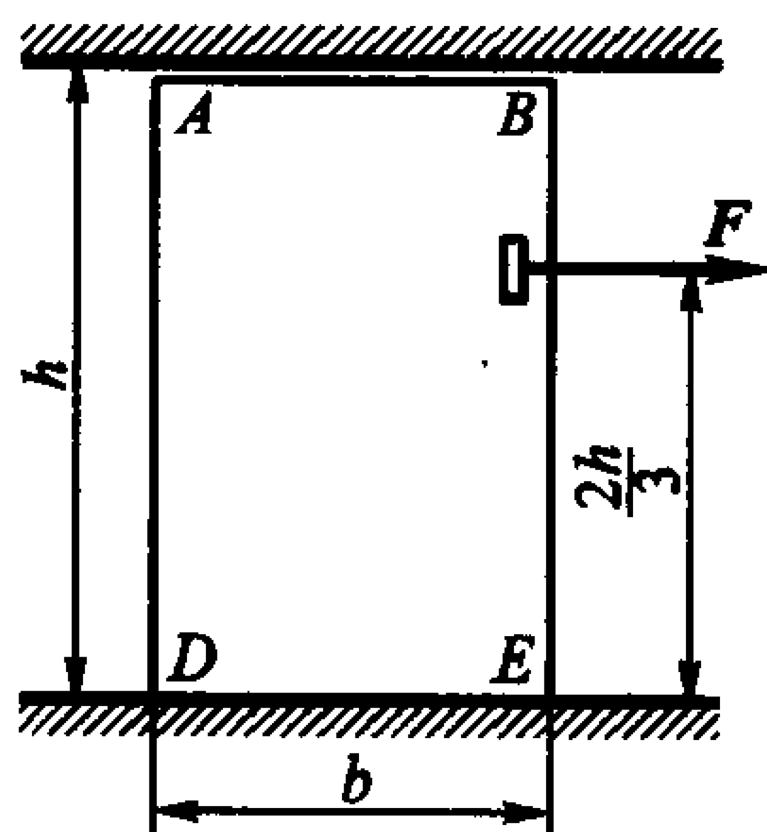
题 5-3 图



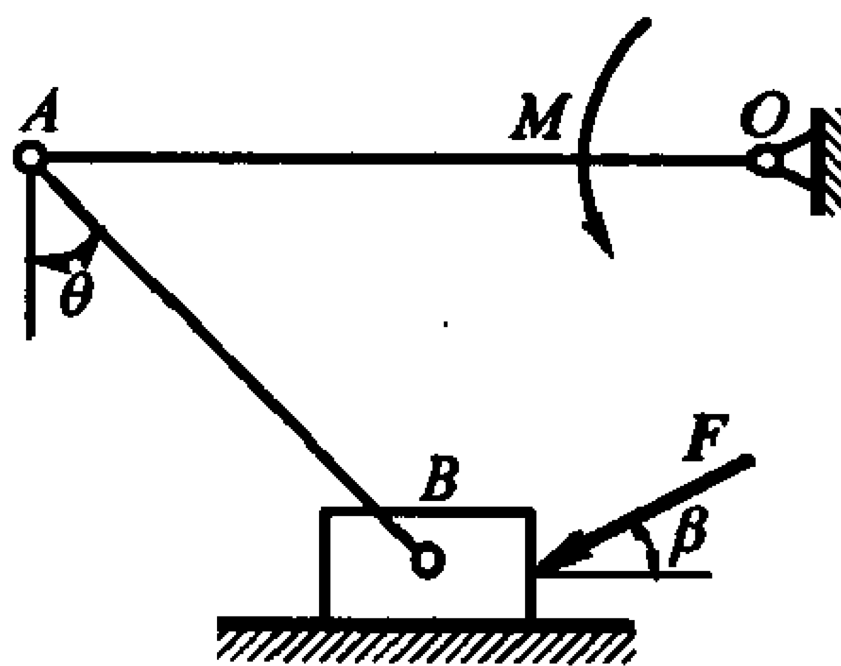
题 5-4 图

5-4 攀登电线杆的脚套钩如图。设电线杆直径 $d=300$ mm，A、B 间的铅直距离 $b=100$ mm。若套钩与电线杆之间摩擦因数 $f_s=0.5$。求工人操作时，为了安全，站在套钩上的最小距离 l 应为多大。

5-5 不计自重的拉门与上下滑道之间的静摩擦因数均为 f_s，门高为 h。若在门上 $\frac{2}{3}h$ 处用水平力 $\boldsymbol{F}$ 拉门而不会卡住，求门宽 b 的最小值。问门的自重对不被卡住的门宽最小值有否影响？



题 5-5 图

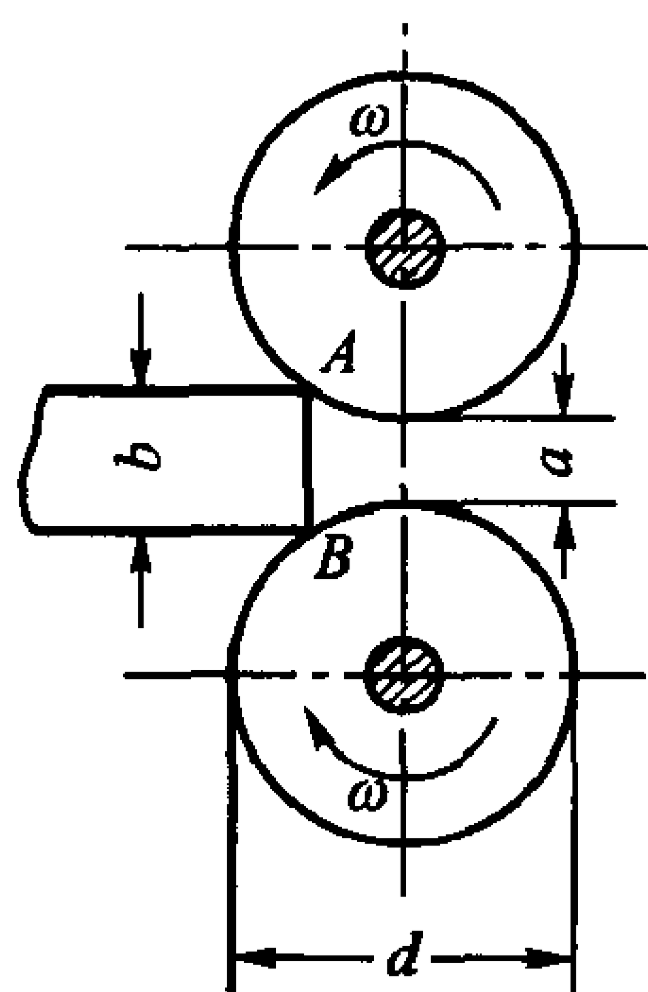


题 5-6 图

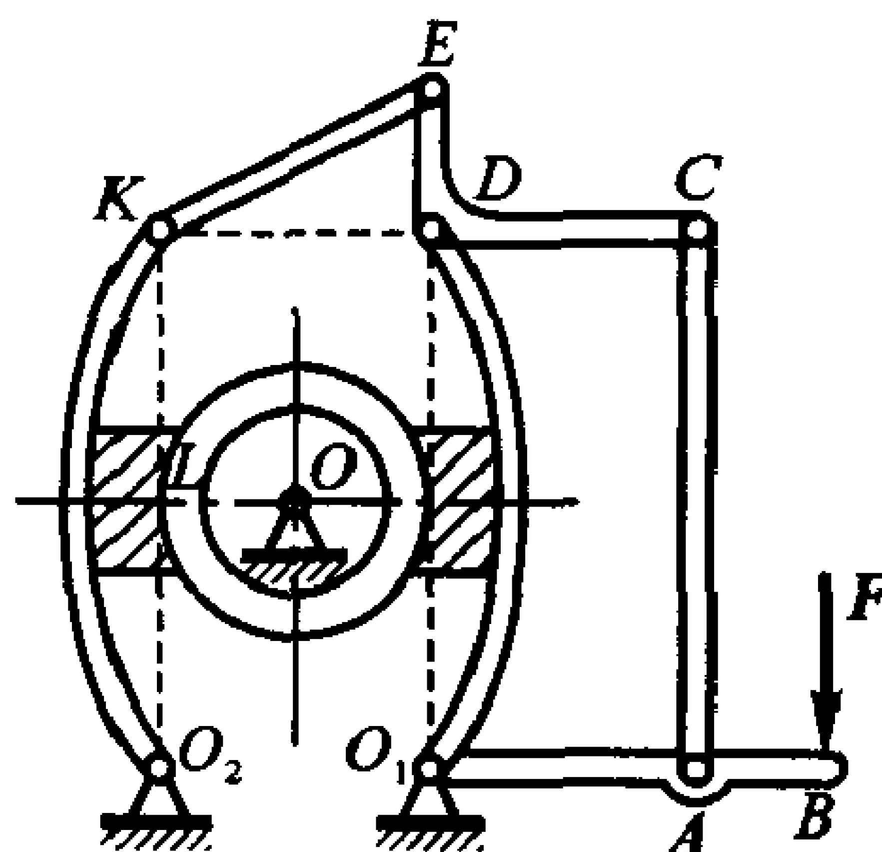
5-6 平面曲柄连杆滑块机构如图所示。$OA=l$，在曲柄 OA 上作用有一矩为 M 的力偶，OA 水平。连杆 AB 与铅垂线的夹角为 θ，滑块与水平面之间的摩擦因数为 f_s，不计重量，且 $\tan\theta>f_s$。求机构在图示位置保持平衡时 $\boldsymbol{F}$ 力的值。

5-7 轧压机由两轮构成，两轮的直径均为 $d=500$ mm，轮间的间隙为 $a=5$ mm，两轮反向转动，如图上箭头所示。已知烧红的铁板与铸铁轮间的摩擦因数为 $f_s=0.1$，问能轧压的铁板的厚度 b 是多少？

提示：欲使机器工作，则铁板必须被两转轮带动，亦即作用在铁板 A，B 处的法向反作用力和摩擦力的合力必须水平向右。



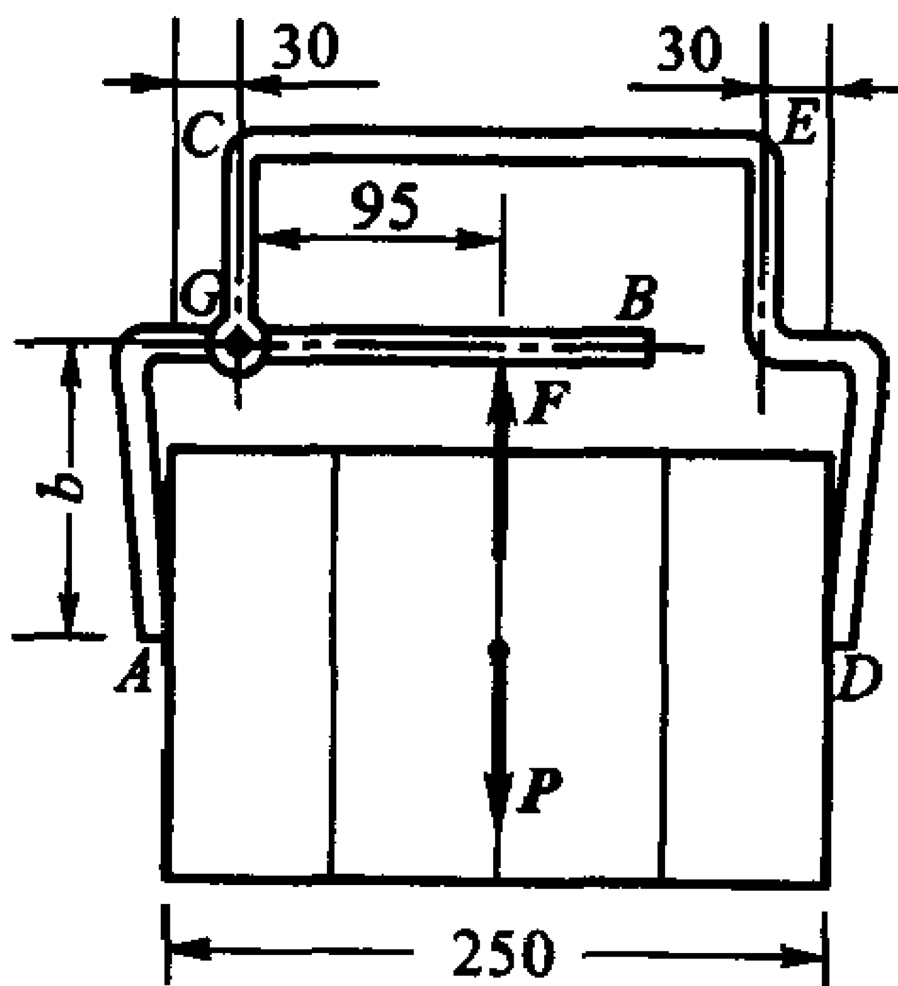
题 5-7 图



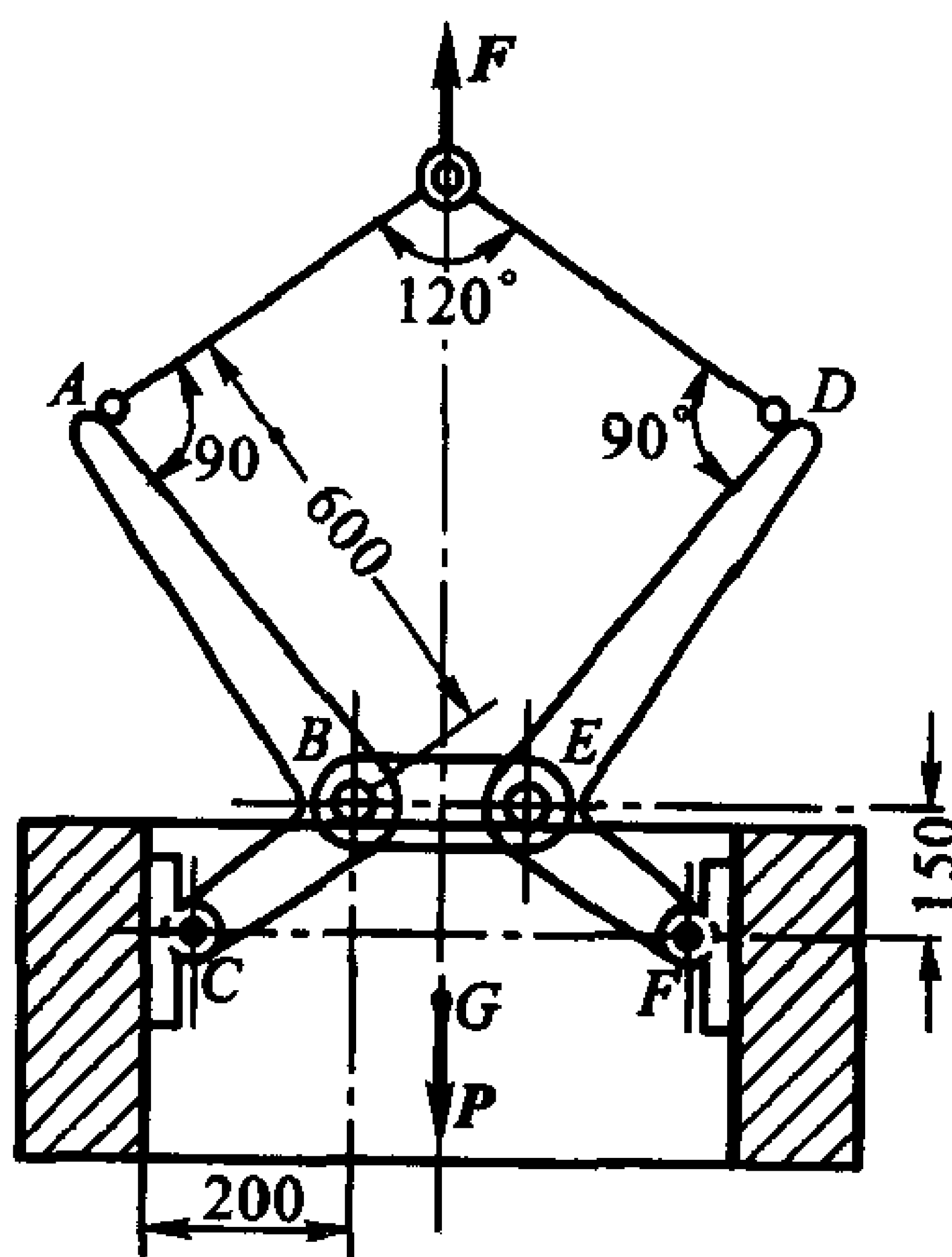
题 5-8 图

5-8　鼓轮利用双闸块制动器制动，设在杠杆的末端作用有大小为 200 N 的力 F，方向与杠杆相垂直，如图所示。已知闸块与鼓轮的摩擦因数 $f_s=0.5$，又 $2R=O_1O_2=KD=DC=O_1A=KL=O_2L=0.5\ \mathrm{m}$，$O_1B=0.75\ \mathrm{m}$，$AC=O_1D=1\ \mathrm{m}$，$ED=0.25\ \mathrm{m}$，自重不计。求作用于鼓轮上的制动力矩。

5-9　砖夹的宽度为 0.25 m，曲杆 AGB 与 $GCED$ 在 G 点铰接，尺寸如图所示。设砖重 $P=120\ \mathrm{N}$，提起砖的力 F 作用在砖夹的中心线上，砖夹与砖间的摩擦因数 $f_s=0.5$。求距离 b 为多大才能把砖夹起。



题 5-9 图

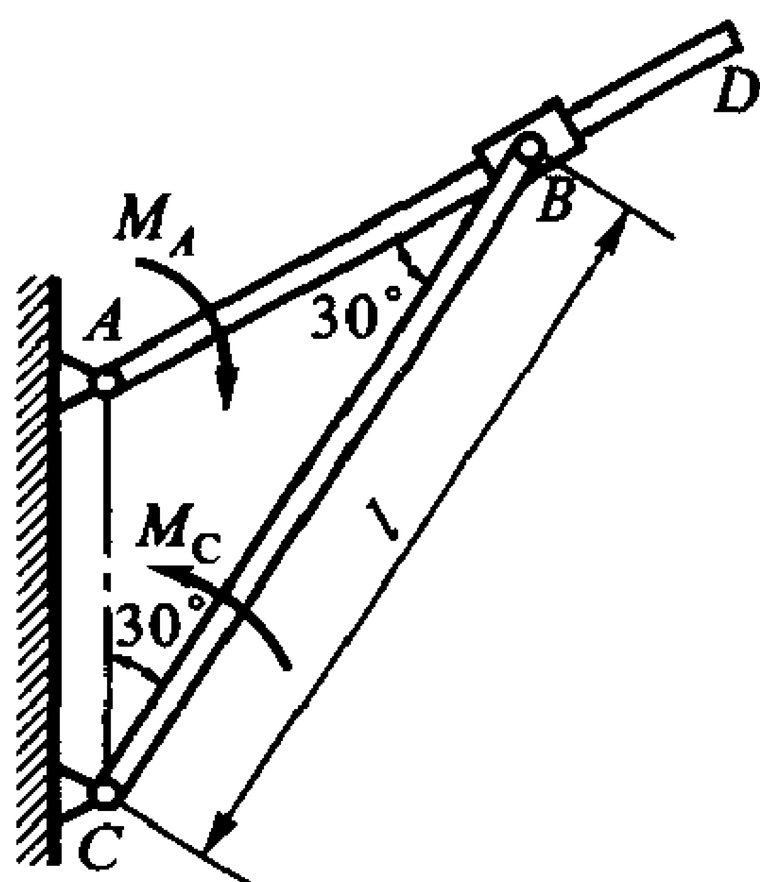


题 5-10 图

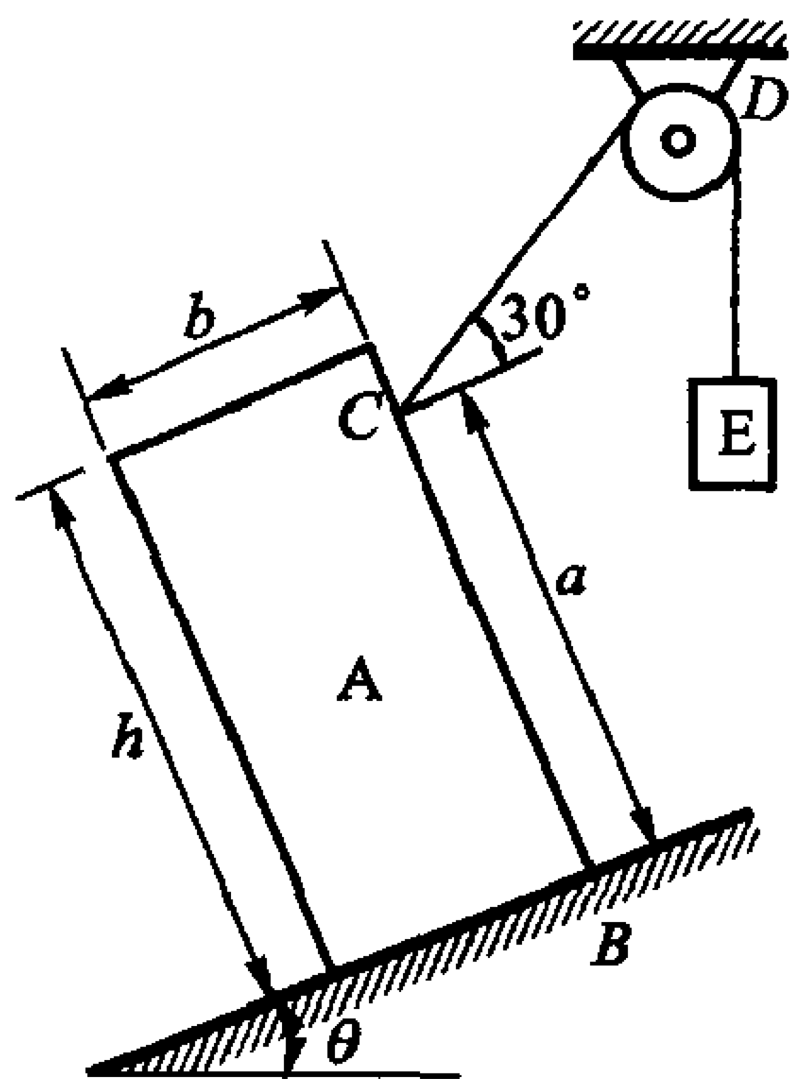
5-10　一起重用的夹具由 ABC 和 DEF 两个相同的弯杆组成，并由杆 BE 连接，B 和 E 都是铰链，尺寸如图所示。不计夹具自重，问要能提起重物 P，夹具与重物接触面处的摩擦因数 f_s 应为多大？

5-11　图示两无重杆在 B 处用套筒式无重滑块连接，在 AD 杆上作用一力偶，其力偶

矩 $M_A=40\ \text{N}\cdot\text{m}$,滑块和 AD 杆间的摩擦因数 $f_s=0.3$。求保持系统平衡时力偶矩 M_C 的范围。



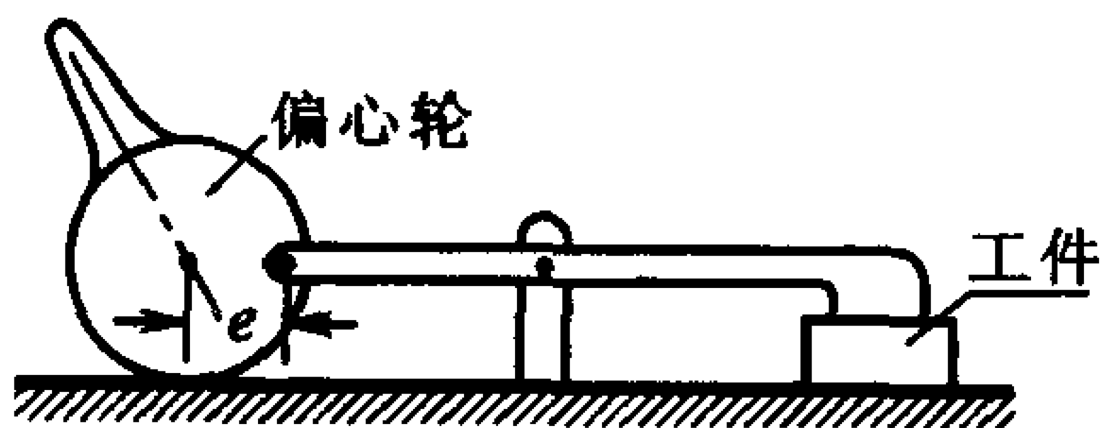
题 5-11 图



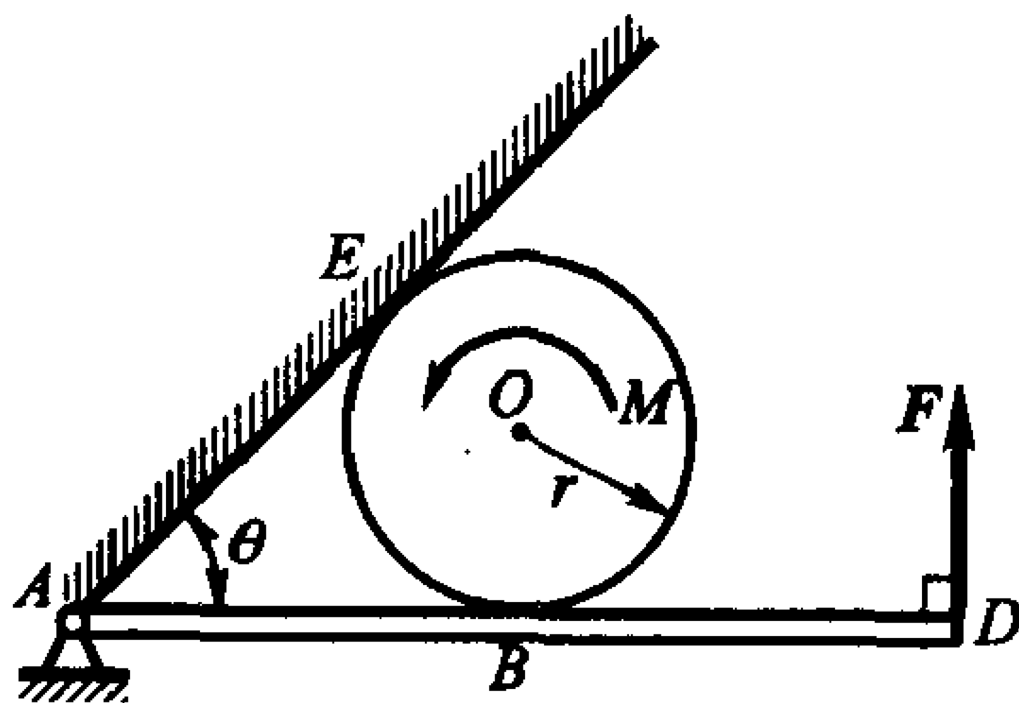
题 5-12 图

5-12 均质箱体 A 的宽度 $b=1\ \text{m}$,高 $h=2\ \text{m}$,重 $P=200\ \text{kN}$,放在倾角 $\theta=20°$的斜面上。箱体与斜面之间的摩擦因数 $f_s=0.2$。今在箱体的 C 点系一无重软绳,方向如图示,绳的另一端绕过滑轮 D 挂一重物 E。已知 $BC=a=1.8\ \text{m}$。求使箱体处于平衡状态的重物 E 的重量。

5-13 机床上为了迅速装卸工件,常采用如图所示的偏心轮夹具。已知偏心轮直径为 D,偏心轮与台面间的摩擦因数为 f_s。今欲使偏心轮手柄上的外力去掉后,偏心轮不会自动脱落,求偏心距 e 应为多少?各铰链中的摩擦忽略不计。



题 5-13 图

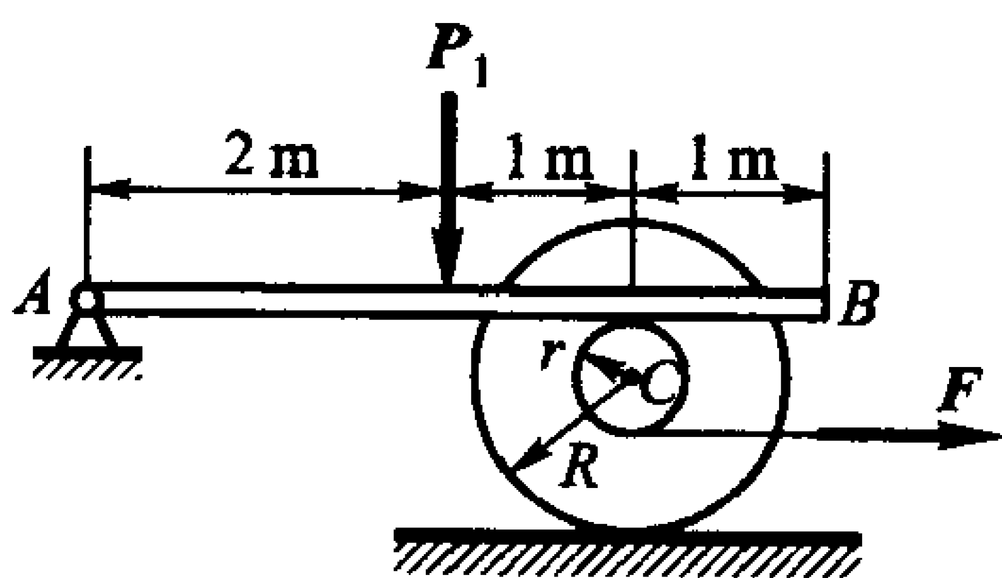


题 5-14 图

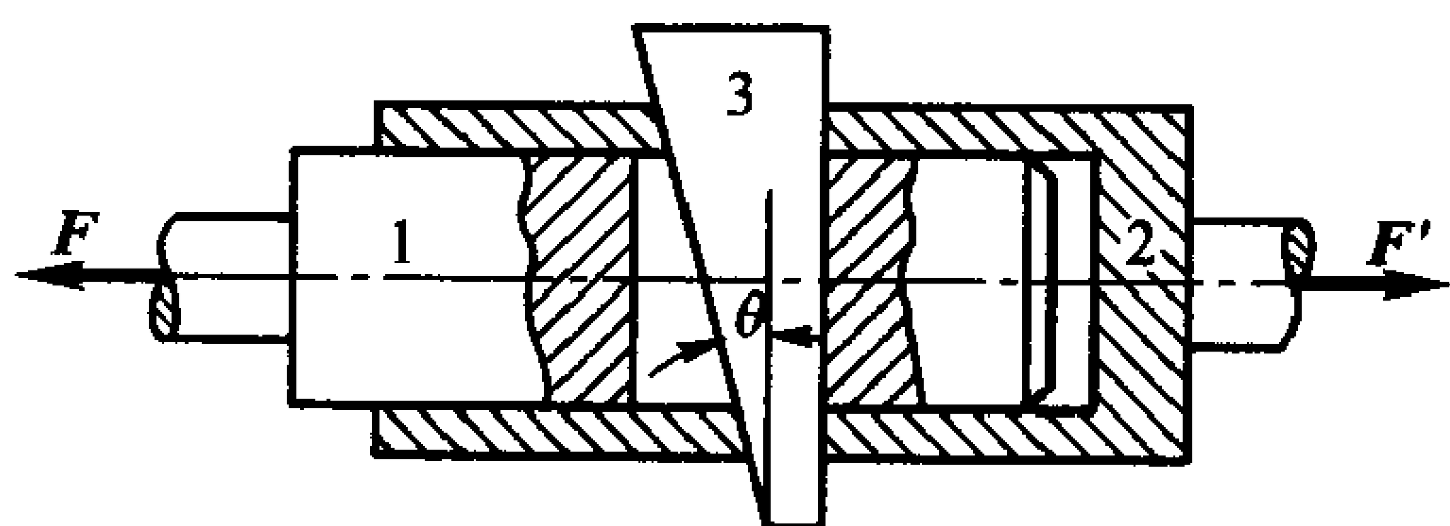
***5-14** 均质圆柱重 P、半径为 r,搁在不计自重的水平杆和固定斜面之间。杆端 A 为光滑铰链,D 端受一铅垂向上的力 F,圆柱上作用一力偶,如图所示。已知 $F=P$,圆柱与杆和斜面间的静滑动摩擦因数皆为 $f_s=0.3$,不计滚动摩阻,当 $\theta=45°$时,$AB=BD$。求此时能保持系统静止的力偶矩 M 的最小值。

***5-15** 重量为 $P_1=450\ \text{N}$ 的均质梁 AB。梁的 A 端为固定铰支座,另一端搁置在重 $P_2=343\ \text{N}$ 的线圈架的芯轴上,轮心 C 为线圈架的重心。线圈架与 AB 梁和地面间的静滑

动摩擦因数分别为$f_{s1}=0.4$，$f_{s2}=0.2$，不计滚动摩阻，线圈架的半径 $R=0.3$ m，芯轴的半径 $r=0.1$ m。今在线圈架的芯轴上绕一不计重量的软绳，求使线圈架由静止而开始运动的水平拉力 $\boldsymbol{F}$ 的最小值。



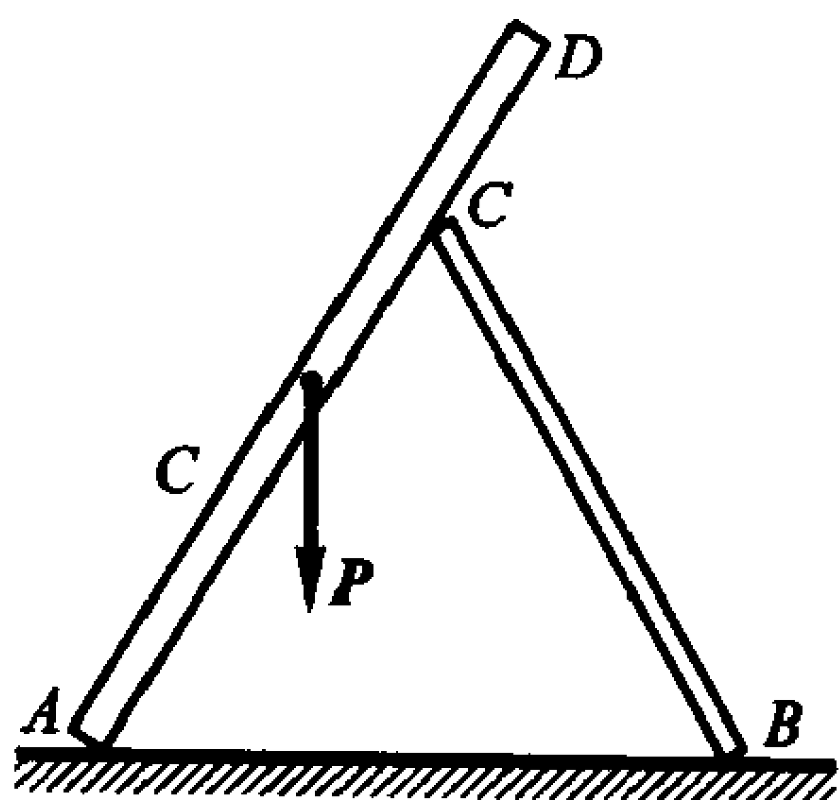
题 5－15 图



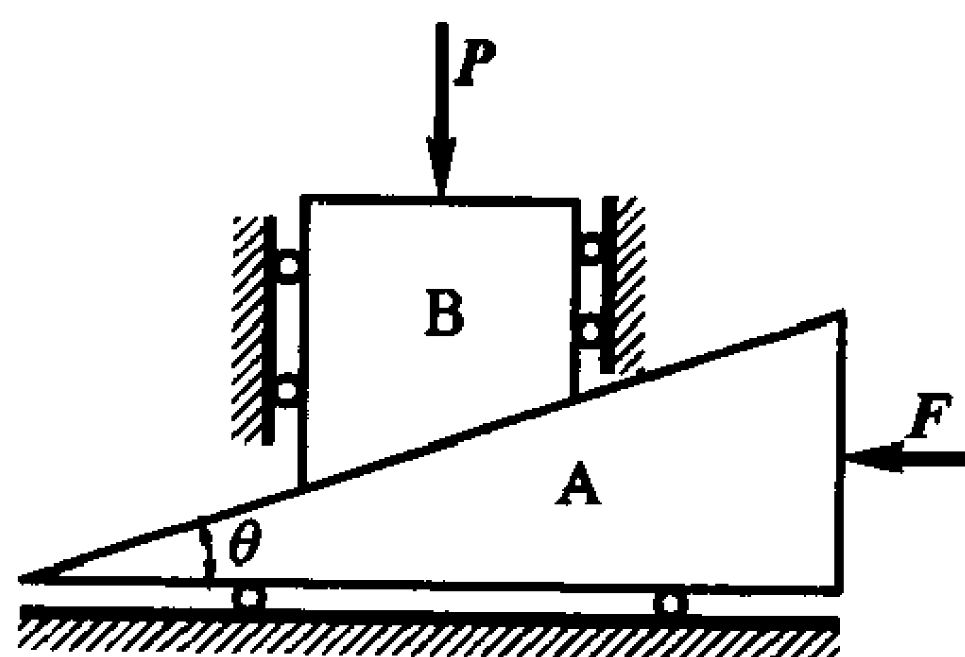
题 5－16 图

5－16　构件 1 和 2 用楔块 3 连接，已知楔块与构件间的摩擦因数 $f_s=0.1$，楔块自重不计。求能自锁的倾斜角 θ。

5－17　均质长板 AD 重 $\boldsymbol{P}$，长为 4 m，用一短板 BC 支撑，如图所示。若 $AC=BC=AB=3$ m，BC 板的自重不计。求 A，B，C 处摩擦角各为多大才能使之保持平衡。



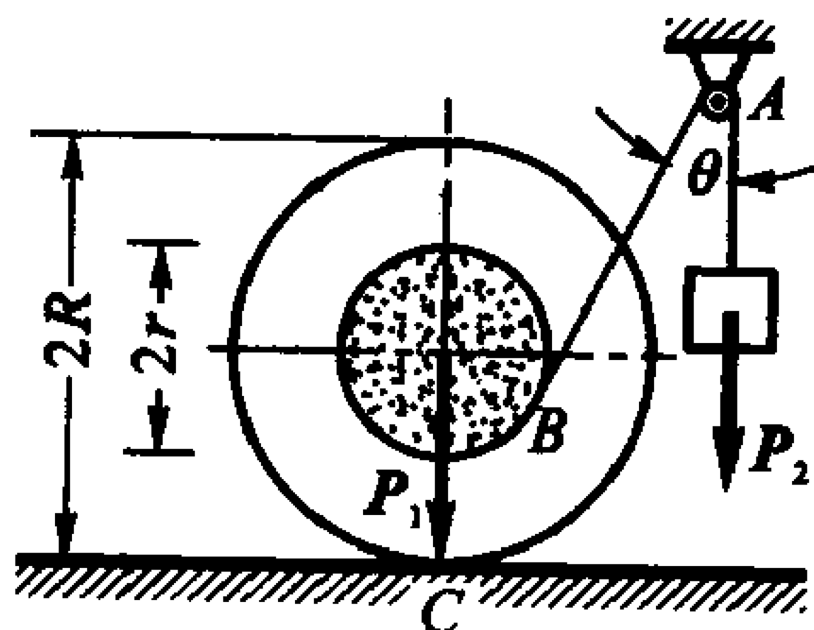
题 5－17 图



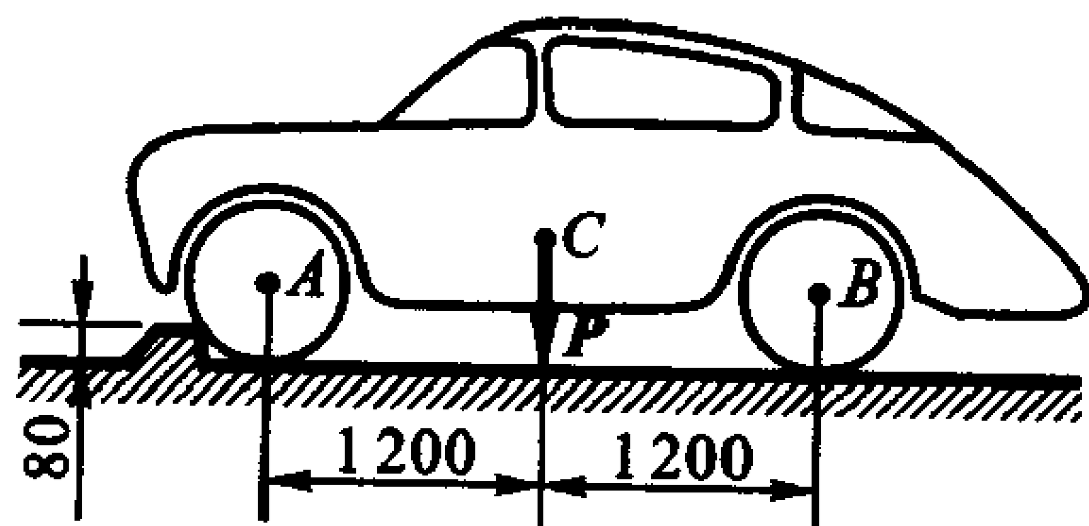
题 5－18 图

5－18　尖劈顶重装置如图所示。在 B 块上受力 $\boldsymbol{P}$ 的作用。A 与 B 块间的摩擦因数为 f_s（其他有滚珠处表示光滑）。如不计 A 和 B 块的重量，求使系统保持平衡的力 $\boldsymbol{F}$ 的值。

5－19　一半径为 R、重为 $\boldsymbol{P}_1$ 的轮静止在水平面上，如图所示。在轮上半径为 r 的轴上缠有细绳，此细绳跨过滑轮 A，在端部系一重为 $\boldsymbol{P}_2$ 的物体。绳的 AB 部分与铅直线成 θ 角。求轮与水平面接触点 C 处的滚动摩阻力偶矩、滑动摩擦力和法向反作用力。



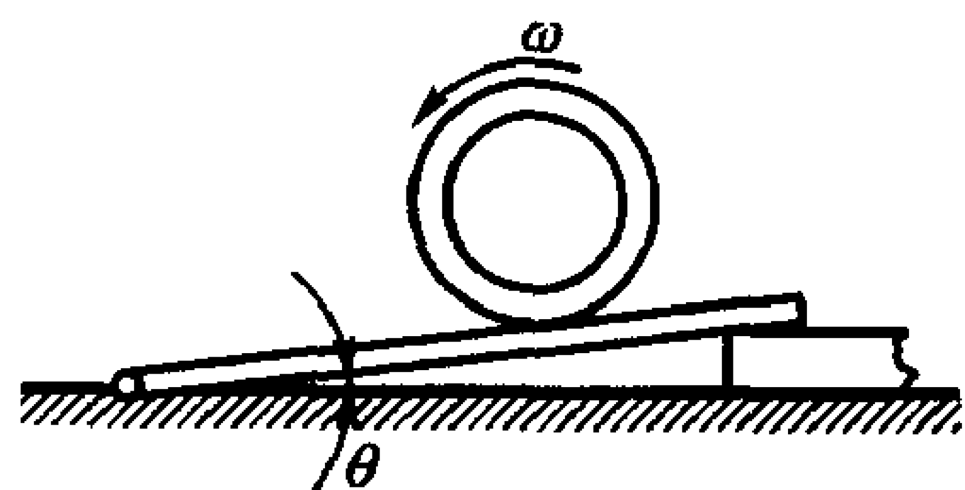
题 5－19 图



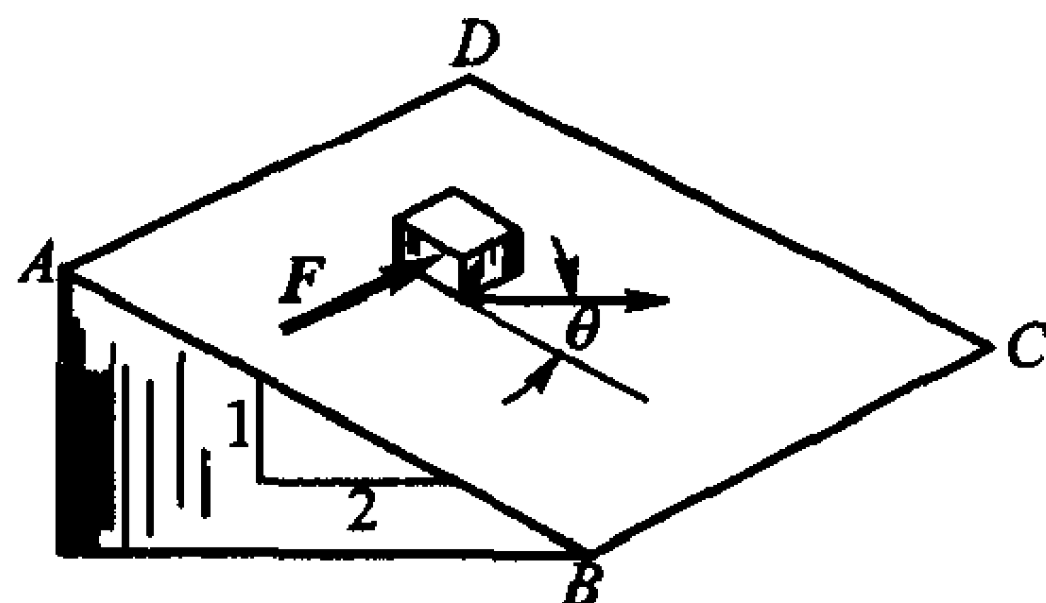
题 5－20 图

*5-20 汽车重 $P=15$ kN,车轮的直径为 600 mm,轮自重不计。问发动机应给予后轮多大的力偶矩,方能使前轮越过高为 80 mm 的阻碍物?并问此时后轮与地面的静摩擦因数应为多大才不至打滑?

5-21 如图所示,钢管车间的钢管运转台架,依靠钢管自重缓慢无滑动地滚下,钢管直径为 50 mm。设钢管与台架间的滚动摩阻系数 $\delta=0.5$ mm。试决定台架的最小倾角 θ 应为多大?



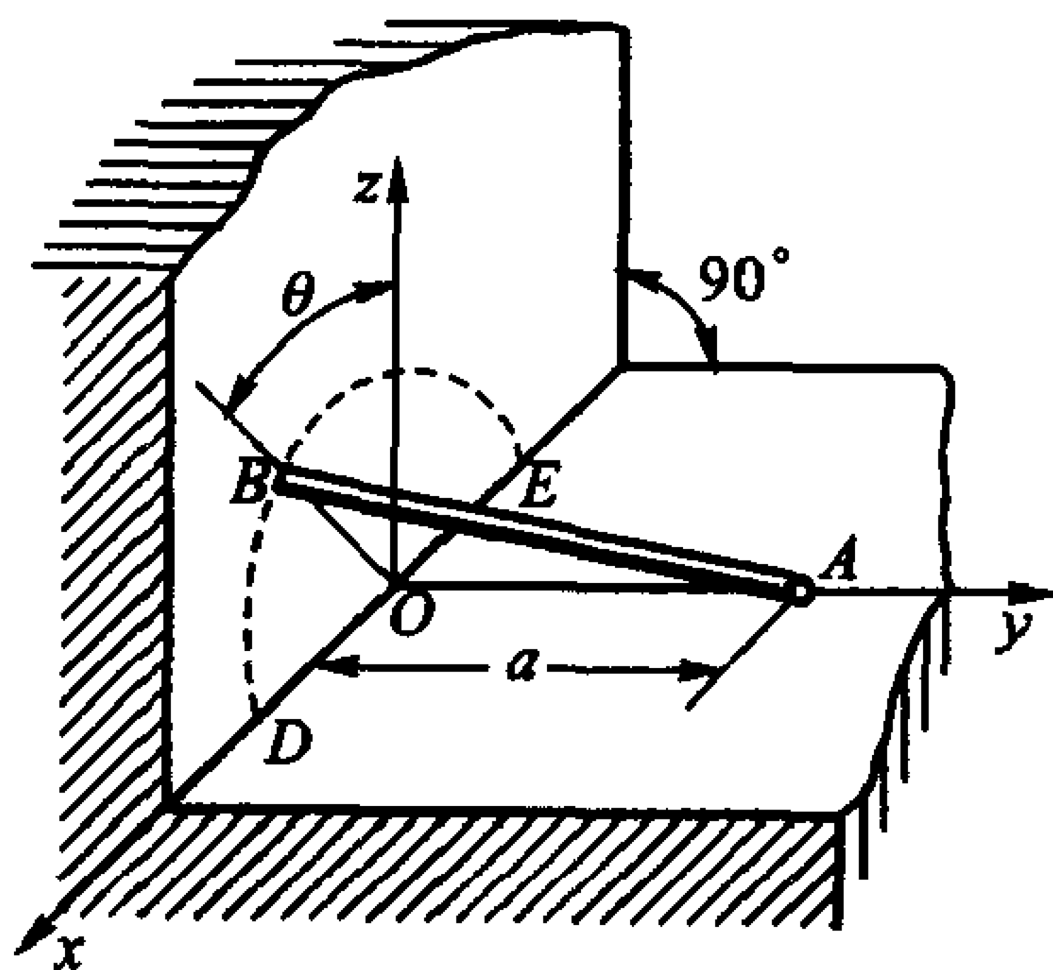
题 5-21 图



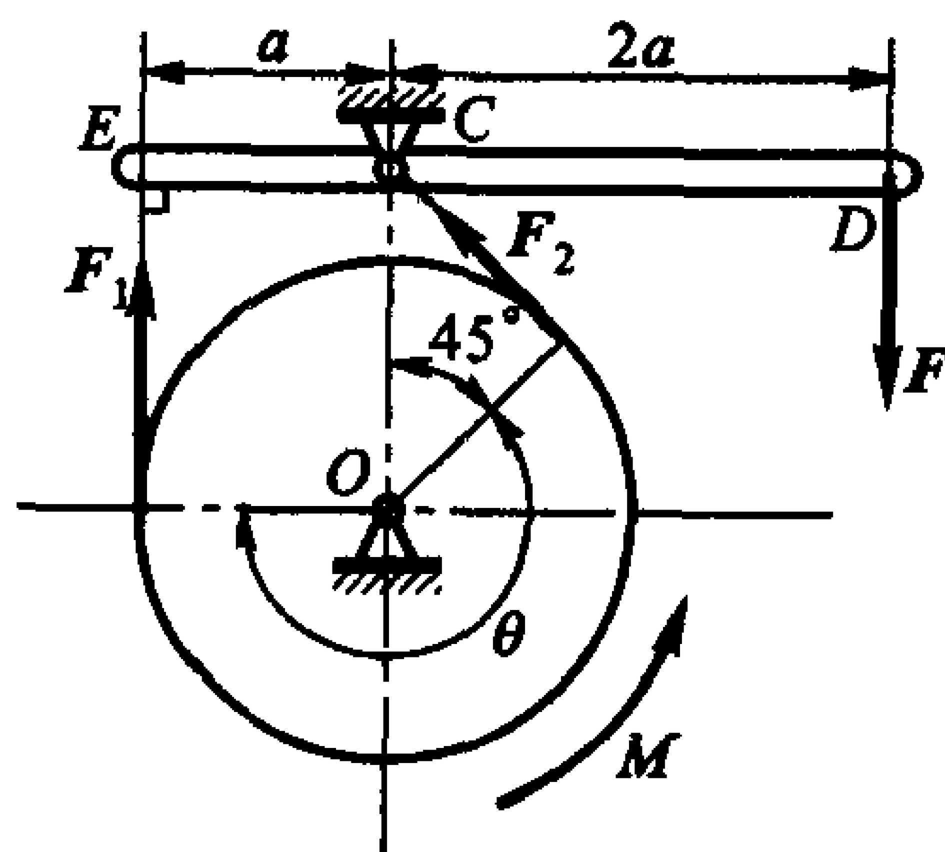
题 5-22 图

5-22 重 50 N 的方块放在倾斜的粗糙面上,斜面的边 AB 与 BC 垂直,如图所示。如在方块上作用水平力 $\boldsymbol{F}$ 与 BC 边平行,此力由零逐渐增加,方块与斜面间的静摩擦因数为 0.6。(a) 求保持方块平衡时,水平力 $\boldsymbol{F}$ 的最大值。(b) 若方块与斜面的动摩擦因数为 0.55,当物块作匀速直线运动时,求水平力 $\boldsymbol{F}$ 的大小及物块滑动的方向。

5-23 图中均质杆 AB 长 l,重 P,A 端由一球形铰链固定在地面上,B 端自由地靠在一铅直墙面上,墙面与铰链 A 的水平距离等于 a,图中 OB 与 z 轴的交角为 θ。杆 AB 与墙面间的摩擦因数为 f_s,铰链的摩擦阻力可以不计。求杆 AB 将开始沿墙滑动时,θ 角应等于多大?



题 5-23 图



题 5-24 图

5-24 胶带制动器如图所示,胶带绕过制动轮而连结于固定点 C 及水平杠杆的 E 端。胶带绕于轮上的包角 $\theta=225°=1.25\pi$(弧度),胶带与轮间的摩擦因数为 $f_s=0.5$,轮半径 $r=a=100$ mm。如在水平杆 D 端施加一铅垂力 $F=100$ N,求胶带对于制动轮的制动力矩 M 的最大值。

提示:轮与胶带间将发生滑动时,胶带两端拉力的关系为 $F_2=F_1e^{f_s\theta}$。其中 θ 为包角,以弧度计,f_s 为摩擦因数。

运　动　学

引　言

静力学研究作用在物体上的力系的平衡条件。如果作用在物体上的力系不平衡，物体的运动状态将发生变化。物体的运动规律不仅与受力情况有关，而且与物体本身的惯性和原来的运动状态有关。总之，物体在力作用下的运动规律是一个比较复杂的问题。为了学习上的循序渐进，我们暂不考虑影响物体运动的物理因素，而单独研究物体运动的几何性质（轨迹、运动方程、速度和加速度等），这部分内容称为运动学。至于物体的运动规律与力、惯性等的关系将在动力学中研究。因此，运动学是研究物体运动的几何性质的科学。

学习运动学除了为学习动力学打基础外，另一方面又有独立的意义，为分析机构的运动打好基础。因此，运动学作为理论力学中的独立部分也是很必要的。

研究一个物体的机械运动，必须选取另一个物体作为参考，这个参考的物体称为参考体。如果所选的参考体不同，那么物体相对于不同参考体的运动也不同。因此，在力学中，描述任何物体的运动都需要指明参考体。与参考体固连的坐标系称为参考系。一般工程问题中，都取与地面固连的坐标系为参考系。以后，如果不作特别说明，就应如此理解。对于特殊的问题，将根据需要另选参考系，并加以说明。

第六章　点的运动学

点的运动学是研究一般物体运动的基础，又具有独立的应用意义。本章将研究点的简单运动，研究点相对某一个参考系的几何位置随时间变动的规律，包括点的运动方程、运动轨迹、速度和加速度等。

§6-1　矢　量　法

选取参考系上某确定点 O 为坐标原点，自点 O 向动点 M 作矢量 $\boldsymbol{r}$，称 $\boldsymbol{r}$ 为点 M 相对原点 O 的位置矢量，简称**矢径**。当动点 M 运动时，矢径 $\boldsymbol{r}$ 随时间而变化，并且是时间的单值连续函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{6-1}$$

上式称为以矢量表示的点的运动方程。动点 M 在运动过程中，其矢径 $\boldsymbol{r}$ 的末端描绘出一条连续曲线，称为矢端曲线。显然，矢径 $\boldsymbol{r}$ 的矢端曲线就是动点 M 的运动**轨迹**，如图 6-1 所示。

点的**速度**是矢量。动点的速度矢等于它的矢径 $\boldsymbol{r}$ 对时间的一阶导数，即

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{6-2}$$

动点的速度矢沿着矢径 $\boldsymbol{r}$ 的矢端曲线的切线，即沿动点运动轨迹的切线，并与此点运动的方向一致。速度的大小，即速度矢 $\boldsymbol{v}$ 的模，表明点运动的快慢，在国际单位制中，速度 $\boldsymbol{v}$ 的单位为 m/s。

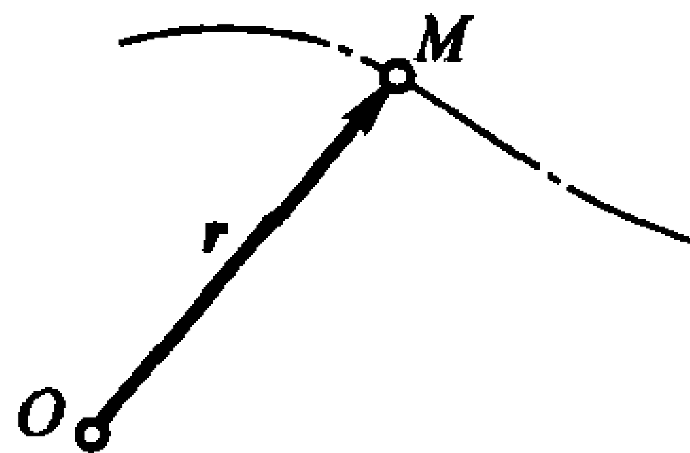


图 6-1

点的速度矢对时间的变化率称为**加速度**。点的加速度也是矢量，它表征了速度大小和方向的变化。动点的加速度矢等于该点的速度矢对时间的一阶导数，或等于矢径对时间的二阶导数，即

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{6-3}$$

有时为了方便，在字母上方加"· "表示该量对时间的一阶导数，加".. "表示该量对时间的二阶导数。因此，式(6-2)、(6-3)亦可记为

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}} \qquad \boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{r}}$$

在国际单位制中，加速度 $\boldsymbol{a}$ 的单位为 $\mathrm{m/s^2}$。

如在空间任意取一点 O，把动点 M 在连续不同瞬时的速度矢 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}'', \cdots$

等都平行地移到点 O,连接各矢量的端点 $M, M', M'', \cdots$,就构成了矢量 $\boldsymbol{v}$ 端点的连续曲线,称为**速度矢端曲线**,如图 6-2a 所示。动点的加速度矢 $\boldsymbol{a}$ 的方向与速度矢端曲线在相应点 M 的切线相平行,如图 6-2b 所示。

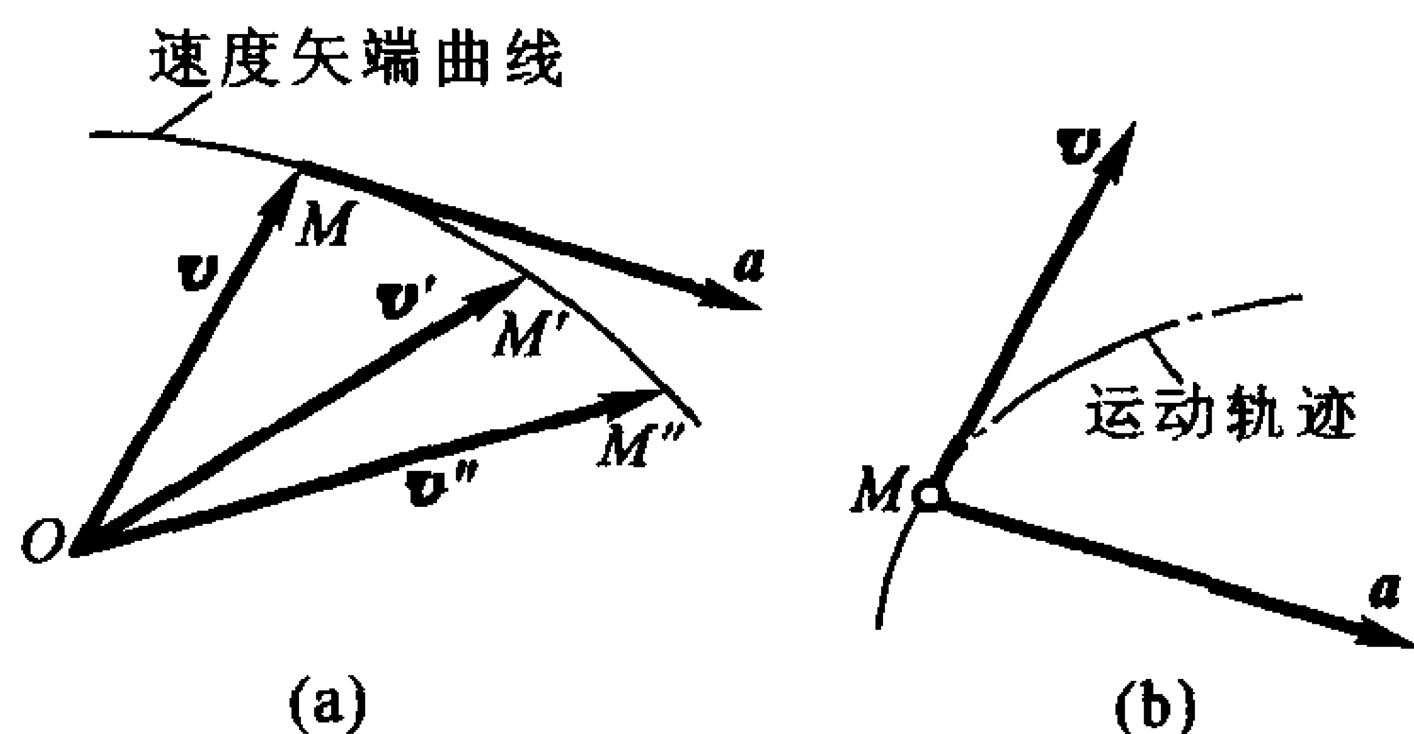


图 6-2

§6-2 直角坐标法

取一固定的直角坐标系 $Oxyz$,则动点 M 在任意瞬时的空间位置既可以用它相对于坐标原点 O 的矢径 $\boldsymbol{r}$ 表示,也可以用它的三个直角坐标 x, y, z 表示,如图 6-3 所示。

由于矢径的原点与直角坐标系的原点重合,因此有如下关系

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{6-4}$$

式中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别为沿三个定坐标轴的单位矢量,如图 6-3 所示。由于 $\boldsymbol{r}$ 是时间的单值连续函数,因此 x, y, z 也是时间的单值连续函数。利用式(6-4),可以将运动方程(6-1)写为

$$x = f_1(t) \quad y = f_2(t) \quad z = f_3(t) \tag{6-5}$$

这些方程称为以直角坐标表示的点的运动方程。如果知道了点的运动方程式(6-5),就可以求出任一瞬时点的坐标 x, y, z 的值,也就完全确定了该瞬时动点的位置。

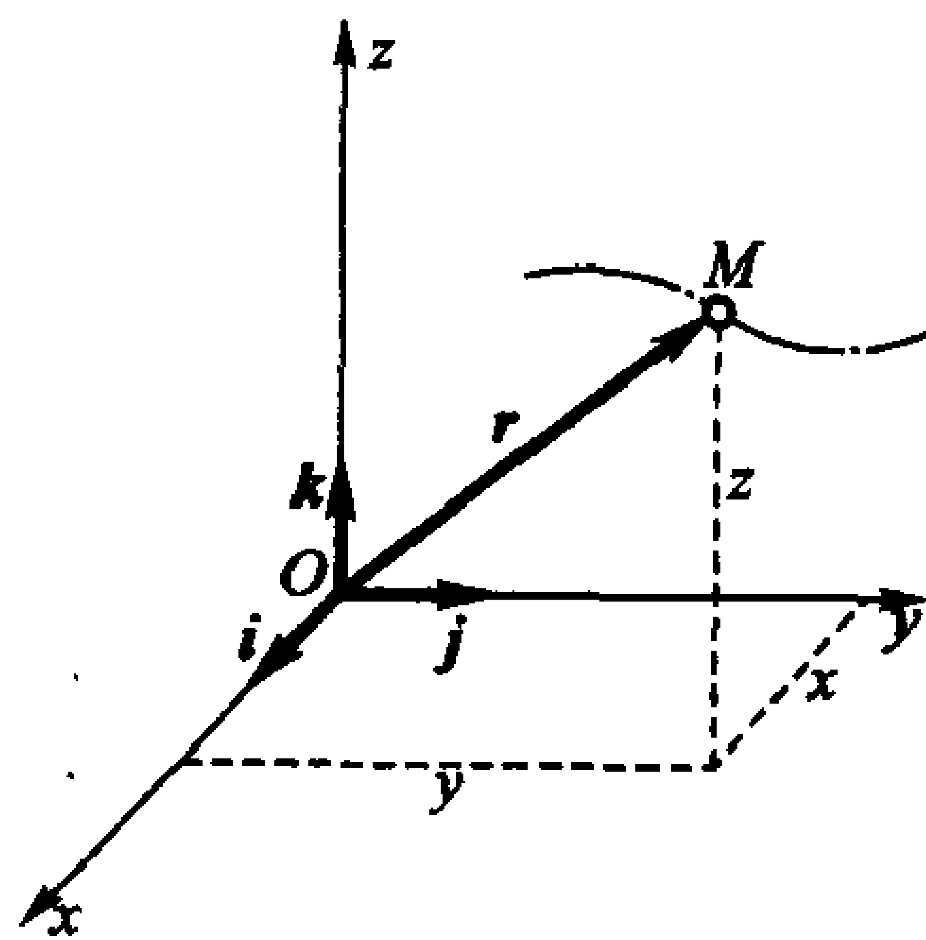


图 6-3

式(6-5)实际上也是点的轨迹的参数方程,只要给定时间 t 的不同数值,依次得出点的坐标 x, y, z 的相应数值,根据这些数值就可以描出动点的轨迹。

因为动点的轨迹与时间无关,如果需要求点的轨迹方程,可将运动方程中的时间 t 消去。

在工程中,经常遇到点在某平面内运动的情形,此时点的轨迹为一平面曲线。取轨迹所在的平面为坐标平面 Oxy,则点的运动方程为

$$x = f_1(t), y = f_2(t) \tag{6-6}$$

从上式中消去时间 t，即得轨迹方程

$$f(x, y) = 0 \tag{6-7}$$

将式(6-4)代入到式(6-2)中，由于 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 为大小和方向都不变的恒矢量，因此有

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} \tag{6-8}$$

设动点 M 的速度矢 $\boldsymbol{v}$ 在直角坐标轴上的投影为 v_x，v_y 和 v_z，即

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{6-9}$$

比较式(6-8)和(6-9)，得到

$$v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z} \tag{6-10}$$

因此，速度在各坐标轴上的投影等于动点的各对应坐标对时间的一阶导数。

由式(6-10)求得 v_x，v_y 及 v_z 后，速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小和方向就可由它的这三个投影完全确定。

同理，设

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \tag{6-11}$$

则有

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \tag{6-12}$$

因此，加速度在直角坐标轴上的投影等于动点的各对应坐标对时间的二阶导数。

加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小和方向由它的三个投影 a_x、a_y 和 a_z 完全确定。

例 6-1　椭圆规的曲柄 OC 可绕定轴 O 转动，其端点 C 与规尺 AB 的中点以铰链相连接，而规尺 A，B 两端分别在相互垂直的滑槽中运动，如图 6-4 所示。已知：$OC = AC = BC = l$，$MC = a$，$\varphi = \omega t$。求规尺上点 M 的运动方程、运动轨迹、速度和加速度。

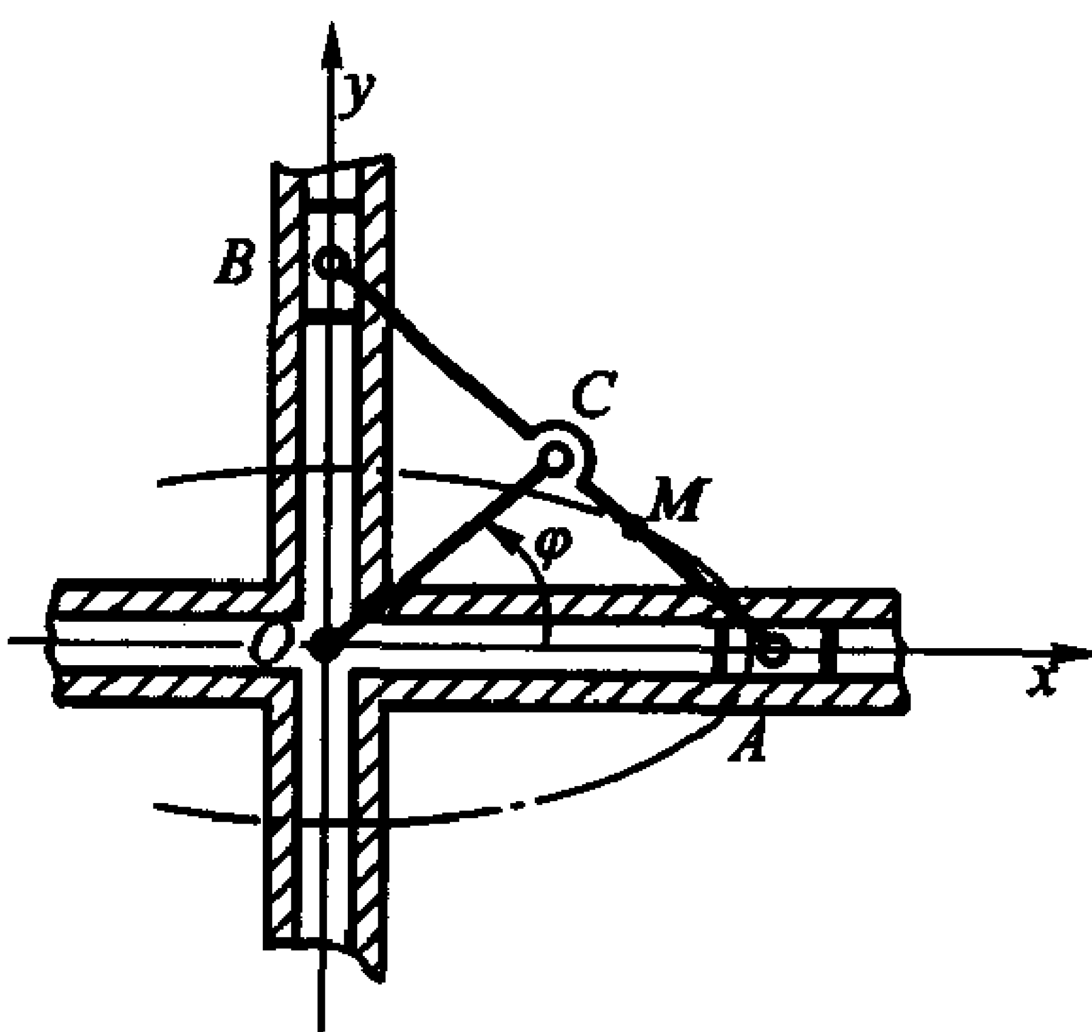


图 6-4

解：　欲求点 M 的运动轨迹，可以先用直角坐标法给出它的运动方程，然后从运动方程中消去时间 t，得到轨迹方程。为此，取坐标系 Oxy 如图 6-4 所示，点 M 的运动方程为

$$x = (OC + CM)\cos\varphi = (l + a)\cos\omega t$$

$$y = AM\sin\varphi = (l - a)\sin\omega t$$

消去时间 t，得轨迹方程

$$\frac{x^2}{(l+a)^2} + \frac{y^2}{(l-a)^2} = 1$$

由此可见，点 M 的轨迹是一个椭圆，长轴与 x 轴重合，短轴与 y 轴重合。

当点 M 在 BC 段上时，椭圆的长轴将与 y 轴重合。读者可自行推算。

为求点的速度，应将点的坐标对时间取一次导数。得

$$v_x = \dot{x} = -(l+a)\omega\sin\omega t \quad v_y = \dot{y} = (l-a)\omega\cos\omega t$$

故点 M 的速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(l+a)^2\omega^2\sin^2\omega t + (l-a)^2\omega^2\cos^2\omega t}$$

$$= \omega\sqrt{l^2 + a^2 - 2al\cos 2\omega t}$$

其方向余弦为

$$\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}) = \frac{v_x}{v} = \frac{-(l+a)\sin\omega t}{\sqrt{l^2 + a^2 - 2al\cos 2\omega t}}$$

$$\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{j}) = \frac{v_y}{v} = \frac{(l-a)\cos\omega t}{\sqrt{l^2 + a^2 - 2al\cos 2\omega t}}$$

为求点的加速度，应将点的坐标对时间取二次导数，得

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -(l+a)\omega^2\cos\omega t$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -(l-a)\omega^2\sin\omega t$$

故点 M 的加速度大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(l+a)^2\omega^4\cos^2\omega t + (l-a)^2\omega^4\sin^2\omega t}$$

$$= \omega^2\sqrt{l^2 + a^2 + 2al\cos 2\omega t}$$

其方向余弦为

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}) = \frac{a_x}{a} = \frac{-(l+a)\cos\omega t}{\sqrt{l^2 + a^2 + 2al\cos 2\omega t}}$$

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}) = \frac{a_y}{a} = \frac{-(l-a)\sin\omega t}{\sqrt{l^2 + a^2 + 2al\cos 2\omega t}}$$

例 6-2 正弦机构如图 6-5 所示。曲柄 OM 长为 r，绕 O 轴匀速转动，它与水平线间的夹角为 $\varphi = \omega t + \theta$，其中 θ 为 $t = 0$ 时的夹角，ω 为一常数。已知动杆上 A，B 两点间距离为 b。求点 A 和 B 的运动方程及点 B 的速度和加速度。

解： A，B 两点都作直线运动。取 Ox 轴如图所示。于是 A，B 两点的坐标分别为

$$x_A = b + r\sin\varphi \qquad x_B = r\sin\varphi$$

将坐标写成时间的函数，即得 A，B 两点沿 Ox 轴的运动方程

$$x_A = b + r\sin(\omega t + \theta) \qquad x_B = r\sin(\omega t + \theta)$$

工程中，为了使点的运动情况一目了然，常常将点的坐标与时间的函数关系绘成图线，一般取横轴为时间，纵轴为点的坐标，绘出的图线称为运动图线。图 6-6 中的曲线分别为 A，B 两点的运动图线。

当点作直线往复运动，并且运动方程可写成时间的正弦函数或余弦函数时，这种运动称为直线谐振动。往复运动的中心称为振动中心。动点偏离振动中心最远的距离 r 称为振幅。用来确定动点位置的角 $\varphi = \omega t + \theta$ 称为位相，用来确定动点初始位置的角 θ 称为初位相。

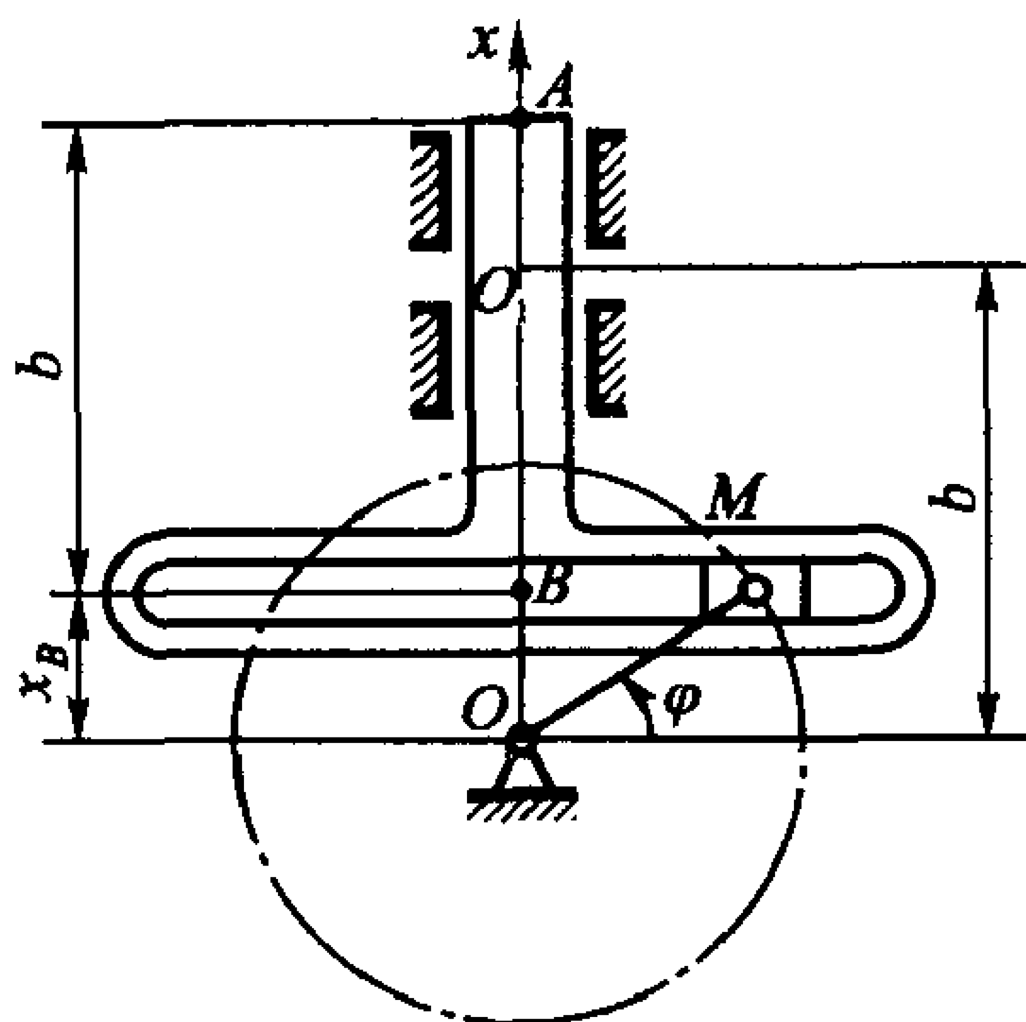


图 6-5

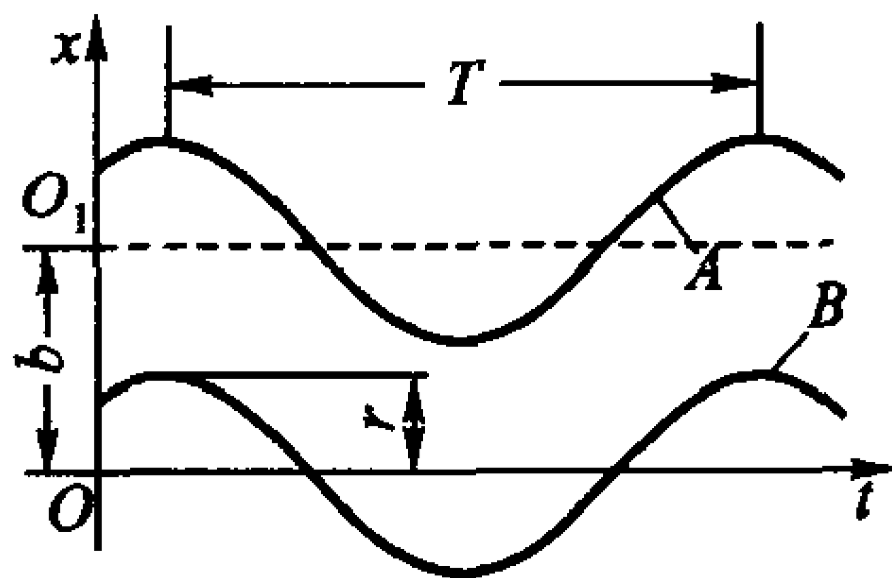


图 6-6

动点往复一次所需的时间 T 称为振动的周期。由于时间经过一个周期,位相应增加 2π,即

$$\omega(t+T)+\theta=(\omega t+\theta)+2\pi$$

故得

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

周期 T 的倒数 $f=\frac{1}{T}$ 称为频率,表示每秒振动的次数,其单位为 1/s,或称为赫兹(Hz)。ω 称为振动的角频率,因为

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$

所以角频率表示在 2π 秒内振动的次数。

将点 B 的运动方程对时间取一阶导数,即得点 B 的速度

$$v=\dot{x}_B=r\omega\cos(\omega t+\theta)$$

点 B 的加速度为

$$a=\ddot{x}_B=-r\omega^2\sin(\omega t+\theta)=-\omega^2 x_B$$

从上式看出,谐振动的特征之一是加速度的大小与动点的位移成正比,而方向相反。

为了形象地表示动点的速度和加速度随时间变化的规律,将 v 和 a 随 t 变化的函数关系画成曲线,这些曲线分别称为速度图线和加速度图线。在图 6-7 中,表示出谐振动的运动图线、速度图线和加速度图线。从图中可知,动点在振动中心时,速度值最大,加速度值为零;在两端位置时,加速度值最大,速度值为零;又知,点从振动中心向两端运动是减速运动,而从两端回到中心的运动是加速运动。

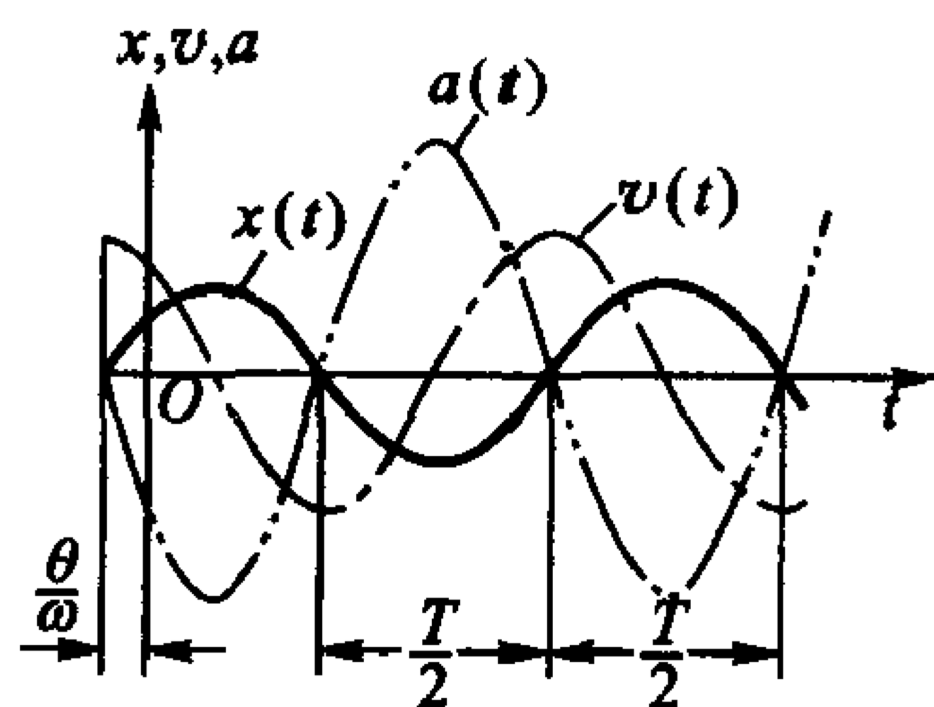


图 6-7

例 6-3 如图 6-8 所示,当液压减震器工作时,它的活塞在套筒内作直线往复运动。

设活塞的加速度 $a=-kv$（v 为活塞的速度，k 为比例常数），初速为 v_0，求活塞的运动规律。

解： 活塞作直线运动。取坐标轴 Ox 如图所示。

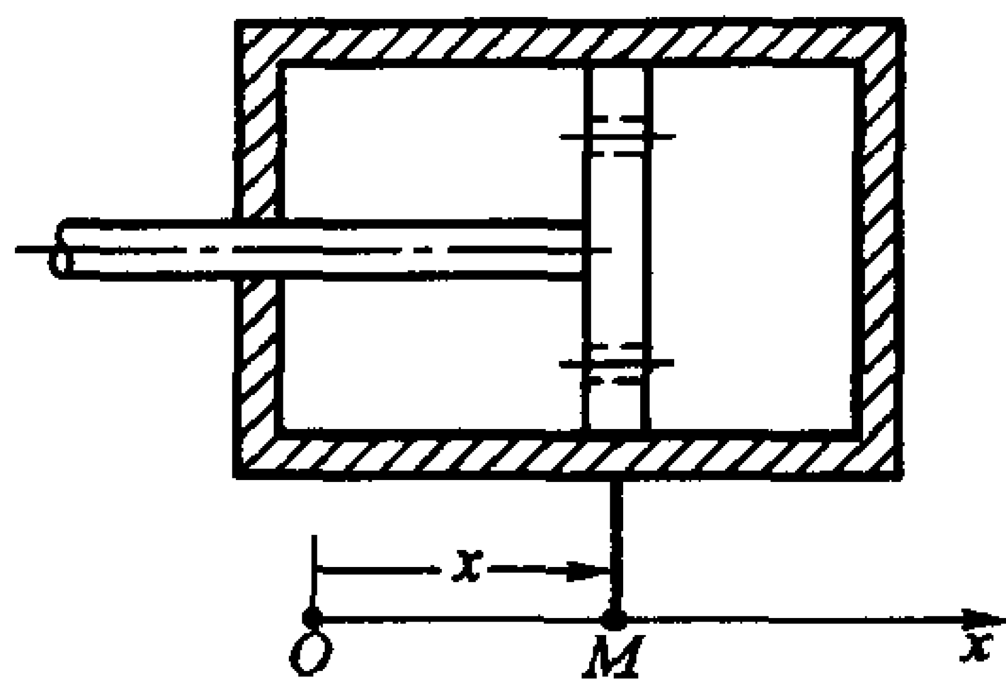


图 6-8

因

$$\dot{v}=a$$

代入已知条件，得

$$\dot{v}=-kv$$

将变量分离后积分，

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=-k\int_0^t\mathrm{d}t$$

得

$$\ln\frac{v}{v_0}=-kt$$

解得

$$v=v_0\mathrm{e}^{-kt}$$

又因

$$v=\dot{x}=v_0\mathrm{e}^{-kt}$$

对上式积分，即

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=v_0\int_0^t\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$$

解得

$$x=x_0+\frac{v_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt})$$

§6-3　自　然　法

利用点的运动轨迹建立弧坐标及自然轴系，并用它们来描述和分析点的运动的方法称为**自然法**。

1．弧坐标

设动点 M 的轨迹为如图 6-9 所示的曲线，则动点 M 在轨迹上的位置可以这样确定：在轨迹上任选一点 O 为参考点，并设点 O 的某一侧为正向，动点 M 在轨迹上的位置由弧长确定，视弧长 s 为代数量，称它为动点 M 在轨迹上的**弧坐标**。当动点 M 运动时，s 随着时间变化，它是时间的单值连续函数，即

$$s=f(t) \tag{6-13}$$

上式称为点沿轨迹的运动方程，或以弧坐标表示的点的运动方程。如果已知点的运动方程式(6-13)，可以确定任一瞬时点的弧坐标 s 的值，也就确定了该瞬时动点在轨迹上的位置。

2．自然轴系

在点的运动轨迹曲线上取极为接近的两点 M 和 M_1，其间的弧长为 Δs，这

两点**切线**的单位矢量分别为 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\tau}_1$，其指向与弧坐标正向一致，如图 6－10 所示。将 $\boldsymbol{\tau}_1$ 平移至点 M，则 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\tau}_1$ 决定一平面。令 M_1 无限趋近点 M，则此平面趋近于某一极限位置，此极限平面称为曲线在点 M 的**密切面**。过点 M 并与切线垂直的平面称为**法平面**，法平面与密切面的交线称**主法线**。令主法线的单位矢量为 $\boldsymbol{n}$，指向曲线内凹一侧。过点 M 且垂直于切线及主法线的直线称**副法线**，其单位矢量为 $\boldsymbol{b}$，指向与 $\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{n}$ 构成右手系，即

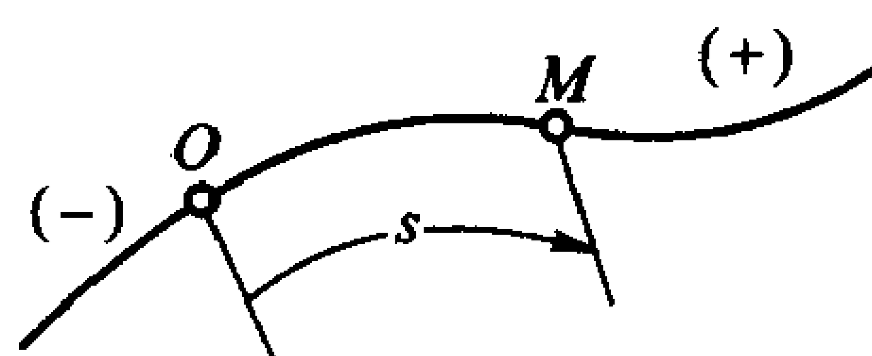


图 6－9

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}$$

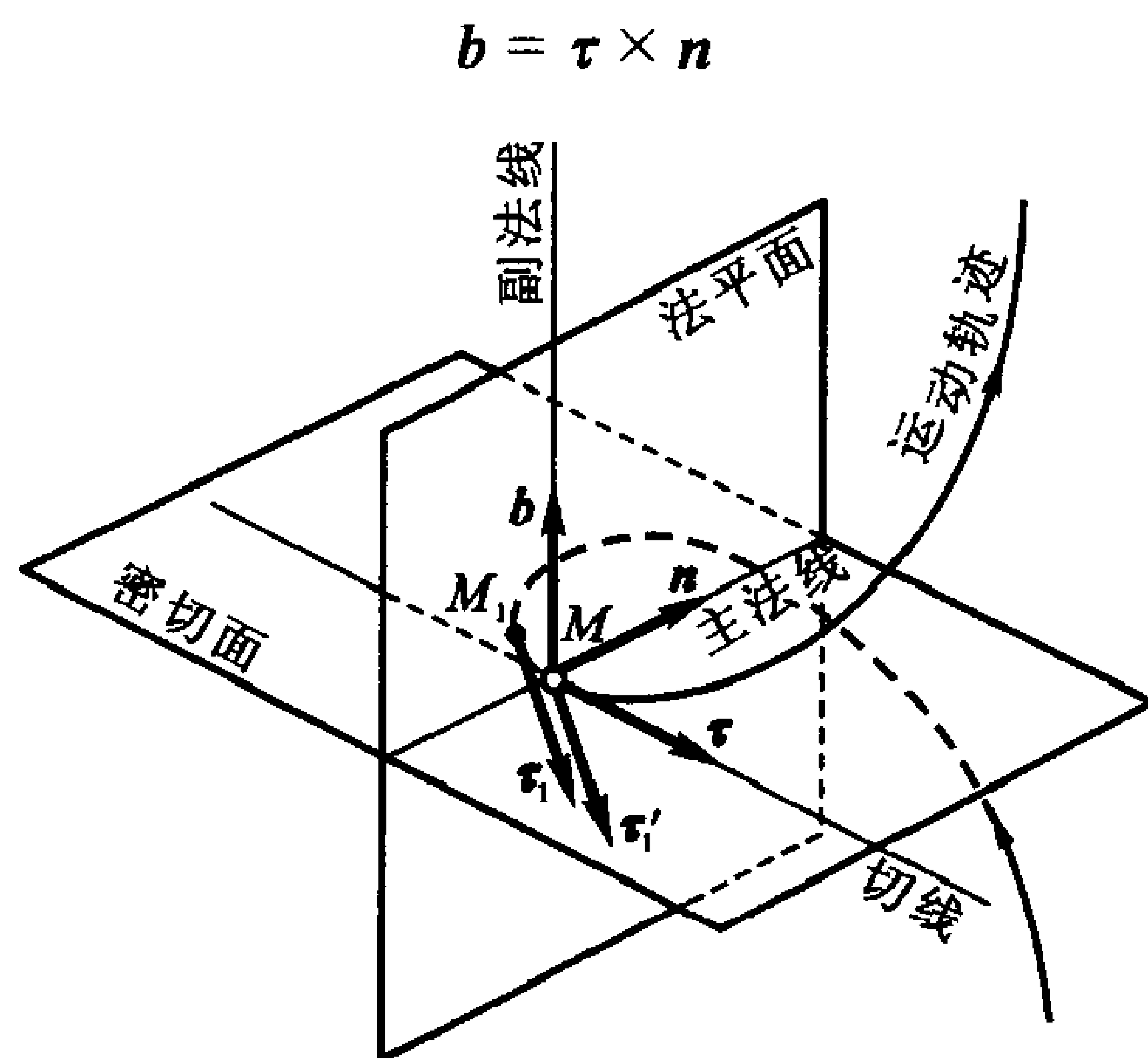


图 6－10

以点 M 为原点，以切线、主法线和副法线为坐标轴组成的正交坐标系称为曲线在点 M 的自然坐标系，这三个轴称为**自然轴**。注意，随着点 M 在轨迹上运动，$\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向也在不断变动；自然坐标系是沿曲线而变动的游动坐标系。

在曲线运动中，轨迹的曲率或曲率半径是一个重要的参数，它表示曲线的弯曲程度。如点 M 沿轨迹经过弧长 Δs 到达点 M'，如图 6－11 所示。设点 M 处曲线切向单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}$，点 M' 处单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}'$，而切线经过 Δs 时转过的角度为 $\Delta\varphi$。曲率定义为曲线切线的转角对弧长一阶导数的绝对值。曲率的倒数称为曲率半径。如曲率半径以 ρ 表示，则有

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \right| \tag{6-14}$$

由图 6－11 可见

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}| = 2|\boldsymbol{\tau}|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

当 $\Delta s \to 0$ 时，$\Delta\varphi \to 0$，$\Delta\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 垂直，且有 $|\boldsymbol{\tau}| = 1$，由此可得

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}| \doteq \Delta\varphi$$

注意到 Δs 为正时，点沿切向 $\boldsymbol{\tau}$ 的正方向运动，$\Delta\boldsymbol{\tau}$ 指向轨迹内凹一侧；Δs 为负时，$\Delta\boldsymbol{\tau}$ 指向轨迹外凸一侧。因此有

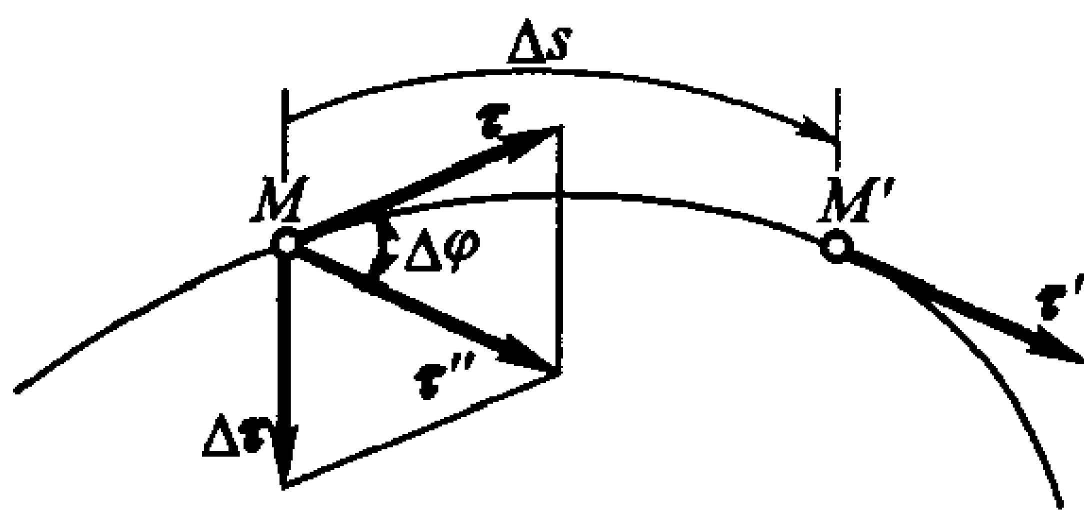


图 6－11

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\boldsymbol{n} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{n} \quad (6-15)$$

上式将用于法向加速度的推导。

3．点的速度

点沿轨迹由 M 到 M'，经过 Δt 时间，其矢径有增量 $\Delta\boldsymbol{r}$，如图 6－12 所示。当 $\Delta t\to 0$ 时，$|\Delta\boldsymbol{r}| = |\widehat{MM'}| = |\Delta s|$，故有

$$|\boldsymbol{v}| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$$

式中 s 是动点在轨迹曲线上的弧坐标。由此可得结论：速度的大小等于动点的弧坐标对时间的一阶导数的绝对值。

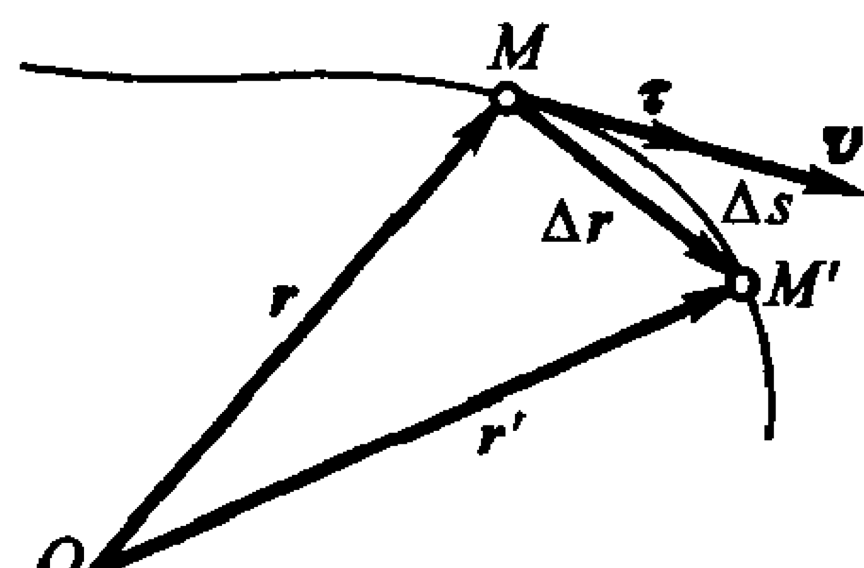


图 6－12

弧坐标对时间的导数是一个代数量，以 v 表示

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s} \quad (6-16)$$

如 $\dot{s}>0$，则 s 值随时间增加而增大，点沿轨迹的正向运动；如 $\dot{s}<0$，则点沿轨迹的负向运动。于是，$\dot{s}$ 的绝对值表示速度的大小，它的正负号表示点沿轨迹运动的方向。

由于 $\boldsymbol{\tau}$ 是切线轴的单位矢量，因此点的速度矢可写为

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} \quad (6-17)$$

4．点的切向加速度和法向加速度

将式(6－17)对时间取一阶导数，注意到 v，$\boldsymbol{\tau}$ 都是变量，得

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} \quad (6-18)$$

上式右端两项都是矢量，第一项是反映速度大小变化的加速度，记为 $\boldsymbol{a}_t$；第二项是反映速度方向变化的加速度，记为 $\boldsymbol{a}_n$。下面分别求它们的大小和方向。

(1) 反映速度大小变化的加速度 $\boldsymbol{a}_t$

因为

$$\boldsymbol{a}_t = \dot{v}\boldsymbol{\tau} \quad (6-19)$$

显然 $\boldsymbol{a}_t$ 是一个沿轨迹切线的矢量，因此称为**切向加速度**。如 $\dot{v}>0$，$\boldsymbol{a}_t$ 指向轨迹

的正向；如 $\dot{v}<0$，$\boldsymbol{a}_t$ 指向轨迹的负向。令

$$a_t = \dot{v} = \ddot{s} \tag{6-20}$$

a_t 是一个代数量，是加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿轨迹切向的投影。

由此可得结论：切向加速度反映点的速度值对时间的变化率，它的代数值等于速度的代数值对时间的一阶导数，或弧坐标对时间的二阶导数，它的方向沿轨迹切线。

(2) 反映速度方向变化的加速度 $\boldsymbol{a}_n$

因为

$$\boldsymbol{a}_n = v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} \tag{6-21}$$

它反映速度方向 $\boldsymbol{\tau}$ 的变化。上式可改写为

$$\boldsymbol{a}_n = v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

将式(6-15)及(6-16)代入上式，得

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} \tag{6-22}$$

由此可见，$\boldsymbol{a}_n$ 的方向与主法线的正向一致，称为**法向加速度**。于是可得结论：法向加速度反映点的速度方向改变的快慢程度，它的大小等于点的速度平方除以曲率半径，它的方向沿着主法线，指向曲率中心。

正如前面分析的那样，切向加速度表明速度大小的变化率，而法向加速度只反映速度方向的变化，所以，当速度 $\boldsymbol{v}$ 与切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 的指向相同时，即 v 与 a_t 的符号相同时，速度的绝对值不断增加，点作加速运动，如图 6-13a 所示；当速度 $\boldsymbol{v}$ 与切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 的指向相反时，即 v 与 a_t 的符号相反时，速度的绝对值不断减小，点作减速运动，如图 6-13b 所示。

将式(6-19)、(6-21)和(6-22)代入式(6-18)中，有

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n = a_t\boldsymbol{\tau} + a_n\boldsymbol{n} \tag{6-23}$$

式中

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{6-24}$$

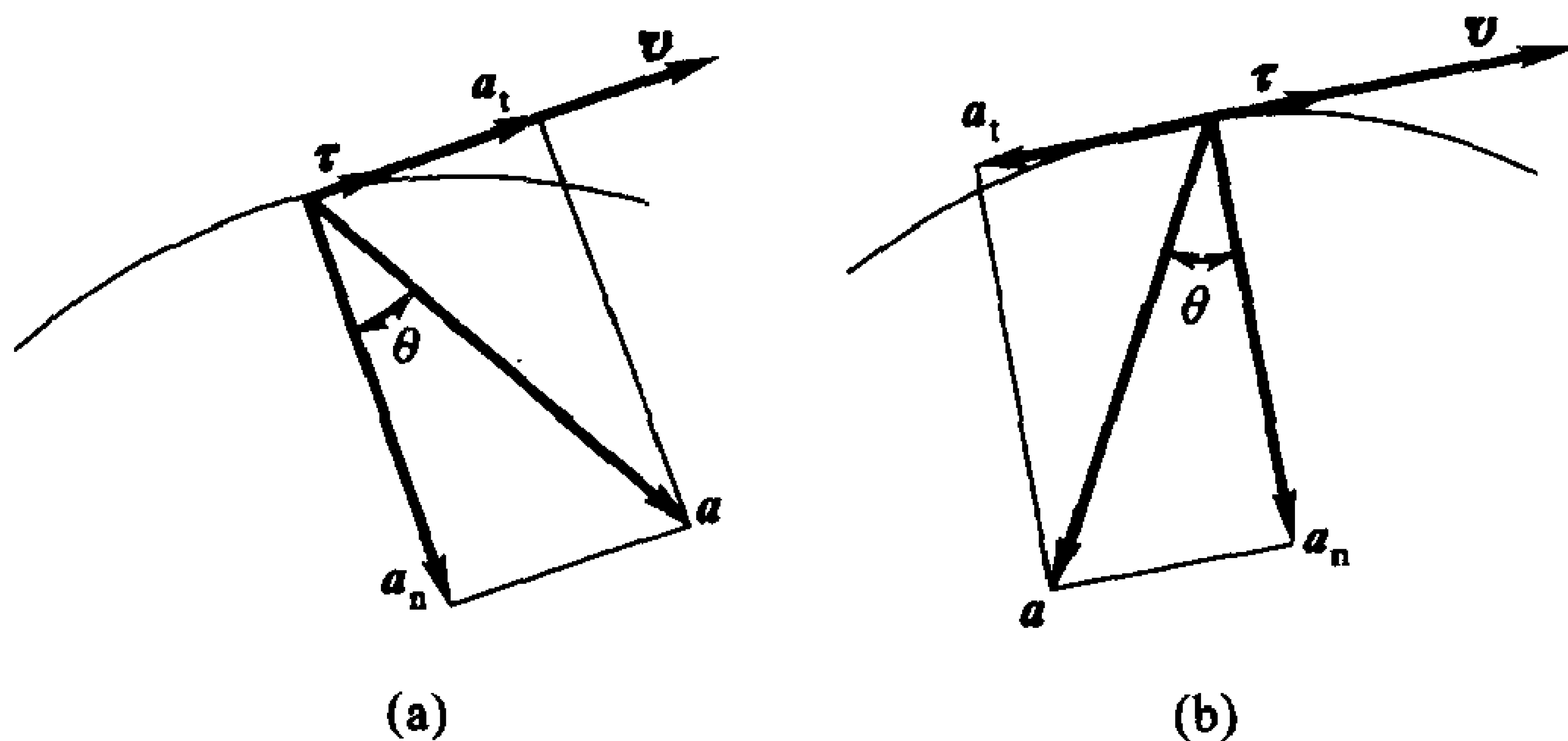
由于 $\boldsymbol{a}_t$，$\boldsymbol{a}_n$ 均在密切面内，因此全加速度 $\boldsymbol{a}$ 也必在密切面内。这表明加速度沿副法线上的分量为零，即

$$\boldsymbol{a}_b = \boldsymbol{0} \tag{6-25}$$

全加速度的大小可由下式求出。

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \tag{6-26}$$

它与法线间的夹角的正切为



(a) (b)

图 6-13

$$\tan\ \theta = \frac{a_t}{a_n} \tag{6-27}$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与切向单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 的夹角为锐角时 θ 为正，否则为负(图6-13b)。

如果动点的切向加速度的代数值保持不变，即 a_t = 恒量，则动点的运动称为曲线匀变速运动。现在来求它的运动规律。

由

$$dv = a_t dt$$

积分得

$$v = v_0 + a_t t \tag{6-28}$$

式中 v_0 是在 $t=0$ 时点的速度。

再积分，得

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2 \tag{6-29}$$

式中 s_0 是在 $t=0$ 时点的弧坐标。

式(6-28)和(6-29)与物理学中点作匀变速直线运动的公式完全相似，只不过点作曲线运动时，式中的加速度应该是切向加速度 a_t，而不是全加速度 a。这是因为点作曲线运动时，反映运动速度大小变化的只是全加速度的一个分量——切向加速度。

了解上述关系后，容易得到曲线运动的运动规律。例如所谓曲线匀速运动，即动点速度的代数值保持不变，与直线匀速运动的公式相比，即得

$$s = s_0 + vt \tag{6-30}$$

应注意，在一般曲线运动中，除 $v=0$ 的瞬时外，点的法向加速度 a_n 总不等于零。直线运动为曲线运动的一种特殊情况，曲率半径 $\rho\to\infty$，任何瞬时点的法向加速度始终为零。

例 6-4　列车沿半径为 $R=800\ \mathrm{m}$ 的圆弧轨道作匀加速运动。如初速度为零，经过 2 min后，速度达到 54 km/h。求列车在起点和末点的加速度。

解：　由于列车沿圆弧轨道作匀加速运动，切向加速度 a_t 等于恒量。于是有方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a_t=\text{常量}$$

积分一次，得

$$v=a_t t$$

当 $t=2\ \mathrm{min}=120\ \mathrm{s}$ 时，$v=54\ \mathrm{km/h}=15\ \mathrm{m/s}$，代入上式，求得

$$a_t=\frac{15\ \mathrm{m/s}}{120\ \mathrm{s}}=0.125\ \mathrm{m/s^2}$$

在起点，$v=0$，因此法向加速度等于零，列车只有切向加速度

$$a_t=0.125\ \mathrm{m/s^2}$$

在末点时速度不等于零，既有切向加速度，又有法向加速度，而

$$a_t=0.125\ \mathrm{m/s^2}\qquad a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(15\ \mathrm{m/s})^2}{800\ \mathrm{m}}=0.281\ \mathrm{m/s^2}$$

末点的全加速度大小为

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=0.308\ \mathrm{m/s^2}$$

末点的全加速度与法向的夹角 θ 为

$$\tan\theta=\frac{a_t}{a_n}=0.443,\qquad \theta=23°54'$$

例 6-5　已知点的运动方程为 $x=2\sin 4t\ \mathrm{m}, y=2\cos 4t\ \mathrm{m}, z=4t\ \mathrm{m}$。求点运动轨迹的曲率半径 ρ。

解：　点的速度和加速度沿 x,y,z 轴的投影分别为

$$\dot{x}=8\cos 4t\ ,\qquad \ddot{x}=-32\sin 4t$$
$$\dot{y}=-8\sin 4t\ ,\qquad \ddot{y}=-32\cos 4t$$
$$\dot{z}=4\ ,\qquad \ddot{z}=0$$

点的速度和全加速度大小为

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=\sqrt{80}\ \mathrm{m/s}\qquad a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}=32\ \mathrm{m/s^2}$$

点的切向加速度与法向加速度大小为

$$a_t=\dot{v}=0\qquad a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{80}{\rho}$$

由于

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=32=a_n$$

因此

$$\rho=2.5\ \mathrm{m}$$

这是在半径为 2 m 的圆柱面上的匀速螺旋线运动。点的加速度也是常值，指向此圆柱面的轴线。注意其轨迹的曲率半径并不等于圆柱面的半径。

例 6-6　半径为 r 的轮子沿直线轨道无滑动地滚动(称为纯滚动)，设轮子转角 $\varphi=\omega t$（ω 为常值），如图 6-14 所示。求用直角坐标和弧坐标表示的轮缘上任一点 M 的运动方程，并求

该点的速度、切向加速度及法向加速度。

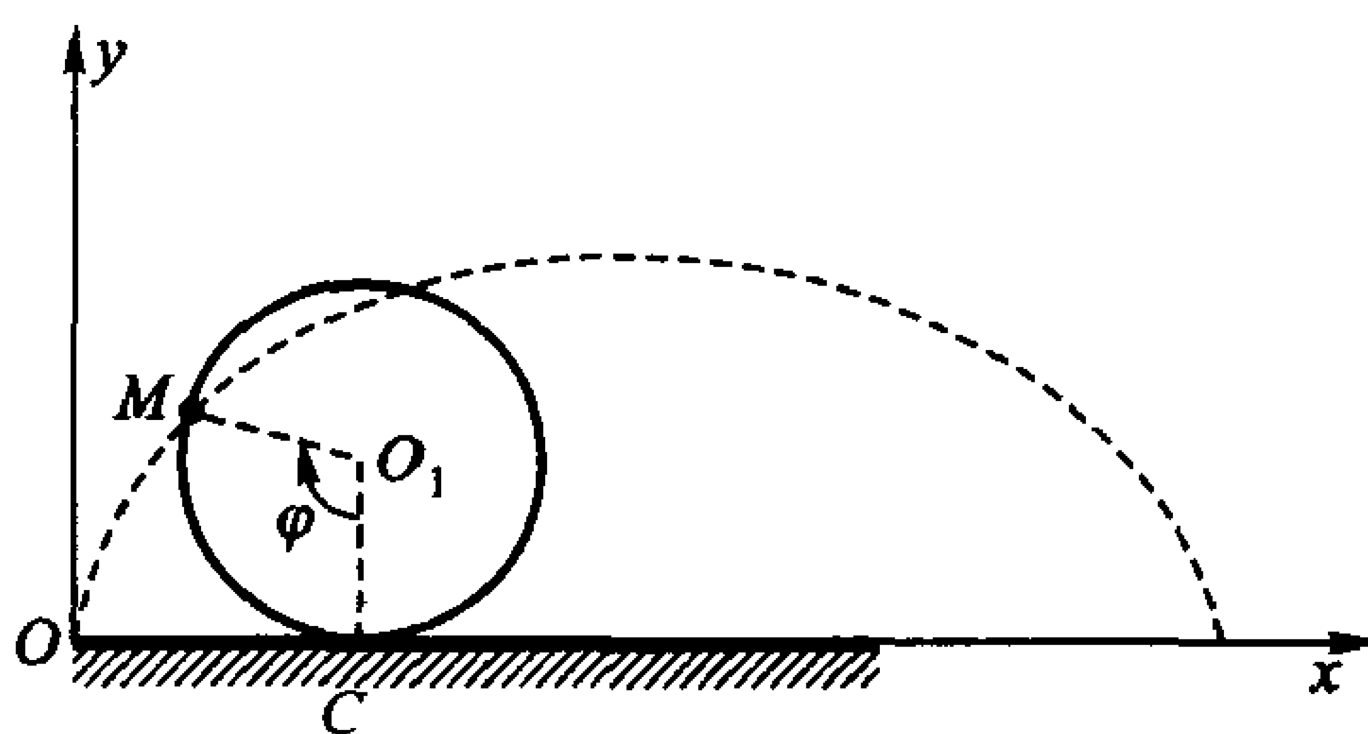


图 6-14

解： 取点 M 与直线轨道的接触点 O 为原点，建立直角坐标系 Oxy（如图 6-14 所示）。当轮子转过 φ 角时，轮子与直线轨道的接触点为 C。由于是纯滚动，有

$$OC = \widehat{MC} = r\varphi = r\omega t$$

则，用直角坐标表示的点 M 的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} x &= OC - O_1M\sin\varphi = r(\omega t - \sin\omega t) \\ y &= O_1C - O_1M\cos\varphi = r(1-\cos\omega t) \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

上式对时间求导，即得点 M 的速度沿坐标轴的投影：

$$v_x = \dot{x} = r\omega(1-\cos\omega t) \qquad v_y = \dot{y} = r\omega\sin\omega t \tag{b}$$

M 点的速度为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega\sqrt{2-2\cos\omega t} = 2r\omega\sin\frac{\omega t}{2}, \quad (0\leqslant\omega t\leqslant 2\pi) \tag{c}$$

运动方程式(a)实际上也是点 M 运动轨迹的参数方程（以 t 为参变量）。这是一个摆线（或称旋轮线）方程，这表明点 M 的运动轨迹是摆线，如图6-14所示。

取点 M 的起始点 O 作为弧坐标原点，将式(c)的速度 v 积分，即得用弧坐标表示的运动方程：

$$s = \int_0^t 2r\omega\sin\frac{\omega t}{2}\mathrm{d}t = 4r\left(1-\cos\frac{\omega t}{2}\right), \qquad (0\leqslant\omega t\leqslant 2\pi)$$

将式(b)再对时间求导，即得加速度在直角坐标系上的投影：

$$a_x = \ddot{x} = r\omega^2\sin\omega t \qquad a_y = \ddot{y} = r\omega^2\cos\omega t \tag{d}$$

由此得到全加速度

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$$

将式(c)对时间求导，即得点 M 的切向加速度

$$a_t = \dot{v} = r\omega^2\cos\frac{\omega t}{2}$$

法向加速度为

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = r\omega^2\sin\frac{\omega t}{2} \tag{e}$$

由于 $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$，于是还可由式(c)及(e)求得轨迹的曲率半径

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{4r^2\omega^2\sin^2\frac{\omega t}{2}}{r\omega^2\sin\frac{\omega t}{2}}=4r\sin\frac{\omega t}{2}$$

再讨论一个特殊情况。当 $t=2\pi/\omega$ 时，$\varphi=2\pi$，这时点 M 运动到与地面相接触的位置。由式(c)知，此时点 M 的速度为零，这表明沿地面作纯滚动的轮子与地面接触点的速度为零。另一方面，由于点 M 全加速度的大小恒为 $r\omega^2$，因此纯滚动的轮子与地面接触点的速度虽然为零，但加速度却不为零。将 $t=2\pi/\omega$ 代入式(d)，得

$$a_x=0,\quad a_y=r\omega^2$$

即接触点的加速度方向向上。

* §6-4　点的速度和加速度在柱坐标和极坐标中的投影

如果动点的运动方程以柱坐标 φ，ρ 和 z 表示，则点的速度和加速度也可在柱坐标系上投影。

设柱坐标的单位矢量为 $\boldsymbol{\rho}_0$，$\boldsymbol{\varphi}_0$ 和 $\boldsymbol{k}$，三个矢量相互垂直，组成右手坐标系，其中 $\boldsymbol{k}$ 沿 z 轴正向，$\boldsymbol{\rho}_0$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 指向 ρ 和 φ 增大的方向，如图 6-15 所示。

动点 M 的矢径 $\boldsymbol{r}$ 可用柱坐标表示，即

$$\boldsymbol{r}=\rho\boldsymbol{\rho}_0+z\boldsymbol{k}$$

点 M 的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\rho}_0+\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}+z\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}$$

因为 $\boldsymbol{k}$ 为恒矢量，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}=0$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\rho}_0}{\Delta t}$$

由图 6-16 可见，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0}{\mathrm{d}t}$ 的大小为

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0}{\mathrm{d}t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\rho}_0}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right|}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right|$$

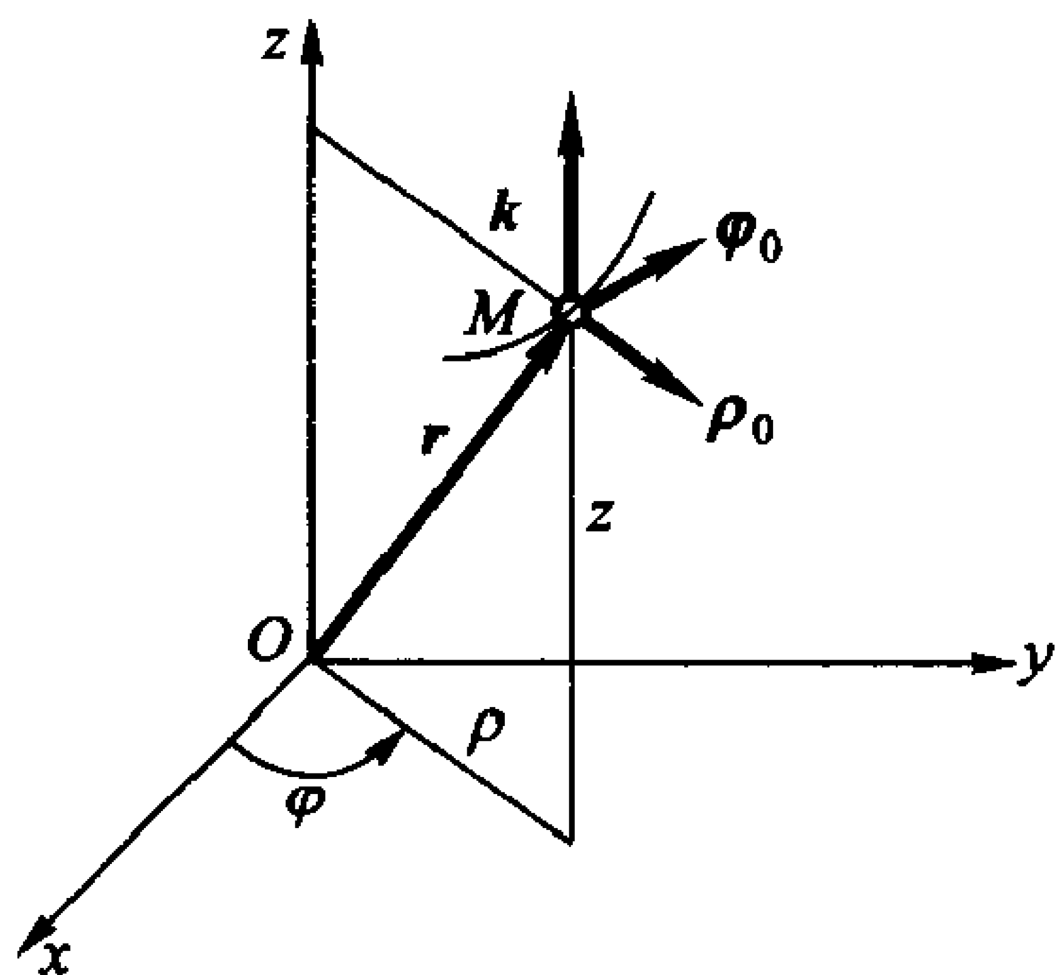


图 6-15

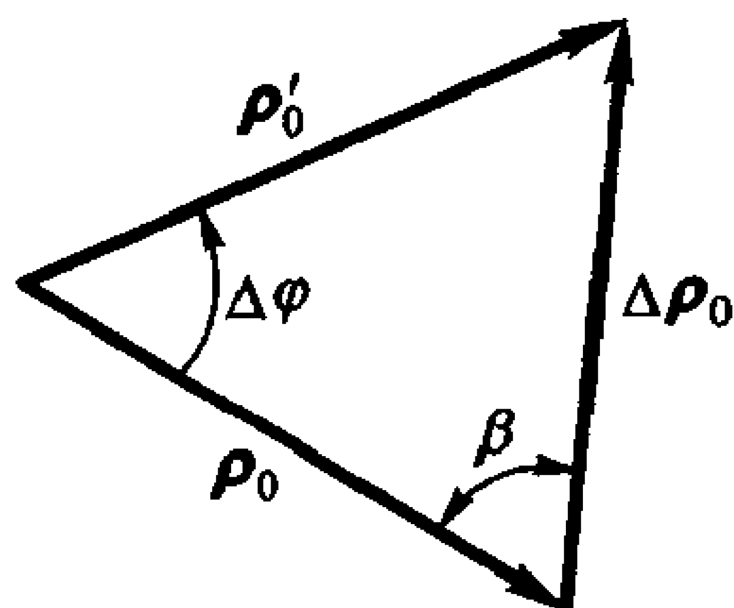


图 6-16

$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0}{\mathrm{d}t}$的方向为 $\Delta\boldsymbol{\rho}_0$ 的极限方向。当 $\Delta t\to 0$ 时，$\beta\to\frac{\pi}{2}$，即$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0}{\mathrm{d}t}$与 $\boldsymbol{\rho}_0$ 垂直，指向旋转的方向，即 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 的方向。因此

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varphi}_0$$

对于在平面内旋转的单位矢量都有相同的结论：单位矢量对时间的一次导数是在旋转平面内的另一矢量，它的大小等于矢量的转角对时间的一阶导数的绝对值，它的方向与原矢量垂直，指向旋转方向。

于是，点 M 的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\rho}_0+\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varphi}_0+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{6-31}$$

点的速度在柱坐标中的投影为

$$v_\rho=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t},\quad v_\varphi=\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},\quad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{6-32}$$

点的加速度等于速度矢对时间的一阶导数，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}&=\left(\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\rho}_0+\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0}{\mathrm{d}t}\right)\\&+\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varphi}_0+\rho\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\varphi}_0+\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_0}{\mathrm{d}t}\right)\\&+\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}\right)\end{aligned}$$

根据在平面内旋转的单位矢量对时间取一次导数的结论，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_0}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\rho}_0,\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varphi}_0$$

将上式代入前式中，整理后可写成

$$\boldsymbol{a}=\left[\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2}-\rho\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\boldsymbol{\rho}_0+\left[2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\rho\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right]\boldsymbol{\varphi}_0+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} \tag{6-33}$$

于是点的加速度在柱坐标中的投影为

$$a_\rho=\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2}-\rho\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2,a_\varphi=2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\rho\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2},a_z=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \tag{6-34}$$

当动点 M 的轨迹为平面曲线时，$v_z=0$，$a_z=0$，于是式(6-32)和(6-34)中的前两式就是点的速度和加速度在极坐标中的投影式。

例 6-7 图 6-17 中的凸轮绕 O 轴匀速转动，使杆 AB 升降。欲使杆 AB 匀速上升，凸轮上的 CD 段轮廓线应是什么曲线？

解： 以凸轮为参考系，取极坐标研究杆上点 A 的运动。

根据题意有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega(\text{常数})\quad \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=v(\text{常数})$$

将上式对时间积分一次，并设点 C 为动点 A 在$t=0$时的初始位置，于是得以极坐标表示的点 A 相对于凸轮的运动方程：

$$\varphi=\omega t\qquad \rho=R+vt$$

消去时间 t，得点 A 在凸轮上的轨迹方程

$$\rho=R+\frac{v\varphi}{\omega}$$

凸轮转动，杆 AB 匀速上升，v，ω 为常值，上式为阿基米德螺旋线。

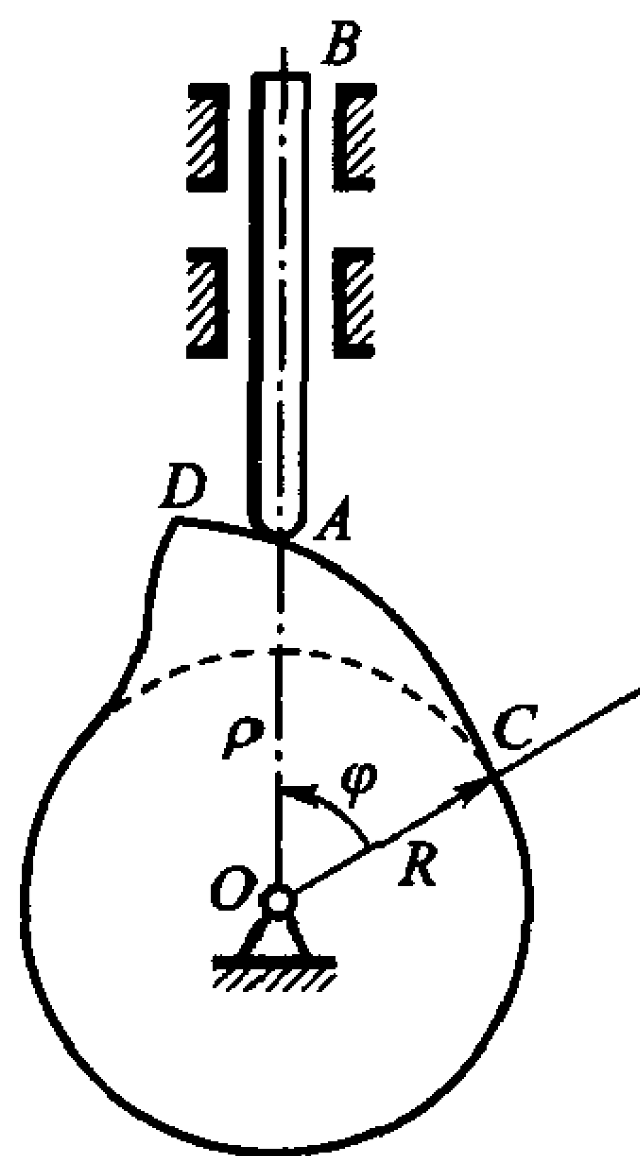


图 6-17

*§6-5 点的速度和加速度在球坐标中的投影

当动点的运动方程以球坐标表示，则点的速度和加速度可向球坐标系投影。

设球坐标的单位矢量为 $\boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{\theta}_0$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_0$，三个矢量相互垂直形成右手坐标系，其中 $\boldsymbol{r}_0$ 沿矢径 $\boldsymbol{r}$ 的方向，$\boldsymbol{\theta}_0$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 分别指向角 θ 和 φ 增大的方向，如图 6-18 所示。

因为在推导速度和加速度的公式时都将遇到单位矢量的导数，因此先求出 $\boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{\theta}_0$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 对时间的一阶导数。

从图中易见：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_0&=\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k}\\\boldsymbol{\varphi}_0&=-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{\theta}_0&=\boldsymbol{\varphi}_0\times\boldsymbol{r}_0=\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}-\sin\theta\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\} \tag{6-35}$$

将它们对时间取一阶导数，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}&=[\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}-\sin\theta\boldsymbol{k}]\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\\&\quad+[-\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{i}+\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{j}]\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

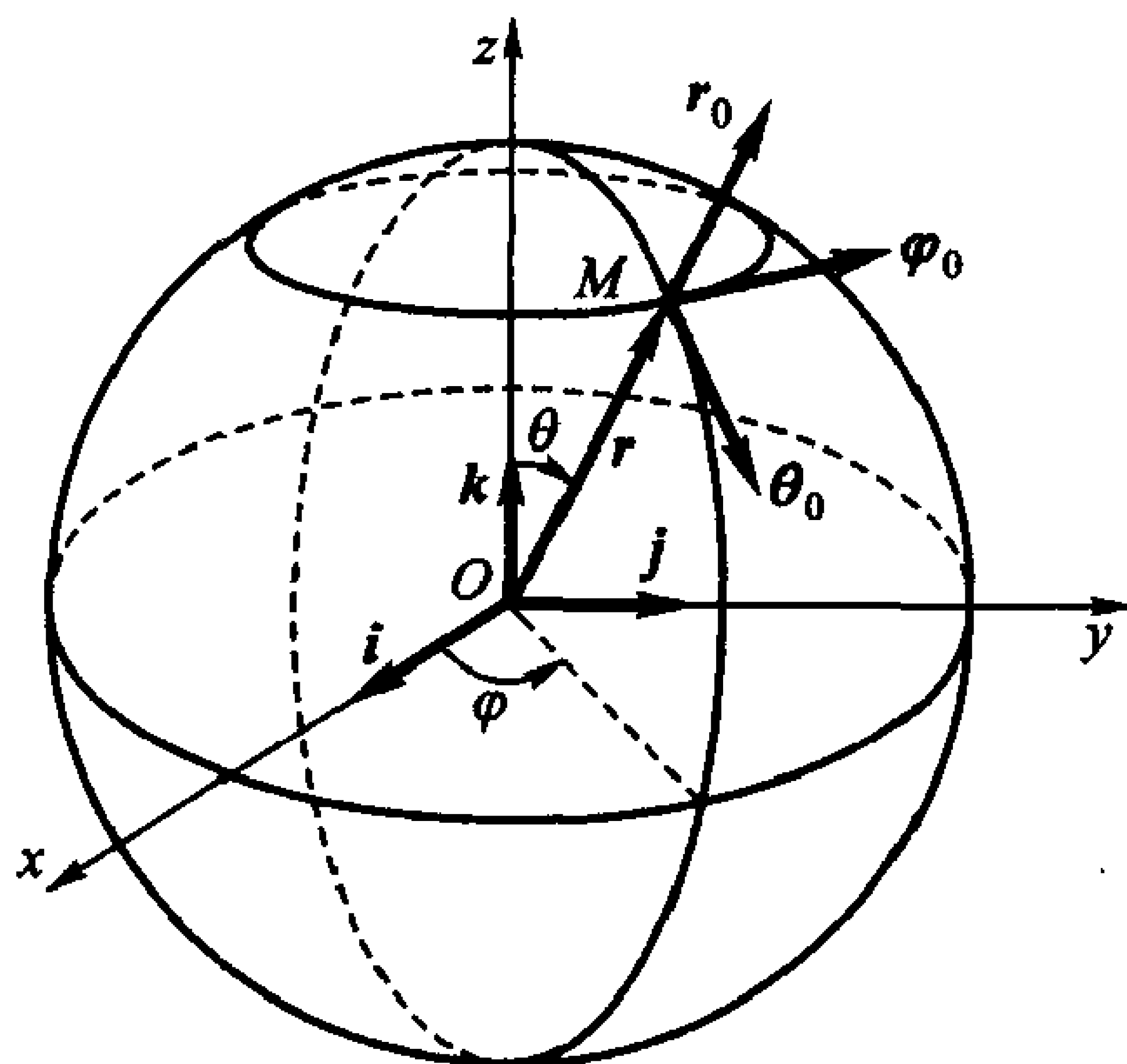


图 6-18

由式(6-35)知,上式第一个方括号内为 $\boldsymbol{\theta}_0$,第二个方括号内为 $\sin\theta\cdot\boldsymbol{\varphi}_0$,于是得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\theta}_0+\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varphi}_0 \tag{6-36}$$

同样可求得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_0}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}_0+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\cos\theta\boldsymbol{\varphi}_0 \tag{6-37}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_0}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\sin\theta\,\boldsymbol{r}_0-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\cos\theta\,\boldsymbol{\theta}_0 \tag{6-38}$$

现在来推导速度和加速度的公式。

动点 M 的速度等于矢径 $\boldsymbol{r}$ 对时间的一阶导数,即

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

用球坐标表示矢径 $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{r}_0$$

于是有

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}_0+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}$$

将式(6-36)代入上式中,得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}_0+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\theta}_0+r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varphi}_0 \tag{6-39}$$

于是点的速度在球坐标中的投影为

$$v_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\ v_\theta=r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},\ v_\varphi=r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{6-40}$$

点的加速度等于速度矢对时间的一阶导数。仿照上述推导过程，得点的加速度在球坐标中的投影为

$$
\left.\begin{aligned}
a_r &= \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 \sin^2\theta \\
a_\theta &= r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 \sin\theta\cos\theta \\
a_\varphi &= r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\sin\theta + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\sin\theta + 2r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\theta
\end{aligned}\right\} \tag{6-41}
$$

小　　结

1. 观察物体的运动必须相对某一参考体。

2. 点的运动方程为动点在空间的几何位置随时间变化的规律。一个点相对于同一个参考体，若采用不同的坐标系，将有不同形式的运动方程。如：

矢量形式：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$

直角坐标形式：$x = f_1(t)$，$y = f_2(t)$，$z = f_3(t)$

弧坐标形式：$s = f(t)$

极坐标形式：$\rho = f_1(t)$，$\varphi = f_2(t)$

等等。

3. 轨迹为动点在空间运动时所经过的一条连续曲线。轨迹方程可由运动方程消去时间 t 得到。

4. 点的速度和加速度都是矢量。

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}, \quad \boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}$$

(1) 以直角坐标轴上的分量表示

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

(2) 以自然坐标的分量表示

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\mathrm{t} + \boldsymbol{a}_\mathrm{n} = a_\mathrm{t}\boldsymbol{\tau} + a_\mathrm{n}\boldsymbol{n}$$

$$a_\mathrm{t} = \dot{v} = \ddot{s}, \quad a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{\rho}, \quad a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2}$$

(3) 以极坐标中的分量表示

$$\boldsymbol{v} = v_\rho \boldsymbol{\rho}_0 + v_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0$$

$$v_\rho = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}, \quad v_\varphi = \rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{a} = a_\rho \boldsymbol{\rho}_0 + a_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0$$

$$a_\rho = \frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2} - \rho\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2, \qquad a_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)$$

5. 点的切向加速度只反映速度大小的变化，法向加速度只反映速度方向的变化。当点的速度与切向加速度方向相同时，点作加速运动；反之，点作减速运动。

6. 几种特殊运动的特点

(1) 直线运动　$a_n \equiv 0$,　$\rho \to \infty$

(2) 圆周运动　$\rho =$ 常数

(3) 匀速运动　$v =$ 常数，$a_t \equiv 0$

(4) 匀变速运动

$$a_t = 常数, v = v_0 + a_t t, s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_t t^2$$

思　考　题

6-1　$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$是否相同？

6-2　点沿曲线运动，图 6-19 所示各点所给出的速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 哪些是可能的？哪些是不可能的？

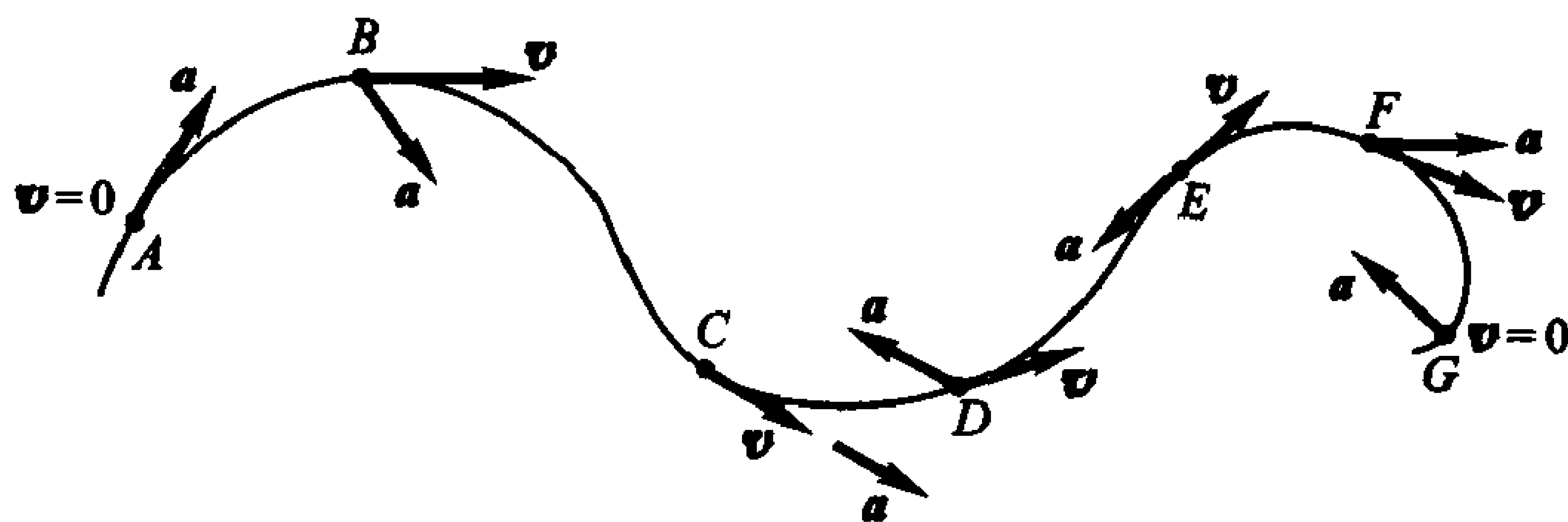


图 6-19

6-3　点 M 沿螺线自外向内运动，如图 6-20 所示。它走过的弧长与时间的一次方成正比，问点的加速度是越来越大、还是越来越小？点 M 越跑越快、还是越跑越慢？

6-4　当点作曲线运动时，点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 是恒矢量，如图 6-21 所示。问点是否作匀变速运动？

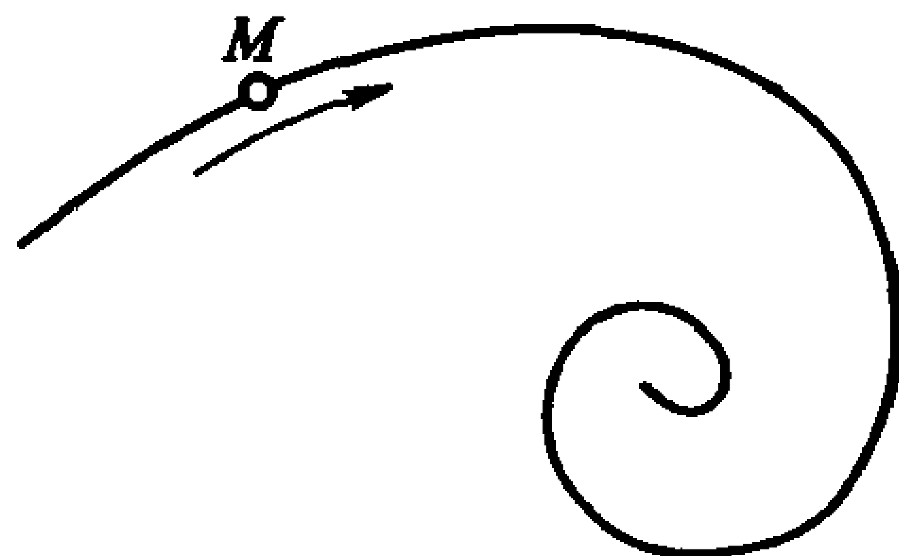


图 6-20

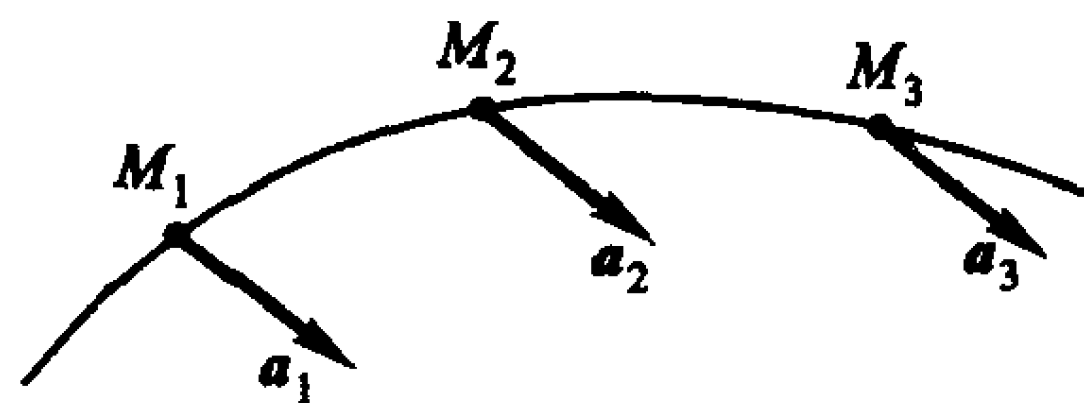


图 6-21

6-5 作曲线运动的两个动点，初速度相同、运动轨迹相同、运动中两点的法向加速度也相同。判断下述说法是否正确：

(1) 任一瞬时两动点的切向加速度必相同；

(2) 任一瞬时两动点的速度必相同；

(3) 两动点的运动方程必相同。

6-6 动点在平面内运动，已知其运动轨迹 $y=f(x)$ 及其速度在 x 轴方向的分量 $\boldsymbol{v}_x$。判断下述说法是否正确：

(1) 动点的速度 $\boldsymbol{v}$ 可完全确定。

(2) 动点的加速度在 x 轴方向的分量 $\boldsymbol{a}_x$ 可完全确定。

(3) 当 $v_x \neq 0$ 时，一定能确定动点的速度 $\boldsymbol{v}$、切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$、法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 及全加速度 $\boldsymbol{a}$。

6-7 下述各种情况下，动点的全加速度 $\boldsymbol{a}$、切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 和法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 三个矢量之间有何关系？

(1) 点沿曲线作匀速运动；

(2) 点沿曲线运动，在该瞬时其速度为零；

(3) 点沿直线作变速运动；

(4) 点沿曲线作变速运动。

6-8 点作曲线运动时，下述说法是否正确：

(1) 若切向加速度为正，则点作加速运动；

(2) 若切向加速度与速度符号相同，则点作加速运动；

(3) 若切向加速度为零，则速度为常矢量。

***6-9** 在极坐标中，$v_r=\dot{r}$，$v_\theta=r\dot{\theta}$ 分别代表在极径方向及与极径垂直方向（极角 θ 方向）的速度。但为什么沿这两个方向的加速度为

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2,\quad a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$$

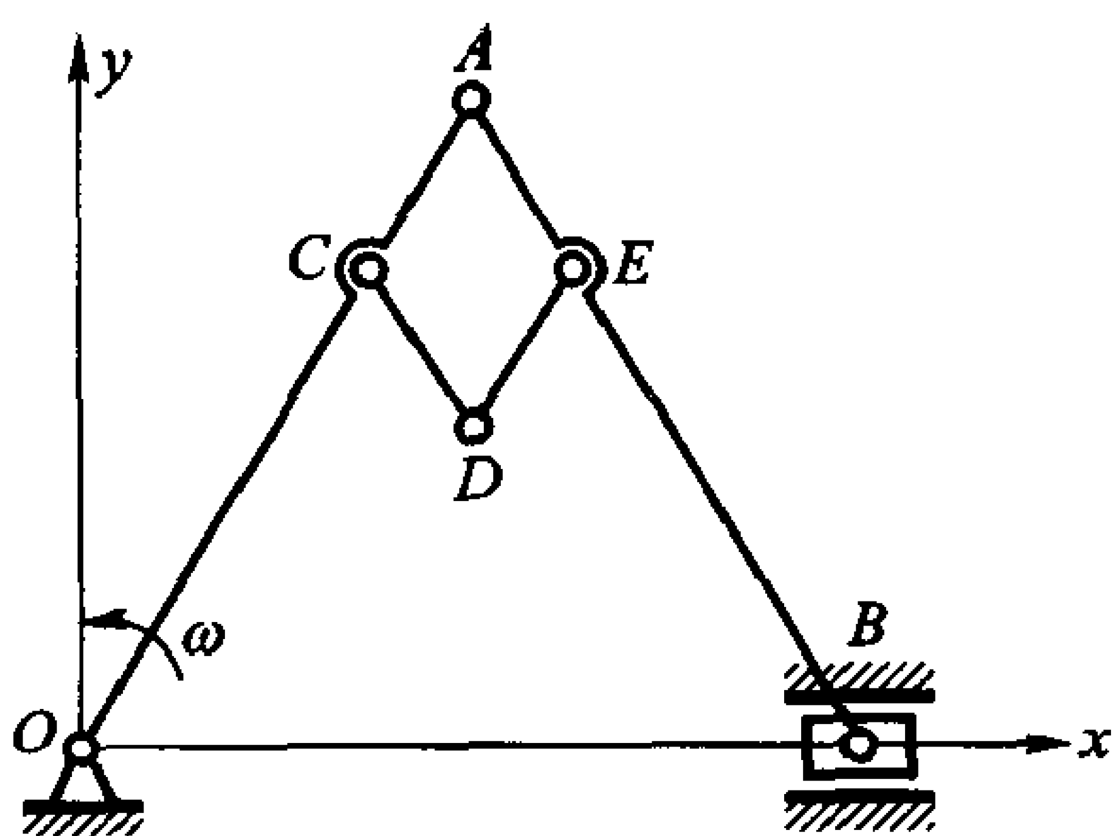
试分析 a_r 中的 $-r\dot{\theta}^2$ 和 a_θ 中的 $\dot{r}\dot{\theta}$ 出现的原因和它们的几何意义。

习　题

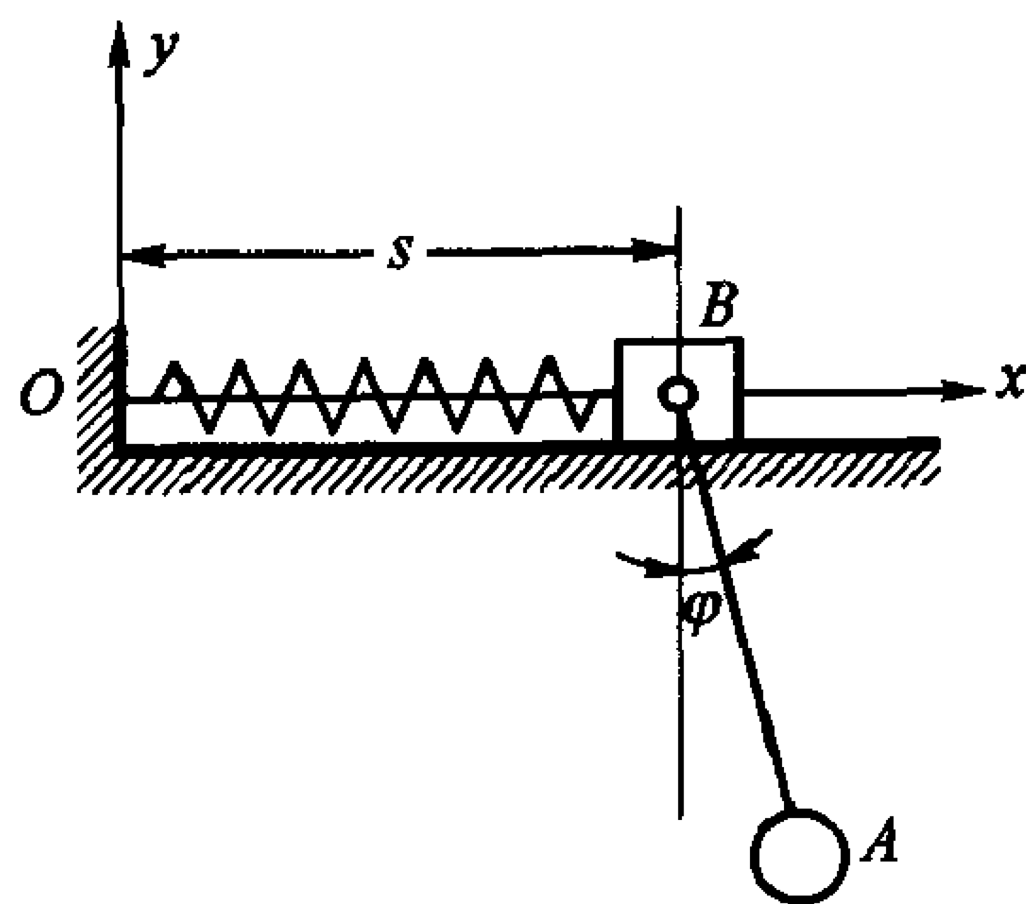
6-1 图示曲线规尺的各杆，长为 $OA=AB=200$ mm，$CD=DE=AC=AE=50$ mm。如杆 OA 以等角速度 $\omega=\frac{\pi}{5}$ rad/s 绕 O 轴转动，并且当运动开始时，杆 OA 水平向右。求尺上点 D 的运动方程和轨迹。

6-2 如图所示，杆 AB 长 l，以等角速度 ω 绕点 B 转动，其转动方程为 $\varphi=\omega t$。而与杆连接的滑块 B 按规律 $s=a+b\sin\omega t$ 沿水平线作谐振动，其中 a 和 b 均为常数。求点 A 的轨迹。

6-3 如图所示，半圆形凸轮以等速 $v_0=0.01$ m/s 沿水平方向向左运动，而使活塞杆 AB 沿铅直方向运动。当运动开始时，活塞杆 A 端在凸轮的最高点上。如凸轮的半径 $R=80$ mm，求活塞 B 相对于地面和相对于凸轮的运动方程和速度。



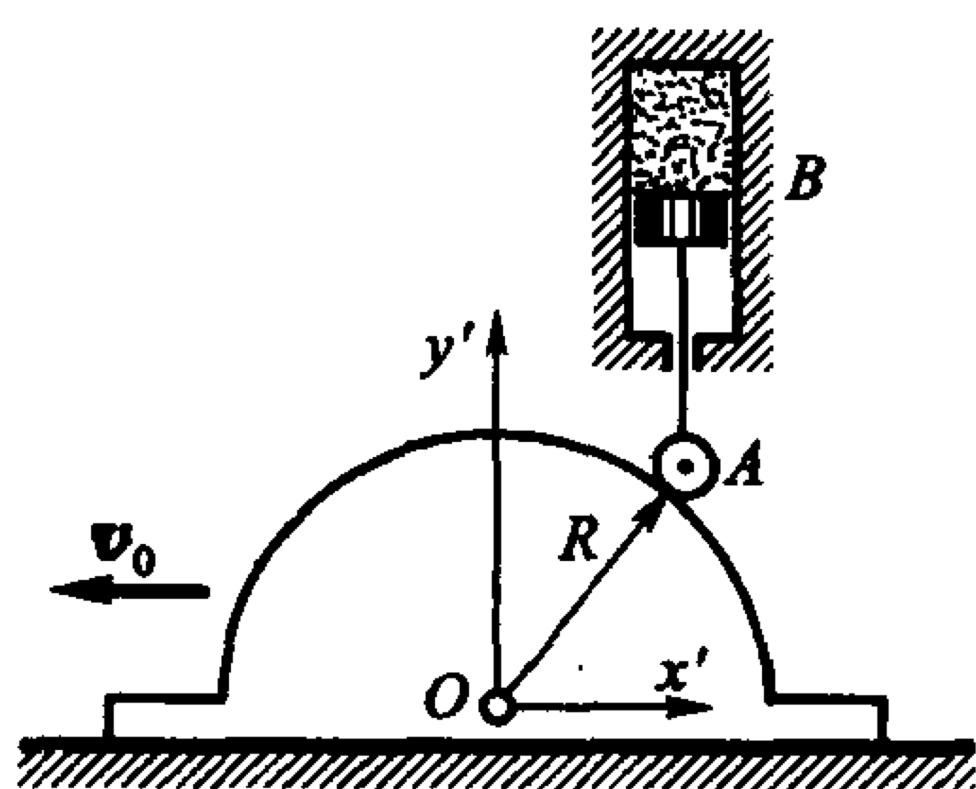
题 6－1 图



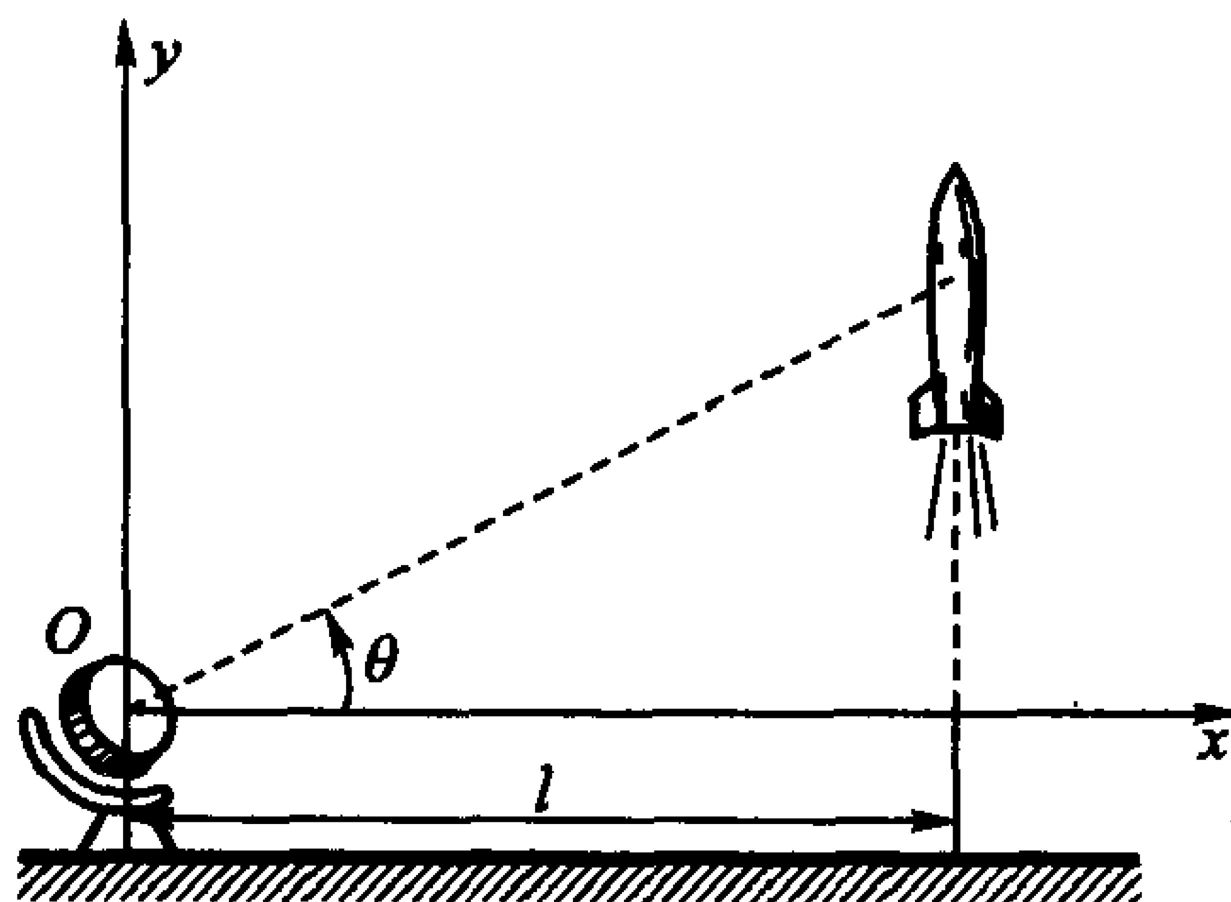
题 6－2 图

6－4　图示雷达在距离火箭发射台为 l 的 O 处观察铅直上升的火箭发射，测得角 θ 的规律为 $\theta=kt$（k 为常数）。写出火箭的运动方程并计算当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 和 $\frac{\pi}{3}$ 时，火箭的速度和加速度。

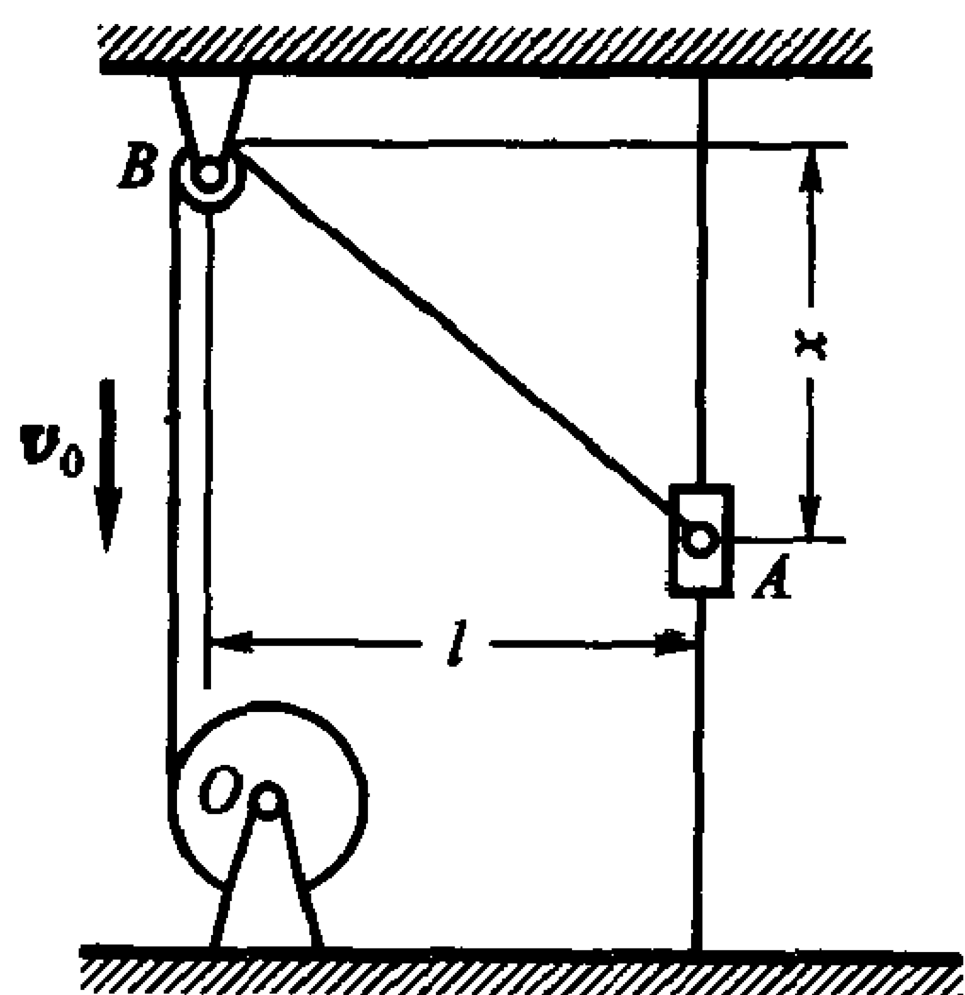
6－5　套管 A 由绕过定滑轮 B 的绳索牵引而沿导轨上升，滑轮中心到导轨的距离为 l，如图所示。设绳索以等速 v_0 拉下，忽略滑轮尺寸。求套管 A 的速度和加速度与距离 x 的关系式。



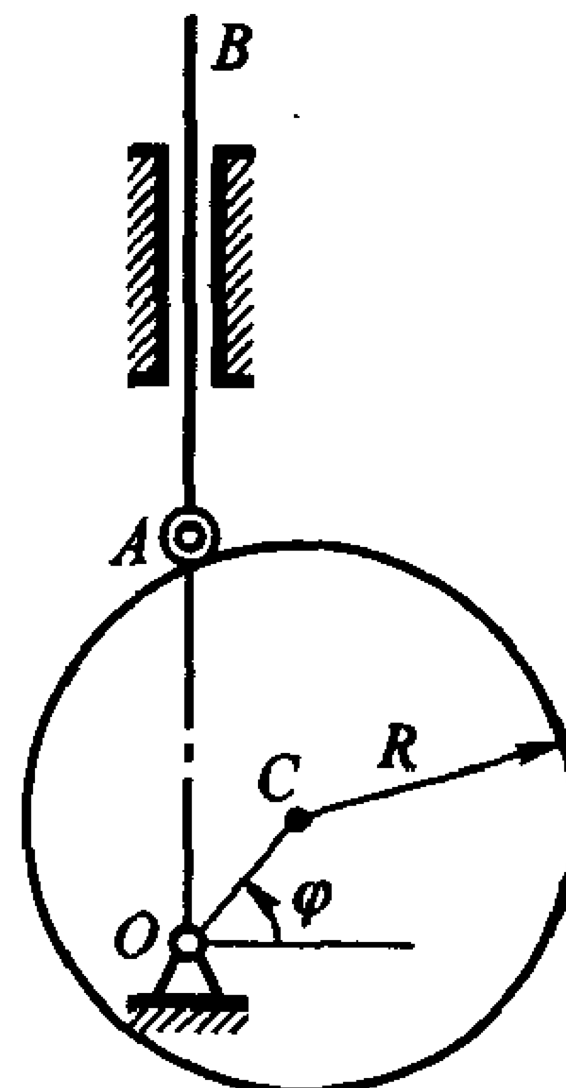
题 6－3 图



题 6－4 图



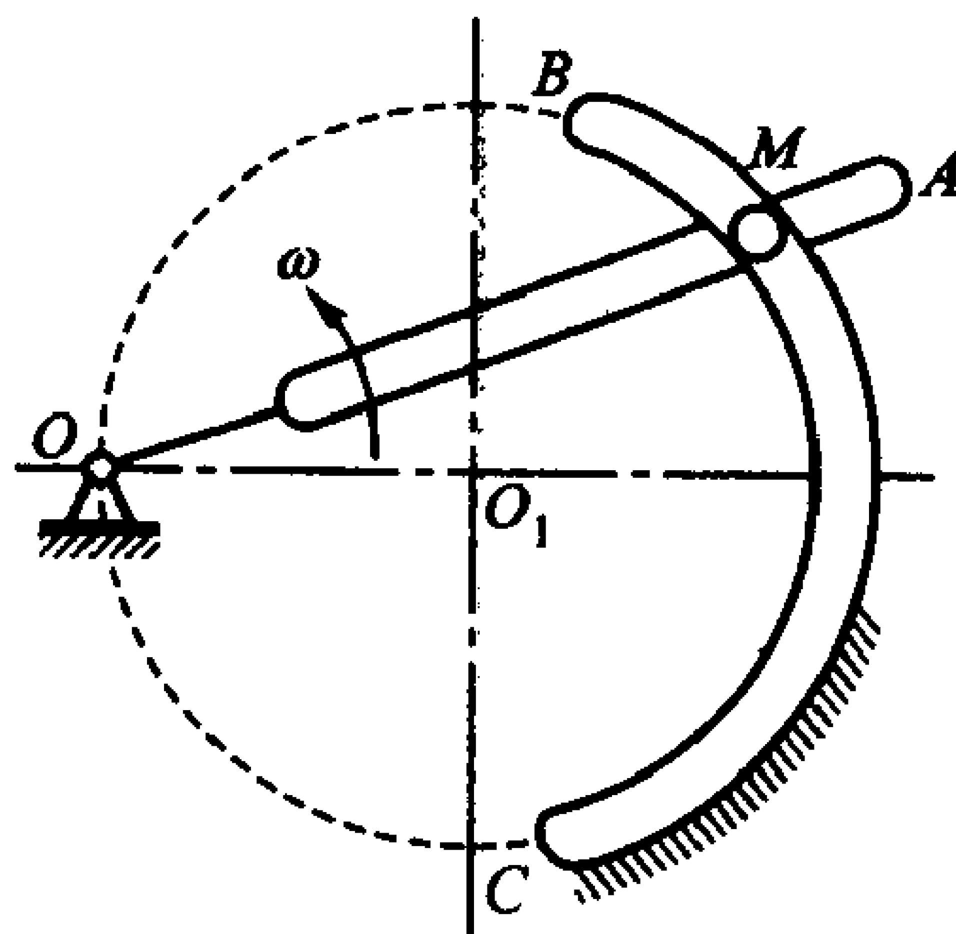
题 6－5 图



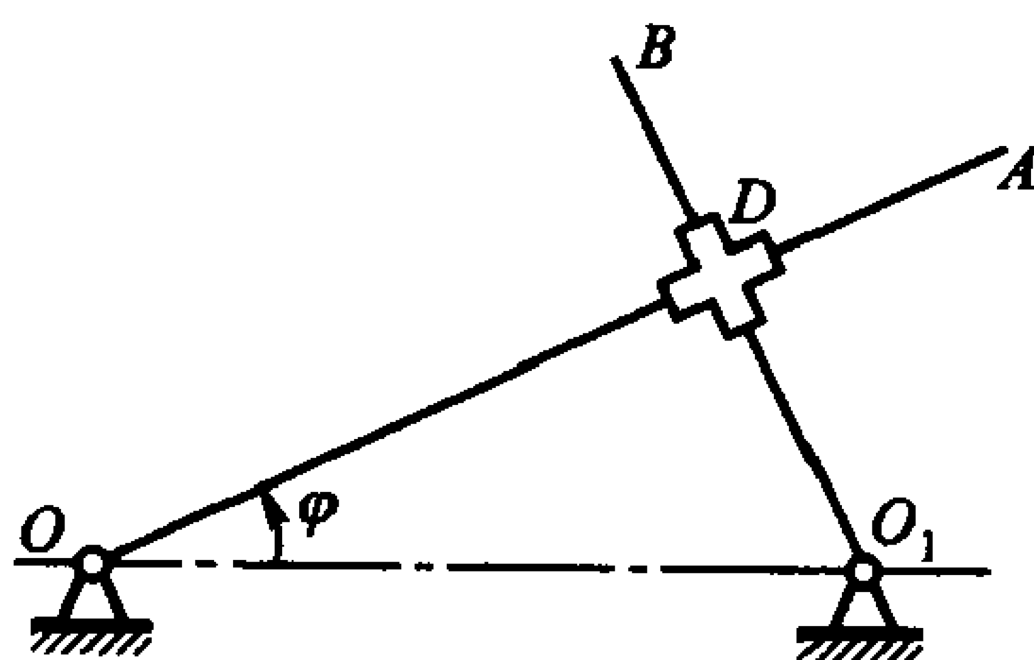
题 6－6 图

6-6 如图所示，偏心凸轮半径为 R，绕 O 轴转动，转角 $\varphi=\omega t$（ω 为常量），偏心距 $OC=e$，凸轮带动顶杆 AB 沿铅垂直线作往复运动。求顶杆的运动方程和速度。

6-7 图示摇杆滑道机构中的滑块 M 同时在固定的圆弧槽 BC 和摇杆 OA 的滑道中滑动。如弧 BC 的半径为 R，摇杆 OA 的轴 O 在弧 BC 的圆周上。摇杆绕 O 轴以等角速度 ω 转动，当运动开始时，摇杆在水平位置。分别用直角坐标法和自然法给出点 M 的运动方程，并求其速度和加速度。



题 6-7 图

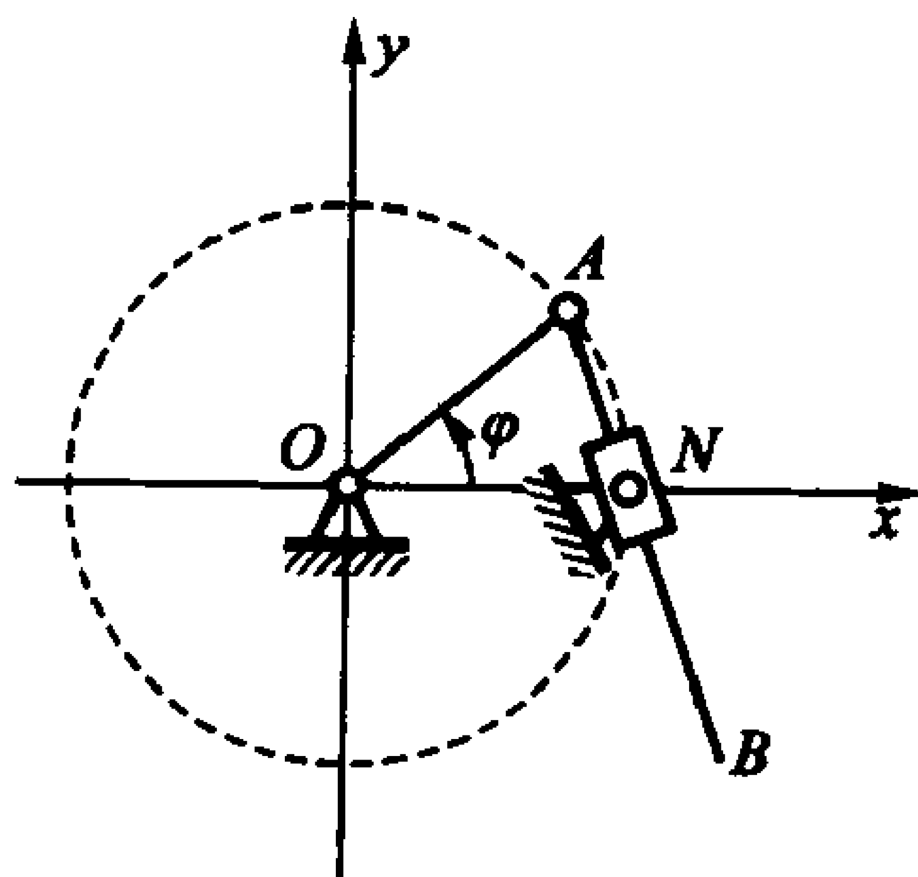


题 6-8 图

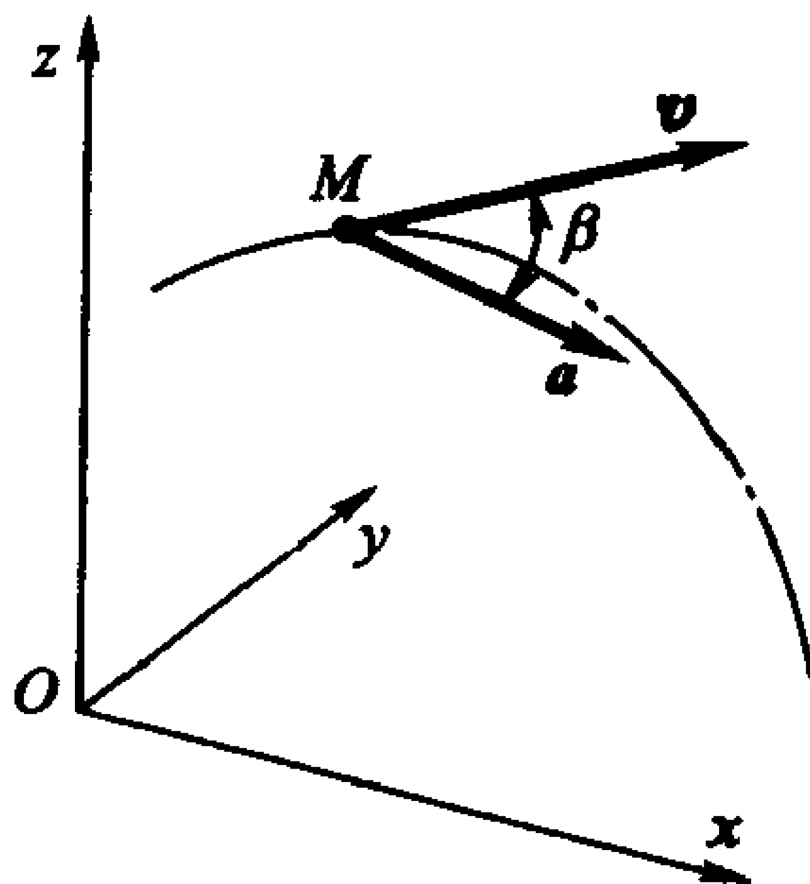
6-8 如图所示，OA 和 O_1B 两杆分别绕 O 和 O_1 轴转动，用十字形滑块 D 将两杆连接。在运动过程中，两杆保持相交成直角。已知：$OO_1=a$；$\varphi=kt$，其中 k 为常数。求滑块 D 的速度和相对于 OA 的速度。

6-9 曲柄 OA 长 r，在平面内绕 O 轴转动，如图所示。杆 AB 通过固定于点 N 的套筒与曲柄 OA 铰接于点 A。设 $\varphi=\omega t$，杆 AB 长 $l=2r$，求点 B 的运动方程、速度和加速度。

6-10 点沿空间曲线运动，在点 M 处其速度为 $\boldsymbol{v}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，加速度 $\boldsymbol{a}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 的夹角 $\beta=30^\circ$，且 $a=10\ \mathrm{m/s^2}$。求轨迹在该点密切面内的曲率半径 ρ 和切向加速度 a_t。



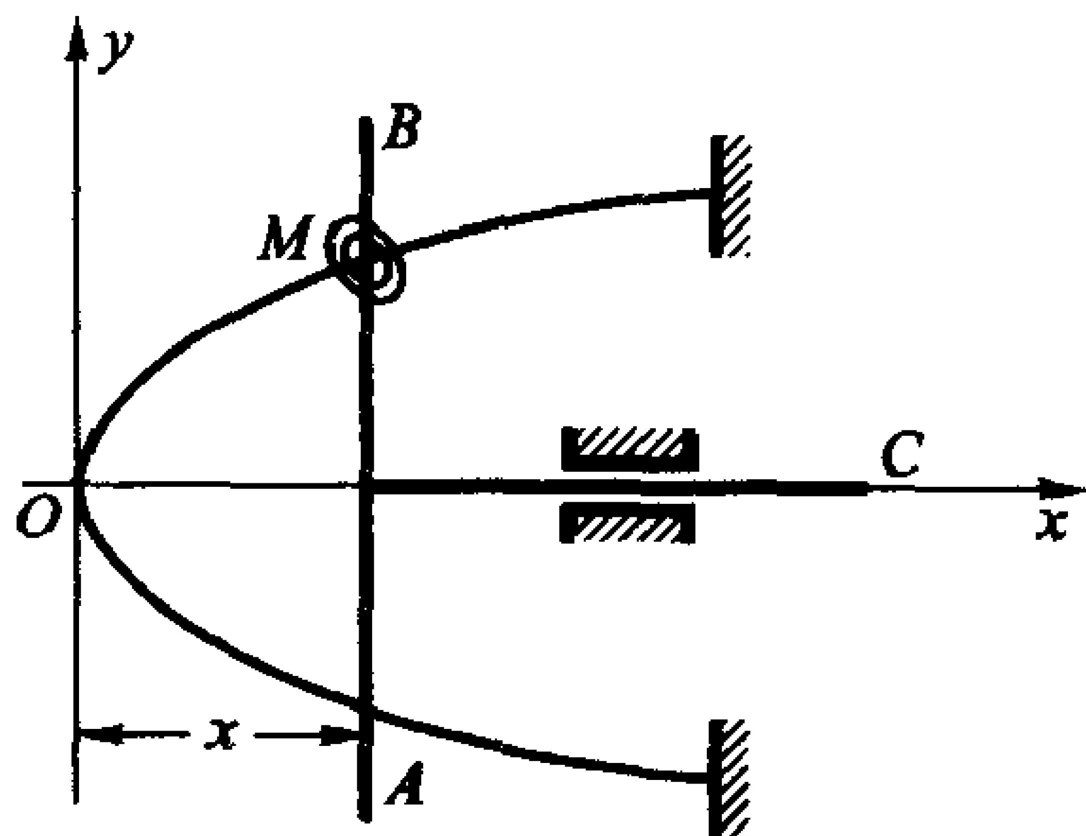
题 6-9 图



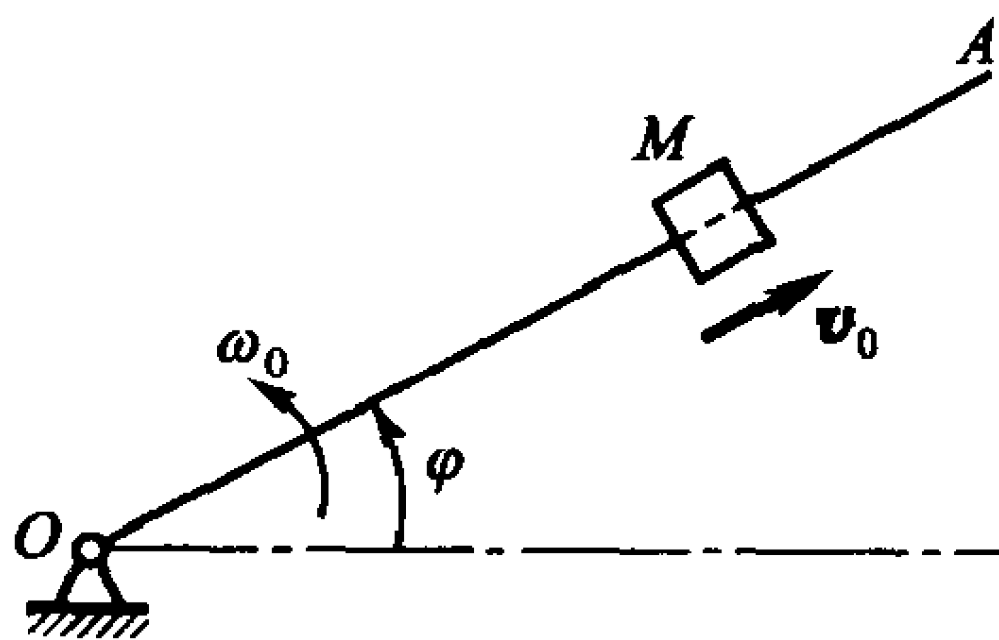
题 6-10 图

6-11 小环 M 由作平移的丁字形杆 ABC 带动，沿着图示曲线轨道运动。设杆 ABC 的速度 $v=$ 常数，曲线方程为 $y^2=2px$。求环 M 的速度和加速度的大小（写成杆的位移 x 的函数）。

**6-12 如图所示，一直杆以匀角速度 ω_0 绕其固定端 O 转动，沿此杆有一滑块以匀速 v_0 滑动。设运动开始时，杆在水平位置，滑块在点 O。求滑块的轨迹（以极坐标表示）。



题 6-11 图

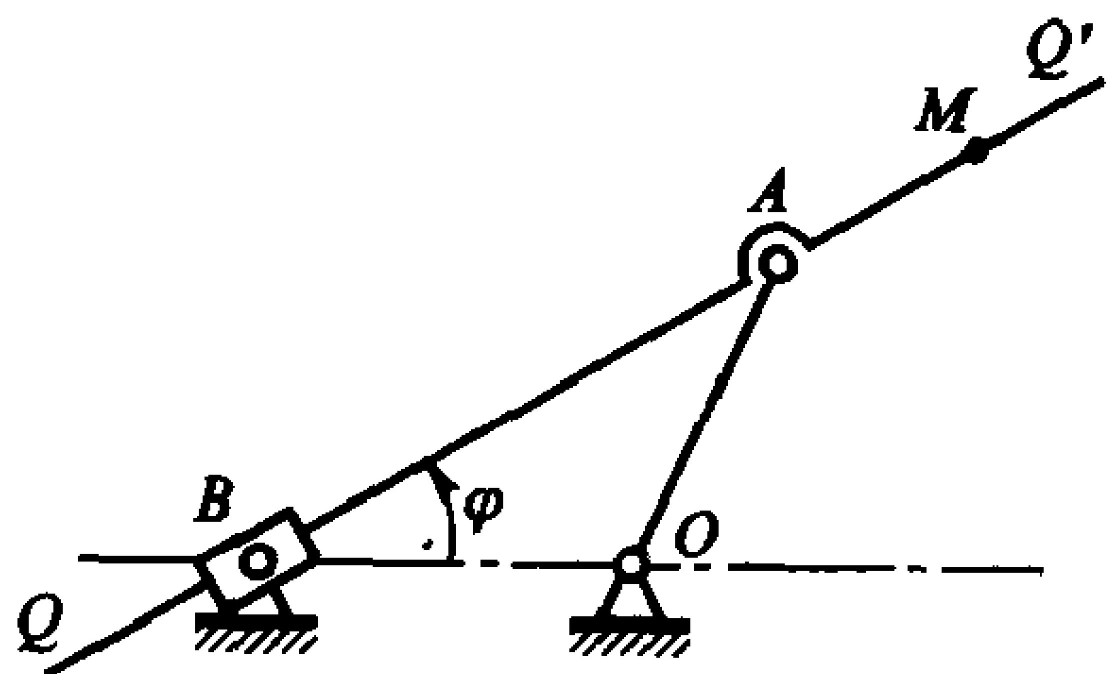


题 6-12 图

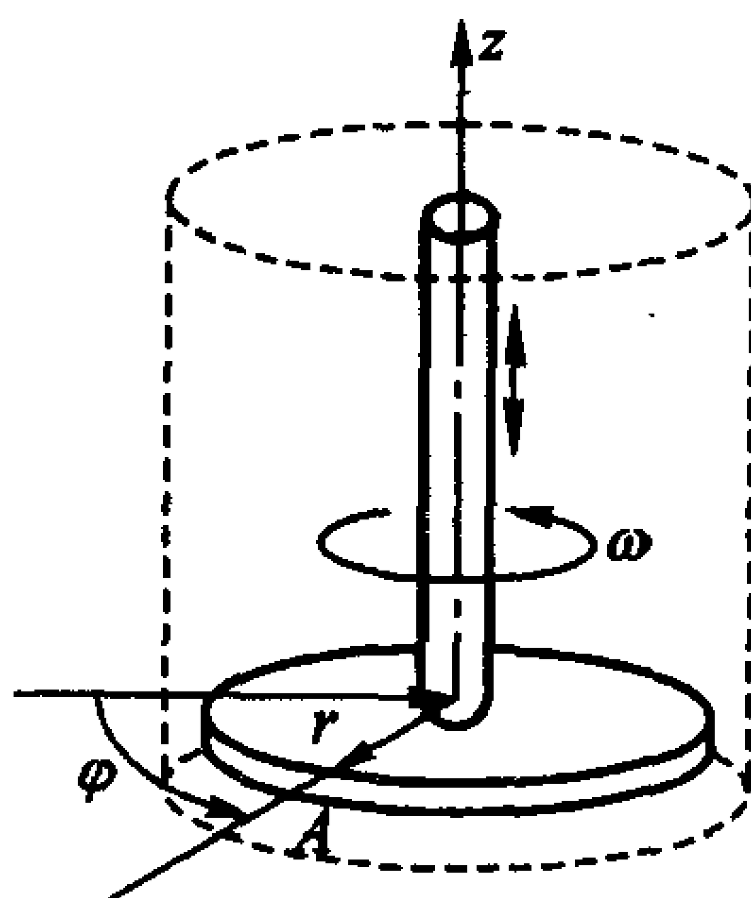
**6-13 如果上题中的滑块 M 沿杆运动的速度与距离 OM 成正比，比例常数为 k。求滑块的轨迹（以极坐标 r,φ 表示，假定 $\varphi=0$ 时 $r=r_0$）。

**6-14 螺线画规，如图所示，杆 QQ' 和曲柄 OA 铰接，并穿过固定于点 B 的套筒。取点 B 为极坐标系的极点，直线 BO 为极轴，已知极角 $\varphi=kt$（k 为常数），$BO=AO=a$，$AM=b$。求点 M 的极坐标形式的运动方程、轨迹方程以及速度和加速度的大小。

**6-15 搅拌器沿 z 轴周期性上下运动，$z=z_0\sin 2\pi ft$，并绕 z 轴转动，转角 $\varphi=\omega t$。设搅拌轮半径为 r，求轮缘上点 A 的最大加速度。



题 6-14 图

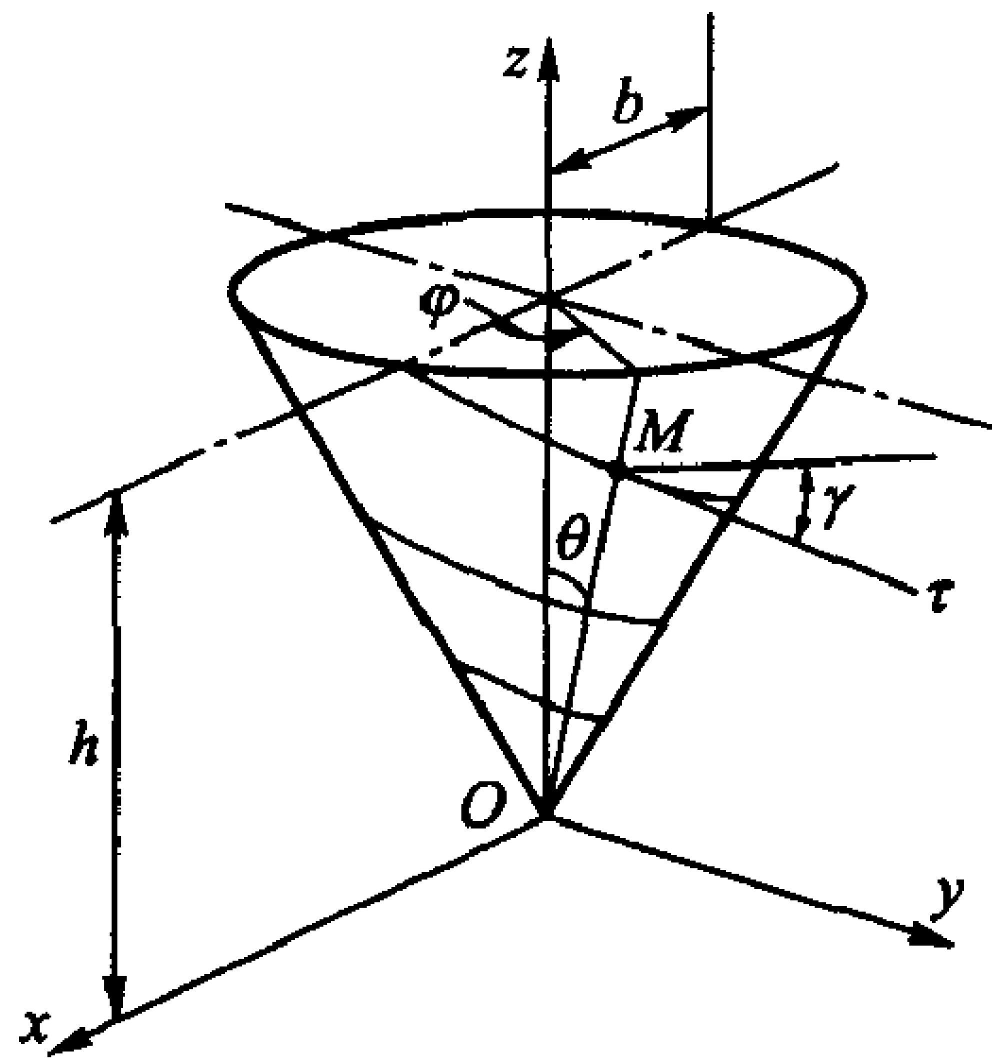


题 6-15 图

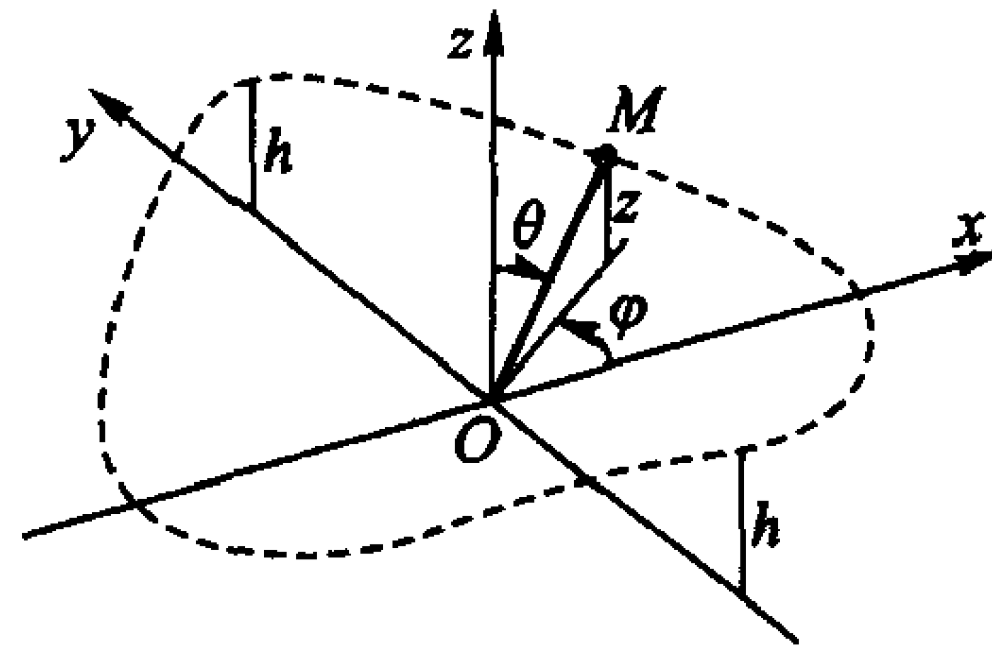
**6-16 点 M 沿正圆锥面上的螺旋轨道向下运动。正圆锥的底半径为 b，高为 h，半顶角为 θ，如图所示。螺旋线上任意点的切线与该点圆锥面的水平切线的夹角 γ 是常数，且点 M 运动时，其柱坐标角对时间的导数 $\dot{\varphi}$ 保持为常数。求在任意角 φ 时，加速度在柱坐标中的投影 a_ρ。

** 此符号表示与带“*”节对应的习题

**6-17　公园游戏车 M 固结在长为 R 的臂杆 OM 上，臂杆 OM 绕铅垂轴 z 以恒定的角速度 $\dot{\varphi}=\omega$ 转动，小车 M 的高度 z 与转角 φ 的关系为 $z=\frac{h}{2}(1-\cos 2\varphi)$。求 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 时，小车 M 在球坐标系的各速度分量：v_r，v_θ，v_φ。



题 6-16 图



题 6-17 图

第七章　刚体的简单运动

刚体是由无数点组成的，在点的运动学基础上可研究刚体的运动，研究刚体整体的运动及其与刚体上各点运动之间的关系。

本章将研究刚体的两种简单运动——平移和定轴转动。这是工程中最常见的运动，也是研究复杂运动的基础。

§7－1　刚体的平行移动

工程中某些物体的运动，例如：汽缸内活塞的运动、车床上刀架的运动等等，它们有一个共同的特点，即如果在物体内任取一直线段，在运动过程中这条直线段始终与它的最初位置平行，这种运动称为平行移动，简称**平移**。

设刚体作平移。如图 7－1 所示，在刚体内任选两点 A 和 B，令点 A 的矢径为 $\boldsymbol{r}_A$，点 B 的矢径为 $\boldsymbol{r}_B$，则两条矢端曲线就是两点的轨迹。由图可知

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_B + \overrightarrow{BA}$$

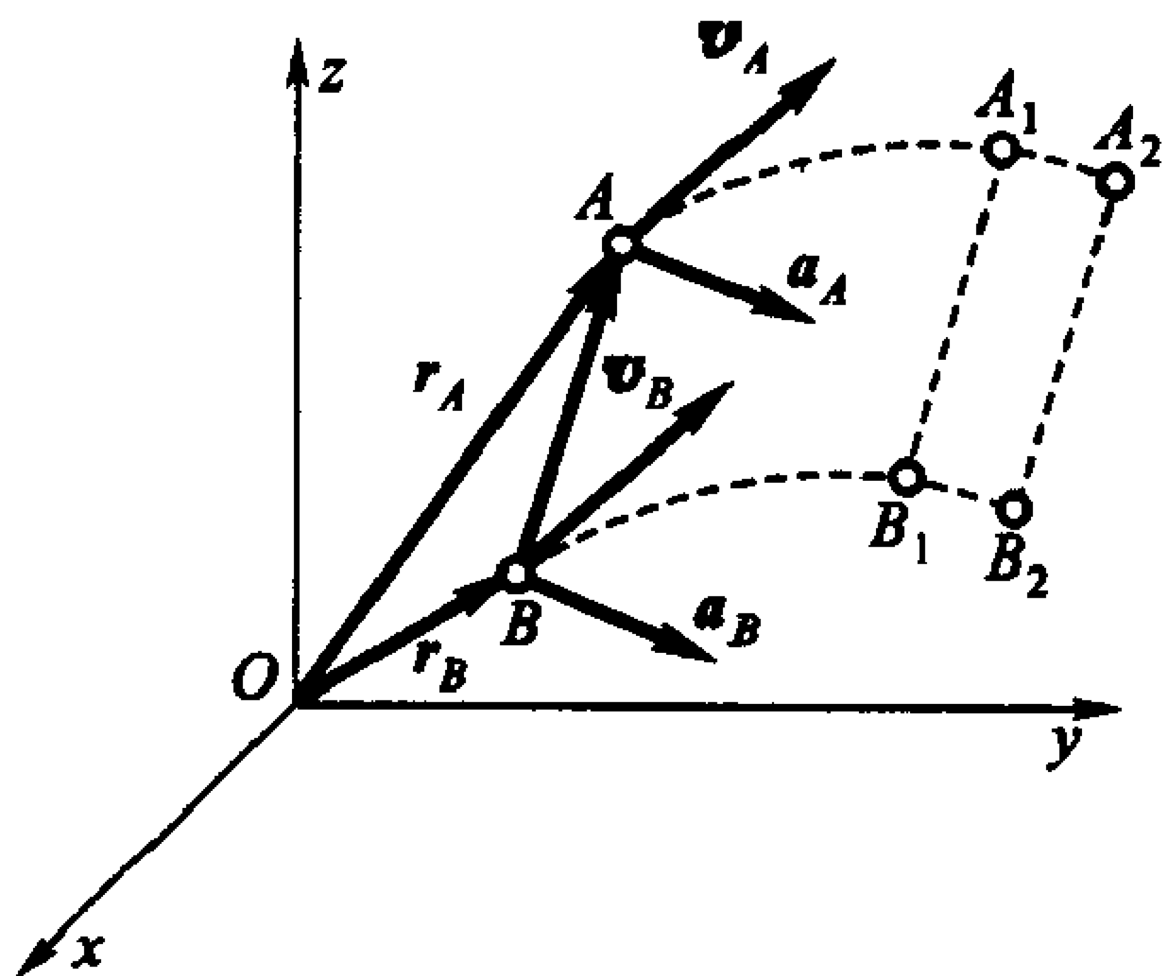


图 7－1

当刚体平移时，线段 AB 的长度和方向都不改变，所以$\overrightarrow{BA}$是恒矢量。因此只要把点 B 的轨迹沿$\overrightarrow{BA}$方向平行搬移一段距离 BA，就能与点 A 的轨迹完全重合。刚体平移时，其上各点的轨迹不一定是直线，也可能是曲线，但是它们的形状是完全相同的。

把上式对时间 t 求导数，因为恒矢量$\overrightarrow{BA}$的导数等于零，于是得

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B \qquad \boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_B$$

其中 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 分别表示点 A 和点 B 的速度，$\boldsymbol{a}_A$ 和 $\boldsymbol{a}_B$ 分别表示它们的加速度。因为点 A 和点 B 是任意选择的，因此可得结论：当刚体平行移动时，其上各点的轨迹形状相同；在每一瞬时，各点的速度相同，加速度也相同。

因此，研究刚体的平移，可以归结为研究刚体内任一点（如质心）的运动，也就是归结为前一章里所研究过的点的运动学问题。

§7-2　刚体绕定轴的转动

工程中最常见的齿轮、机床的主轴、电机的转子等，它们都有一条固定的轴线，物体绕此固定轴转动。显然，只要轴线上有两点是不动的，这轴线就是固定的。刚体在运动时，其上或其扩展部分有两点保持不动，则这种运动称为刚体绕定轴的转动，简称刚体的**转动**。通过这两个固定点的一条不动的直线，称为刚体的**转轴**或**轴线**，简称**轴**。

为确定转动刚体的位置，取其转轴为 z 轴，正向如图 7-2 所示。通过轴线作一固定平面 A，此外，通过轴线再作一动平面 B，这个平面与刚体固结，一起转动。两个平面间的夹角用 φ 表示，称为刚体的**转角**。转角 φ 是一个代数量，它确定了刚体的位置，它的符号规定如下：自 z 轴的正端往负端看，从固定面起按逆时针转向计算角 φ，取正值；按顺时针转向计算角 φ，取负值。并用弧度(rad)表示。当刚体转动时，转角 φ 是时间 t 的单值连续函数，即

$$\varphi = f(t) \tag{7-1}$$

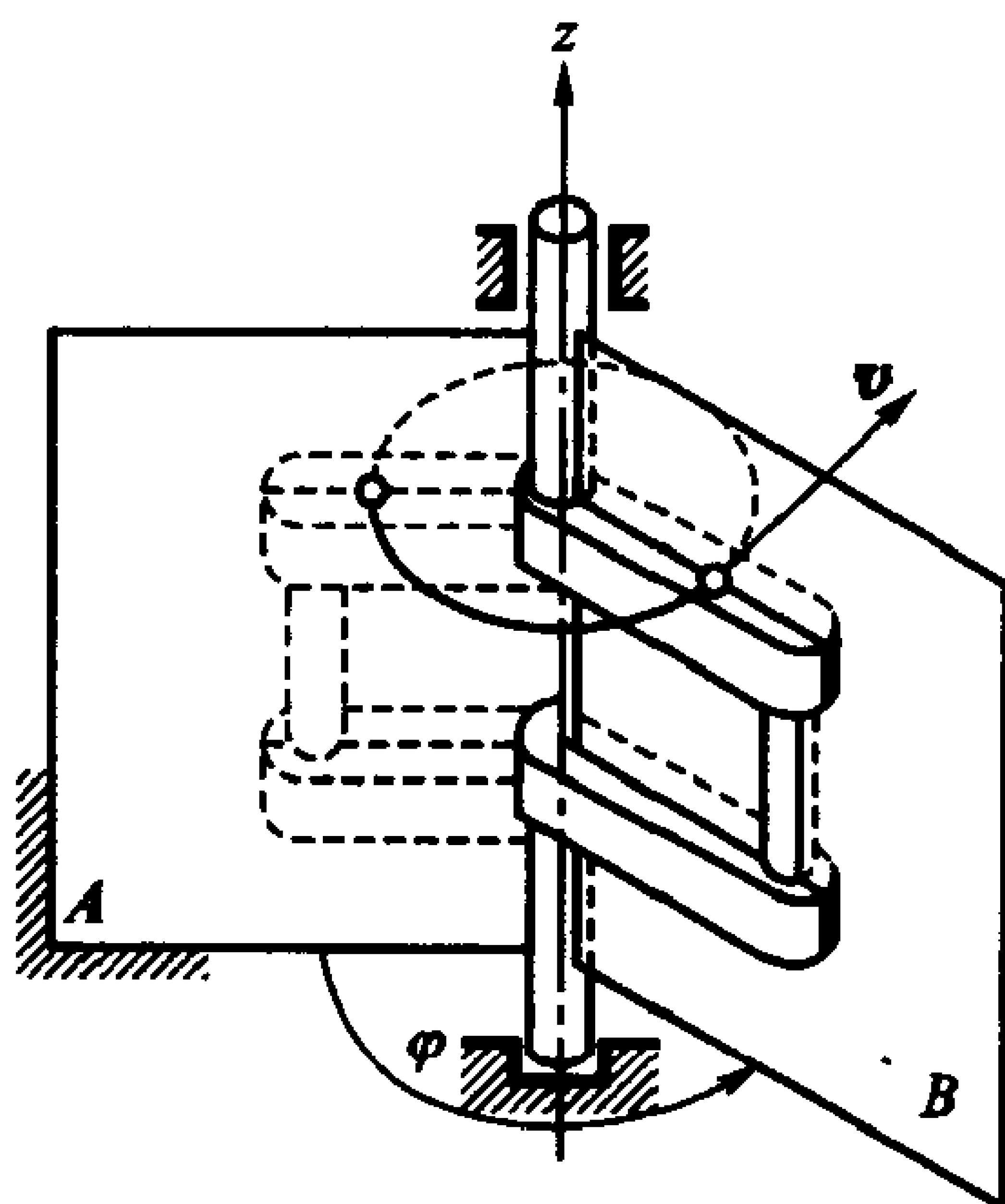


图 7-2

这个方程称为**刚体绕定轴转动**的运动方程。绕定轴转动的刚体，只要用一个参变量(转角 φ)就可以决定它的位置，这样的刚体，称它具有一个**自由度**。

转角 φ 对时间的一阶导数，称为刚体的瞬时**角速度**，并用字母 ω 表示，即

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{7-2}$$

角速度表征刚体转动的快慢和方向，其单位一般用 rad/s(弧度/秒)。

角速度是代数量。从轴的正端向负端看，刚体逆时针转动时，角速度取正值，反之取负值。

角速度对时间的一阶导数，称为刚体的瞬时**角加速度**，用字母 α 表示，即

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{7-3}$$

角加速度表征角速度变化的快慢，其单位一般用 rad/s²(弧度/秒²)。

角加速度也是代数量。

如果 ω 与 α 同号，则转动是加速的；如果 ω 与 α 异号，则转动是减速的。

现在讨论两种特殊情形。

(1) 匀速转动　如果刚体的角速度不变，即 ω = 常量，这种转动称为匀速转动。仿照点的匀速运动公式，可得

$$\varphi=\varphi_0+\omega t \tag{7-4}$$

其中 φ_0 是 $t=0$ 时转角 φ 的值。

机器中的转动部件或零件，一般都在匀速转动情况下工作。转动的快慢常用每分钟转数 n 来表示，其单位为 r/min(转/分)，称为转速。例如车床主轴的转速为 12.5～1200 r/min，汽轮机的转速约为 3000 r/min 等。

角速度 ω 与转速 n 的关系为

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{\pi n}{30} \tag{7-5}$$

式中转速 n 的单位为 r/min，ω 的单位为 rad/s。在粗略的近似计算中，可取 $\pi\approx 3$，于是 $\omega\approx 0.1n$。

(2) 匀变速转动　如果刚体的角加速度不变，即 α = 常量，这种转动称为匀变速转动。仿照点的匀变速运动公式，可得

$$\omega=\omega_0+\alpha t \tag{7-6}$$

$$\varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{7-7}$$

式中 ω_0 和 φ_0 分别是 $t=0$ 时的角速度和转角。

由上面一些公式可知：匀变速转动时，刚体的角速度、转角和时间之间的关系与点在匀变速运动中的速度、坐标和时间之间的关系相似。

§7-3　转动刚体内各点的速度和加速度

当刚体绕定轴转动时，刚体内任意一点都作圆周运动，圆心在轴线上，圆周所在的平面与轴线垂直，圆周的半径 R 等于该点到轴线的垂直距离，对此，宜采用自然法研究各点的运动。

设刚体由定平面 A 绕定轴 O 转动任一角度 φ，到达 B 位置，其上任一点由 O' 运动到 M，如图 7-3 所示。以固定点 O' 为弧坐标 s 的原点，按 φ 角的正向规定弧坐标 s 的正向，于是

$$s=R\varphi$$

式中 R 为点 M 到轴心 O 的距离。

将上式对 t 取一阶导数，得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

由于 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega$，$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$，因此，上式可写成

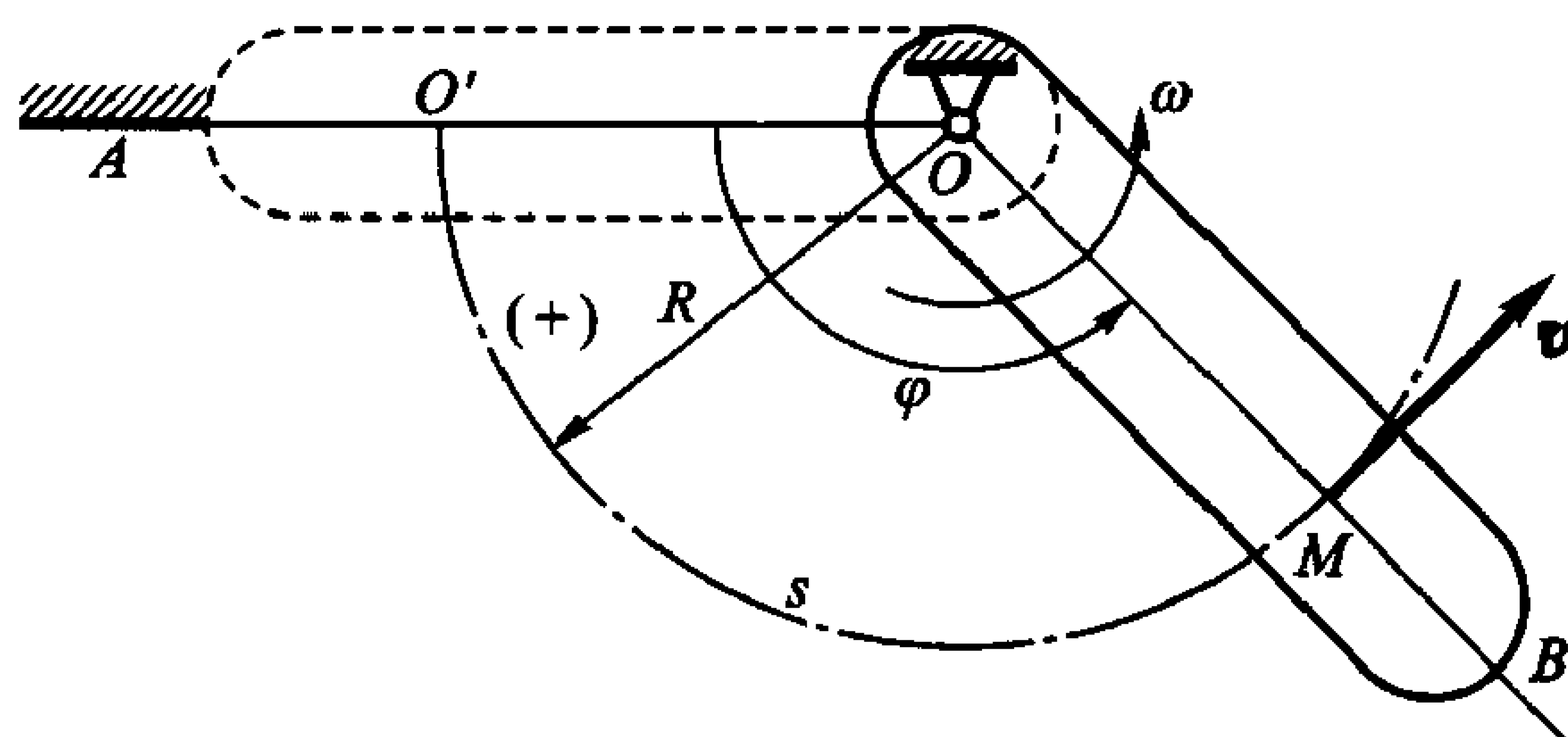


图 7－3

$$v = R\omega \tag{7-8}$$

即：转动刚体内任一点的速度的大小，等于刚体的角速度与该点到轴线的垂直距离的乘积，它的方向沿圆周的切线而指向转动的一方。

用一垂直于轴线的平面横截刚体，得一截面。根据上述结论，在该截面上的任一条通过轴心的直线上，各点的速度按线性规律分布，如图 7－4b 所示。将速度矢的端点连成直线，此直线通过轴心。在该截面上，不在一条直线上的各点的速度方向，如图 7－4a 所示。

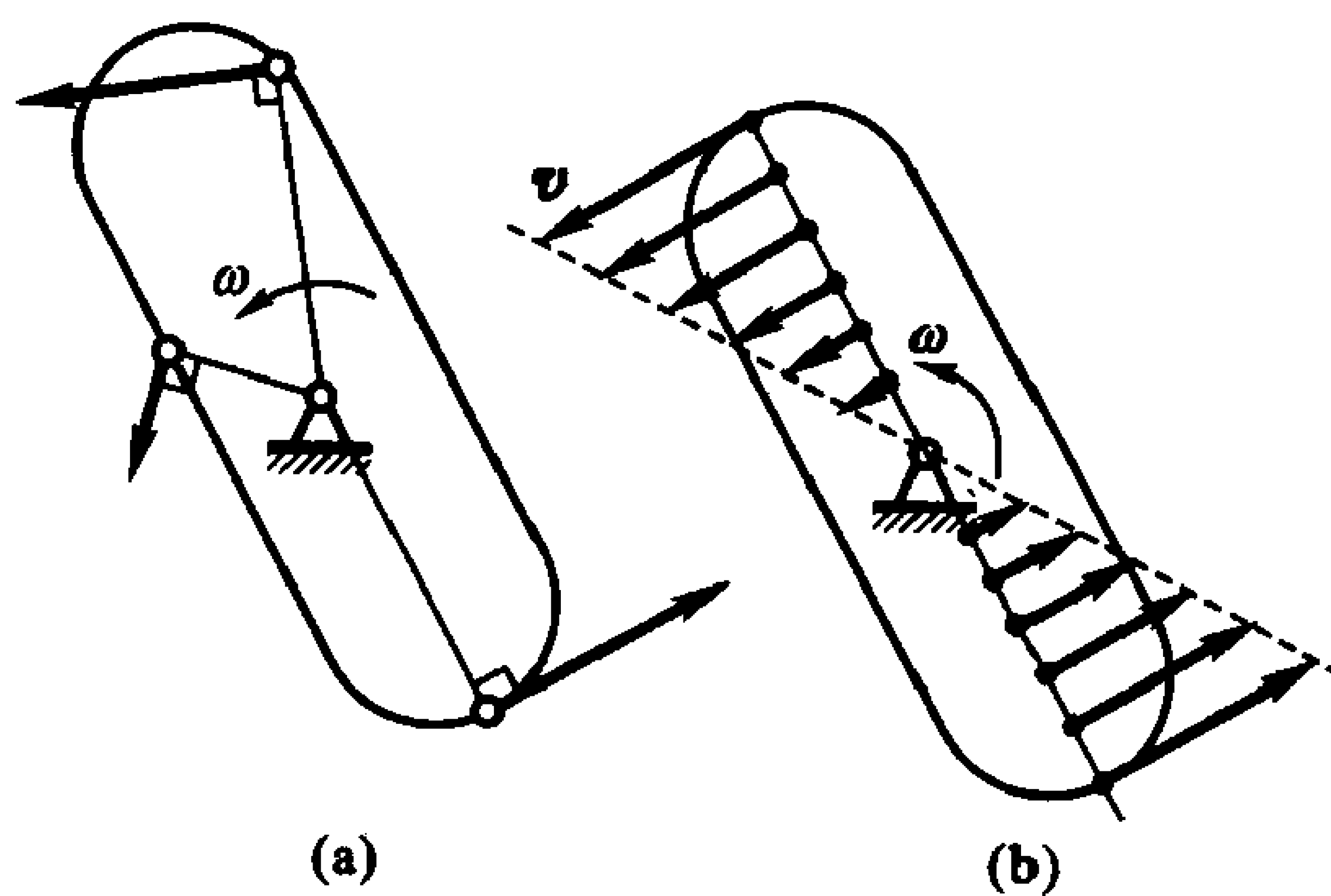


图 7－4

现在求点 M 的加速度。因为点作圆周运动，因此应求切向加速度和法向加速度。根据上一章式(6－20)和弧长 s 与转角 φ 的关系，得

$$a_t = \ddot{s} = R\ddot{\varphi}$$

由 $\ddot{\varphi} = \alpha$，因此

$$a_t = R\alpha \tag{7-9}$$

即：转动刚体内任一点的切向加速度（又称转动加速度）的大小，等于刚体的角加

速度与该点到轴线垂直距离的乘积，它的方向由角加速度的符号决定。当 α 是正值时，它沿圆周的切线，指向角 φ 的正向；否则相反。

法向加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(R\omega)^2}{\rho}$$

式中 ρ 是曲率半径，对于圆，$\rho = R$，因此

$$a_n = R\omega^2 \tag{7-10}$$

即：转动刚体内任一点的法向加速度（又称向心加速度）的大小，等于刚体角速度的平方与该点到轴线的垂直距离的乘积，它的方向与速度垂直并指向轴线。

如果 ω 与 α 同号，角速度的绝对值增加，刚体作加速转动，这时点的切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 的指向相同；如果 ω 与 α 异号，刚体作减速转动，$\boldsymbol{a}_t$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的指向相反。这两种情况如图 7-5a,b 所示。

点 M 的加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小可从下式求出：

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2\alpha^2 + R^2\omega^4} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \tag{7-11}$$

要确定加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向，只须求出 $\boldsymbol{a}$ 与半径 MO 所成的交角 θ 即可（图 7-5）。从直角三角形的关系式得

$$\tan\theta = \frac{a_t}{a_n} = \frac{R\alpha}{R\omega^2} = \frac{\alpha}{\omega^2} \tag{7-12}$$

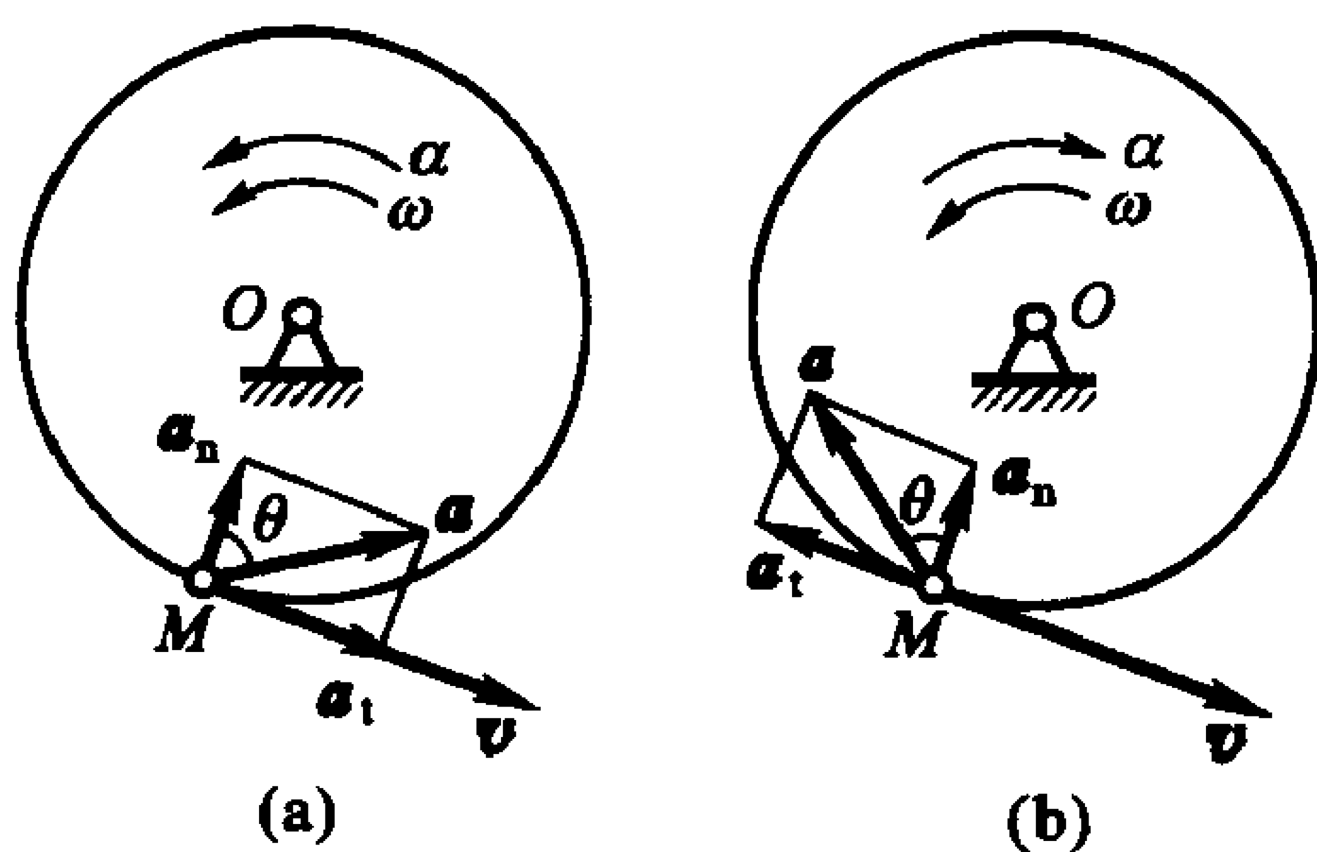


图 7-5

由于在每一瞬时，刚体的 ω 和 α 都只有一个确定的数值，所以从式(7-8)、(7-11)和(7-12)得知：

(1) 在每一瞬时，转动刚体内所有各点的速度和加速度的大小，分别与这些点到轴线的垂直距离成正比。

(2) 在每一瞬时，刚体内所有各点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 与半径间的夹角 θ 都有相同的值。

用一垂直于轴线的平面横截刚体，得一截面。根据上述结论，可画出截面上

各点的加速度,如图 7-6a 所示。在通过轴心的直线上各点的加速度按线性分布,将加速度矢的端点连成直线,此直线通过轴心,如图 7-6b 所示。

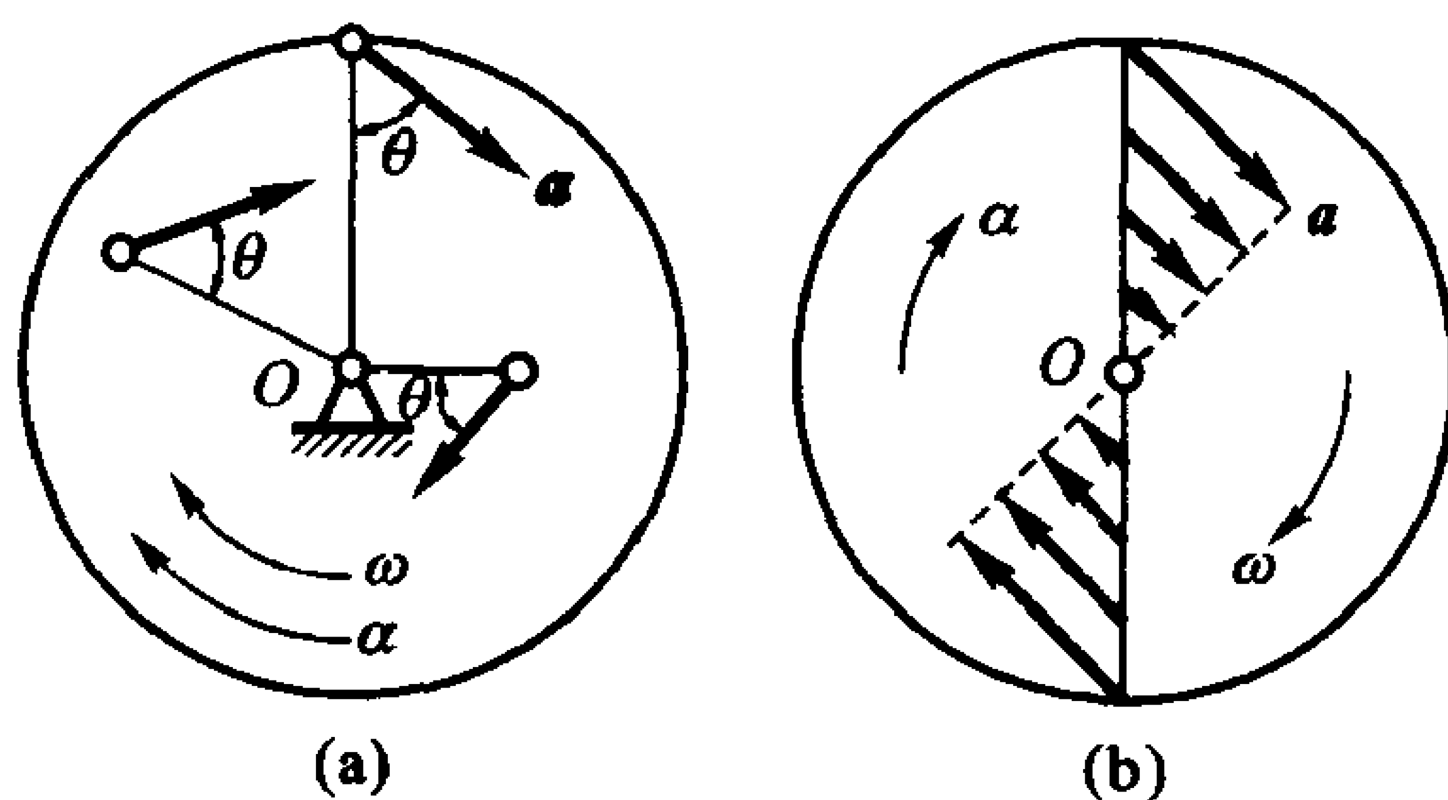


图 7-6

§7-4 轮系的传动比

工程中,常利用轮系传动提高或降低机械的转速,最常见的有齿轮系和带轮系。

1. 齿轮传动

机械中常用齿轮作为传动部件,例如,为了要将电动机的转动传到机床的主轴,通常用变速箱降低转速,多数变速箱是由齿轮系组成的。

现以一对啮合的圆柱齿轮为例。圆柱齿轮传动分为外啮合(图 7-7)和内啮合(图 7-8)两种。

设两个齿轮各绕固定轴 O_1 和 O_2 转动。已知其啮合圆半径各为 R_1 和 R_2;齿数各为 z_1 和 z_2;角速度各为 ω_1 和 ω_2。令 A 和 B 分别是两个齿轮啮合圆的接触点,因两圆之间没有相对滑动,故

$$v_B = v_A$$

并且速度方向也相同。但 $v_B = R_2\omega_2$, $v_A = R_1\omega_1$,因此

$$R_2\omega_2 = R_1\omega_1$$

或

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

由于齿轮在啮合圆上的齿距相等,它们的齿数与半径成正比,故

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1} \tag{7-13}$$

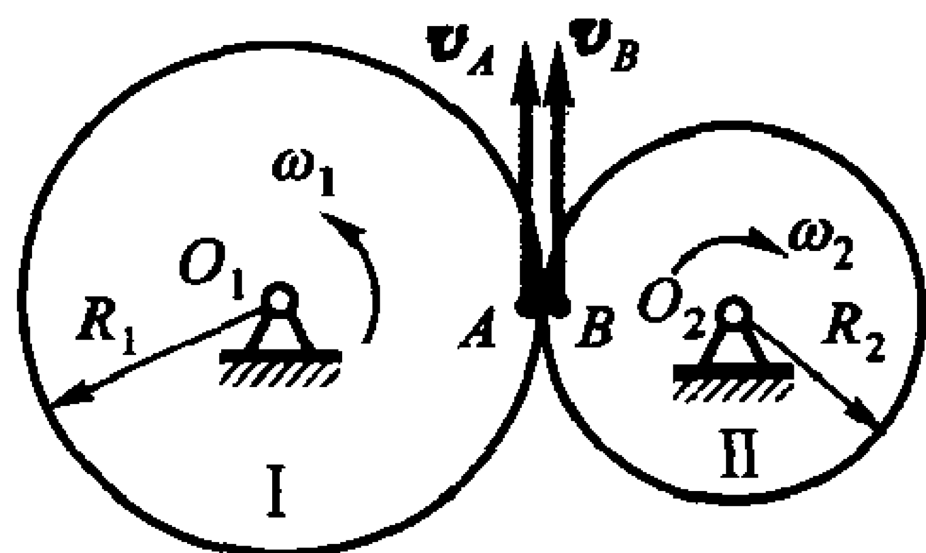


图7-7

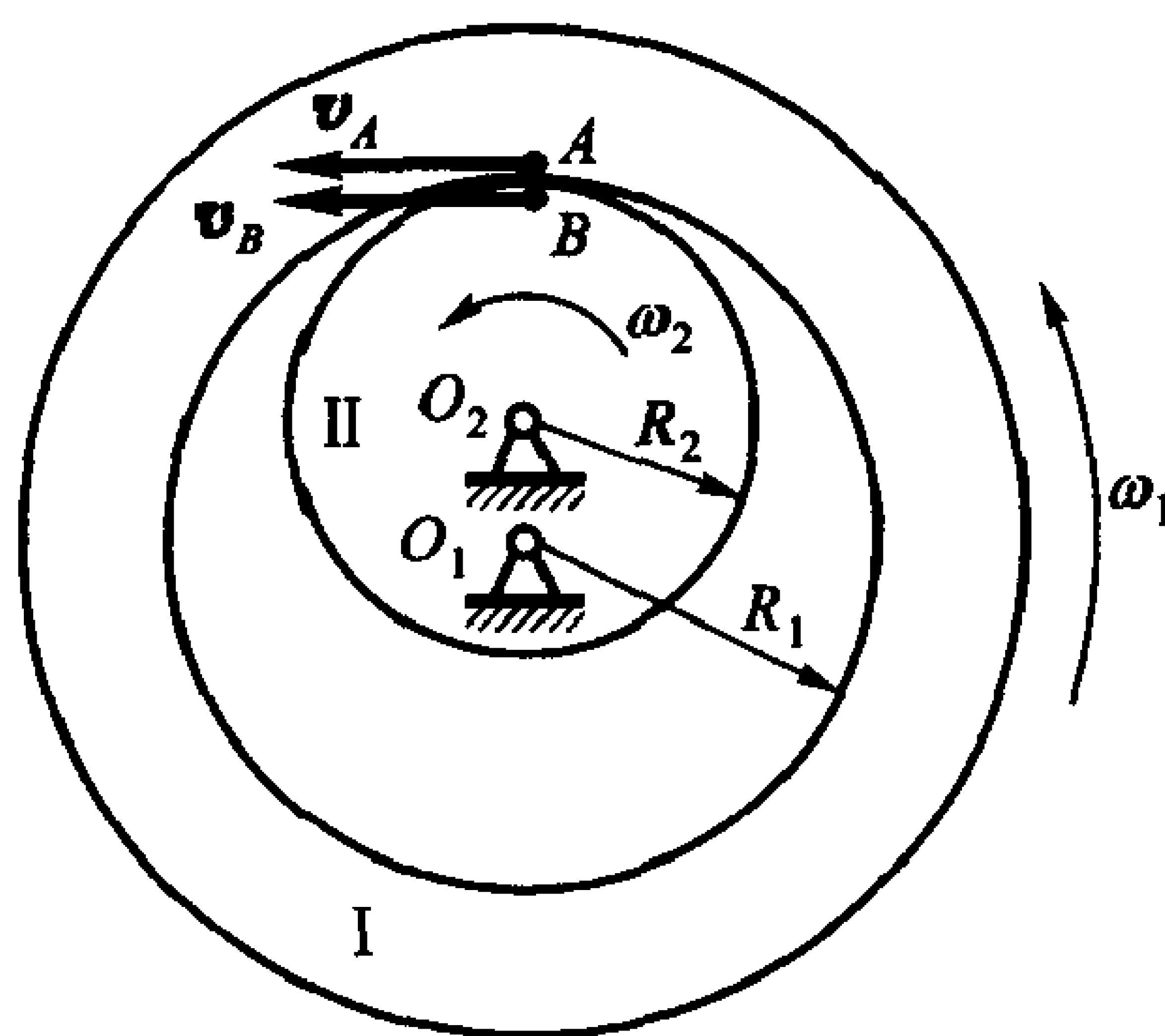


图7-8

由此可知：处于啮合中的两个定轴齿轮的角速度与两齿轮的齿数成反比（或与两轮的啮合圆半径成反比）。

设轮Ⅰ是主动轮，轮Ⅱ是从动轮。在机械工程中，常常把主动轮和从动轮的两个角速度的比值称为**传动比**，用附有角标的符号表示

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}$$

把式(7-13)代入上式，得计算传动比的基本公式

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{z_2}{z_1} \qquad (7-14)$$

式(7-14)定义的传动比是两个角速度大小的比值，与转动方向无关，因此不仅适用于圆柱齿轮传动，也适用于传动轴成任意角度的圆锥齿轮传动、摩擦轮传动等。

有些场合为了区分轮系中各轮的转向，对各轮都规定统一的转动正向，这时各轮的角速度可取代数值，从而传动比也取代数值：

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\pm\frac{R_2}{R_1}=\pm\frac{z_2}{z_1}$$

式中正号表示主动轮与从动轮转向相同（内啮合），如图7-8；负号表示转向相反（外啮合），如图7-7。

2．带轮传动

在机床中，常用电动机通过胶带使变速箱的轴转动。如图7-9所示的带轮装置中，主动轮和从动轮的半径分别为 r_1 和 r_2，角速度分别为 ω_1 和 ω_2。如不考虑胶带的厚度，并假定胶带与带轮间无相对滑动，则应用绕定轴转动的刚体上各点速度的公式，可得到下列关系式：

$$r_1\omega_1=r_2\omega_2$$

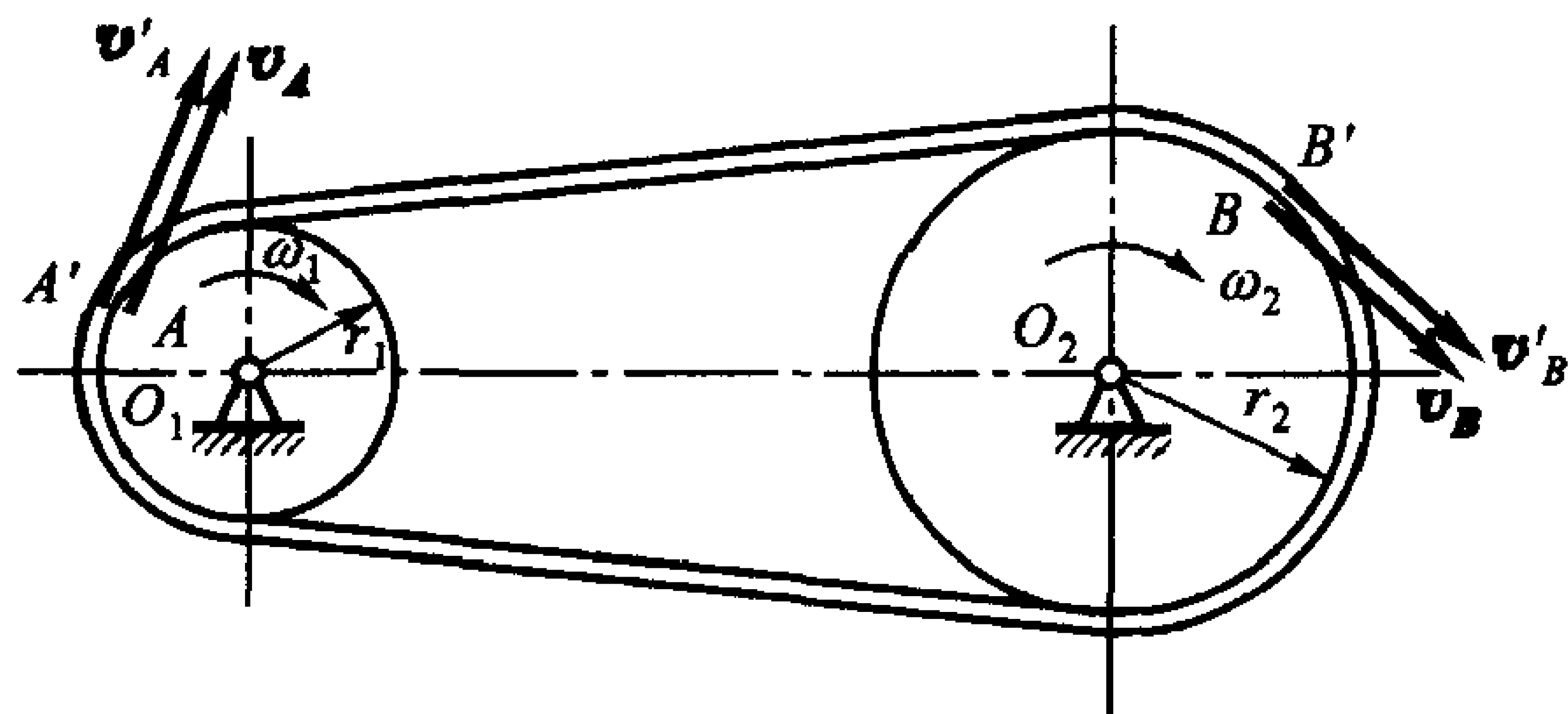


图 7－9

于是带轮的传动比公式为

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{r_1} \tag{7-15}$$

即：两轮的角速度与其半径成反比。

§7－5 以矢量表示角速度和角加速度·以矢积表示点的速度和加速度

绕定轴转动刚体的角速度可以用矢量表示。角速度矢 $\boldsymbol{\omega}$ 的大小等于角速度的绝对值，即

$$|\boldsymbol{\omega}|=|\omega|=\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right| \tag{7-16}$$

角速度矢 $\boldsymbol{\omega}$ 沿轴线，它的指向表示刚体转动的方向；如果从角速度矢的末端向始端看，则看到刚体作逆时针转向的转动，如图7－10a所示；或按照右手螺旋规则确定：右手的四指代表转动的方向，拇指代表角速度矢 $\boldsymbol{\omega}$ 的指向，如图 7－10b 所示。至于角速度矢的起点，可在轴线上任意选取，也就是说，角速度矢是滑动矢。

如取转轴为 z 轴，它的正向用单位矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向表示(图7－11)。于是刚体绕定轴转动的角速度矢可写成

$$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k} \tag{7-17}$$

式中 ω 是角速度的代数值，它等于 $\dot{\varphi}$。

同样，刚体绕定轴转动的角加速度也可用一个沿轴线的滑动矢量表示：

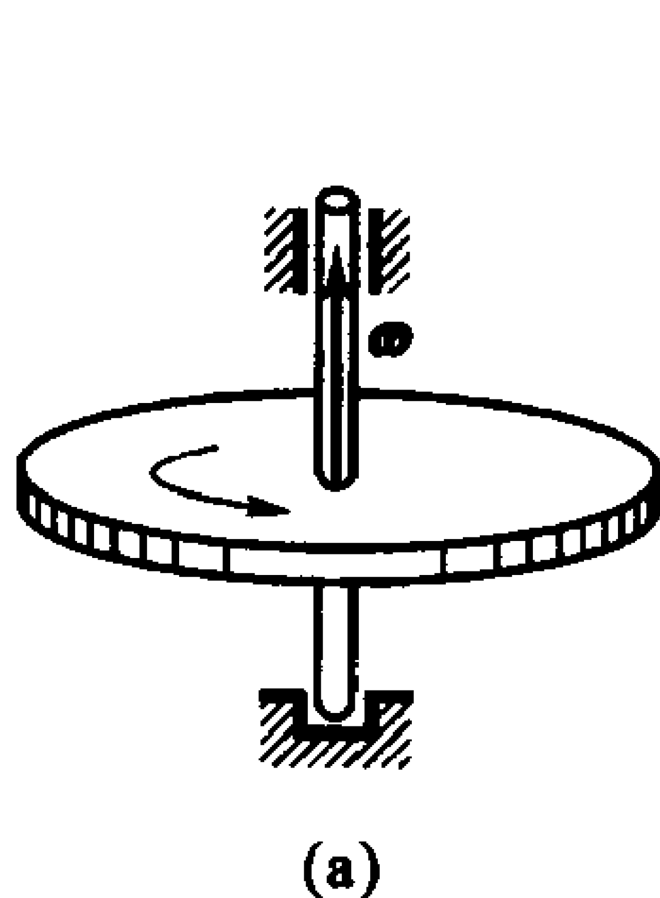
$$\boldsymbol{\alpha}=\alpha\boldsymbol{k} \tag{7-18}$$

其中 α 是角加速度的代数值，它等于 $\dot{\omega}$ 或 $\ddot{\varphi}$。于是

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega\boldsymbol{k})$$

或

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{7-19}$$



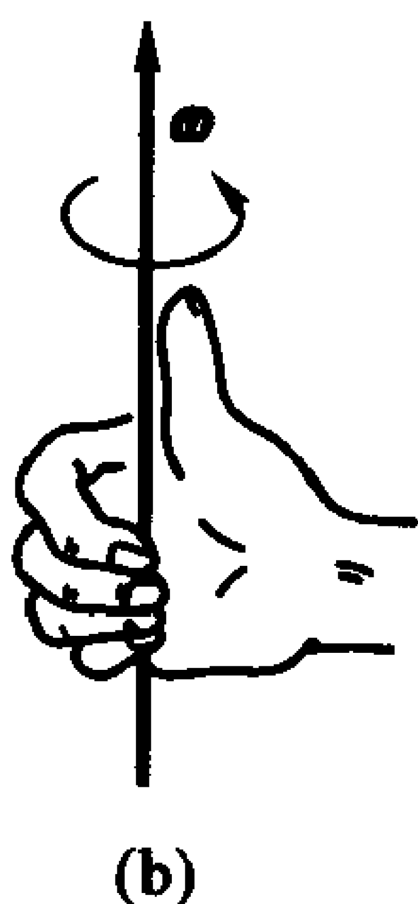
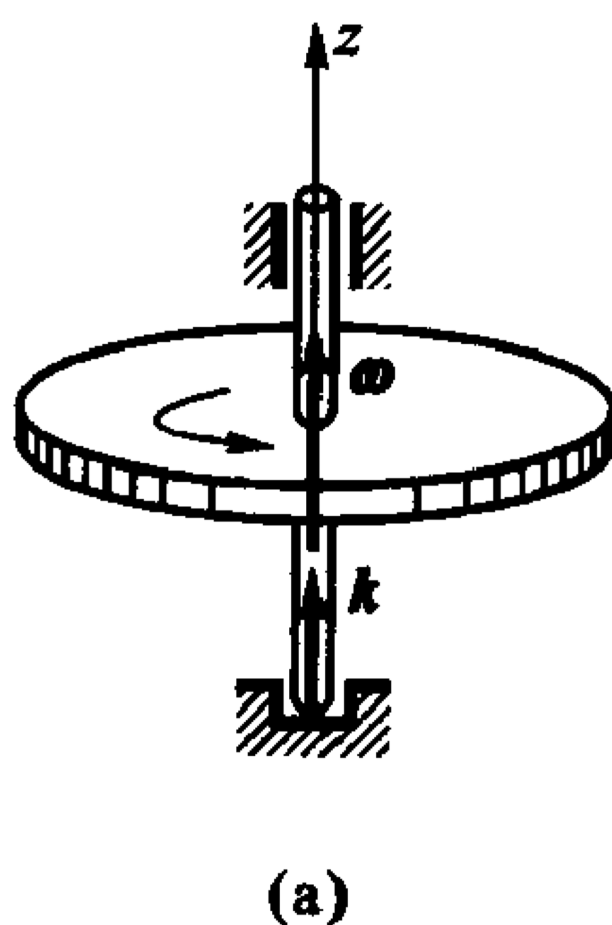


图 7-10



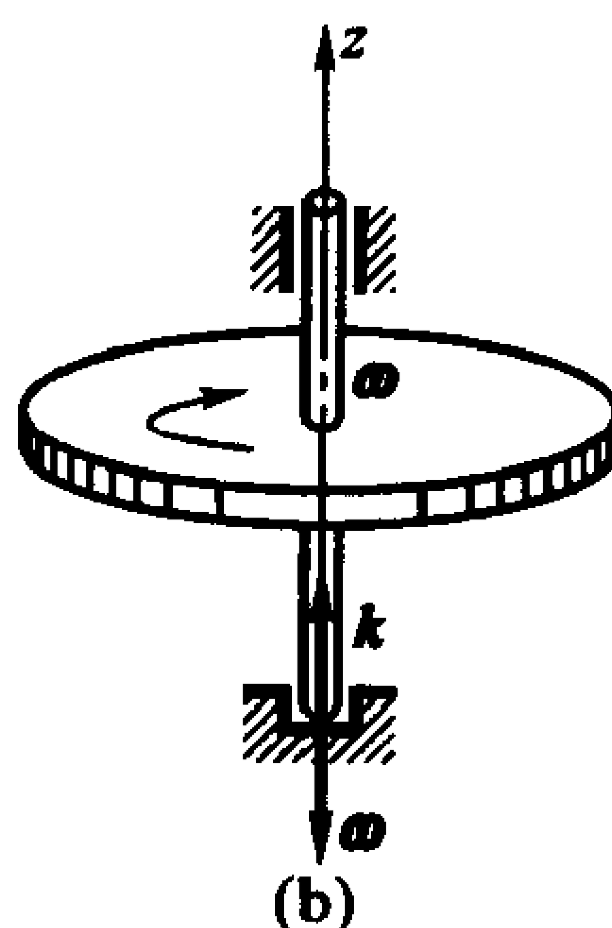


图 7-11

即角加速度矢 $\boldsymbol{\alpha}$ 为角速度矢 $\boldsymbol{\omega}$ 对时间的一阶导数。

根据上述角速度和角加速度的矢量表示法，刚体内任一点的速度可以用矢积表示。

如在轴线上任选一点 O 为原点，点 M 的矢径以 $\boldsymbol{r}$ 表示，如图 7-12 所示。那么，点 M 的速度可以用角速度矢与它的矢径的矢量积表示，即

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{7-20}$$

为了证明这一点，需证明矢积 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 确实表示点 M 的速度矢的大小和方向。

根据矢积的定义知，$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 仍是一个矢量，它的大小是

$$|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{\omega}|\cdot|\boldsymbol{r}|\sin\theta=|\boldsymbol{\omega}|\cdot R=|\boldsymbol{v}|$$

式中 θ 是角速度矢 $\boldsymbol{\omega}$ 与矢径 $\boldsymbol{r}$ 间的夹角。于是证明了矢积 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 的大小等于速度的大小。

矢积 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 所组成的平面（即图 7-12 中三角形 OMO_1 平面），从矢量 $\boldsymbol{v}$ 的末端向始端看，则见 $\boldsymbol{\omega}$ 按逆时针转向转过角 θ 与 $\boldsymbol{r}$ 重合，由图容易看出，矢积 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 的方向正好与点 M 的速度方向相同。

于是可得结论：绕定轴转动的刚体上任一点的速度矢等于刚体的角速度矢与该点矢径的矢积。

绕定轴转动的刚体上任一点的加速度矢也可用矢积表示。

因为点 M 的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

把速度的矢积表达式(7-20)代入，得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

已知$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\alpha}$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}$，于是得

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} \tag{7-21}$$

式中右端第一项的大小为

$$|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{r}|\sin\theta=|\boldsymbol{\alpha}|\cdot R$$

这结果恰等于点 M 的切向加速度的大小。而 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 所构成的平面，指向如图 7－13 所示，这方向恰与点 M 的切向加速度的方向一致，因此矢积 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}$ 等于切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$，即

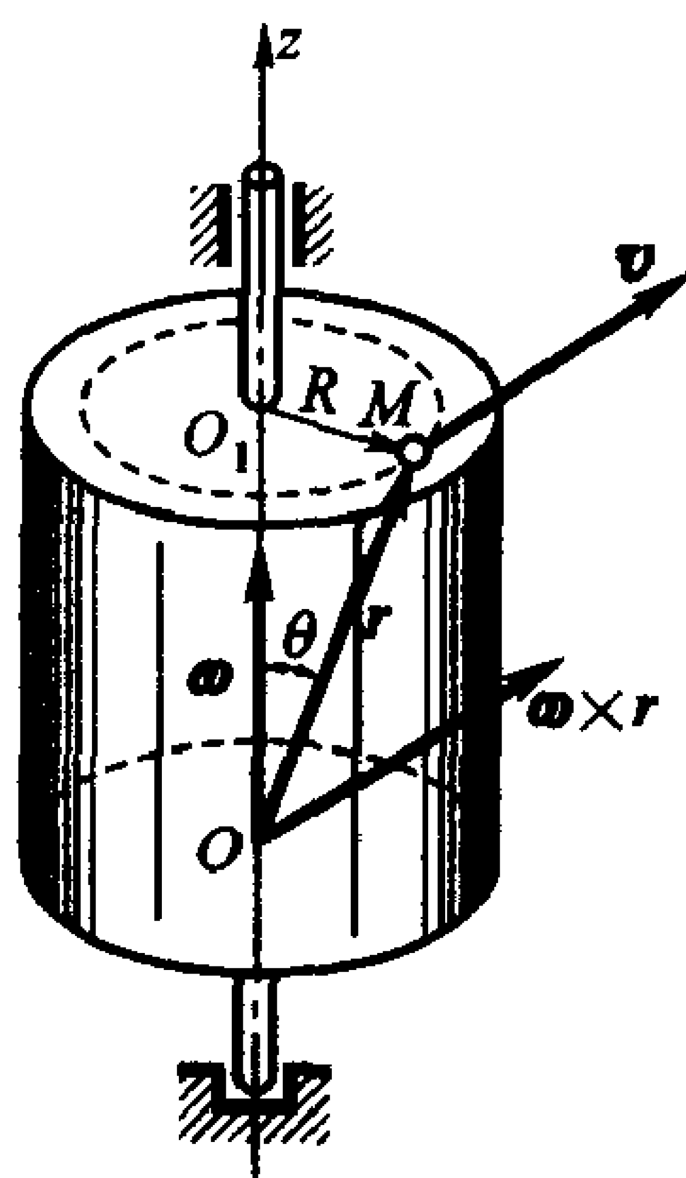


图 7－12

$$\boldsymbol{a}_t=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r} \tag{7-22}$$

同理可知，式(7－21)右端的第二项等于点 M 的法向加速度，即

$$\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} \tag{7-23}$$

于是可得结论：转动刚体内任一点的切向加速度等于刚体的角加速度矢与该点矢径的矢积；法向加速度等于刚体的角速度矢与该点的速度矢的矢积。

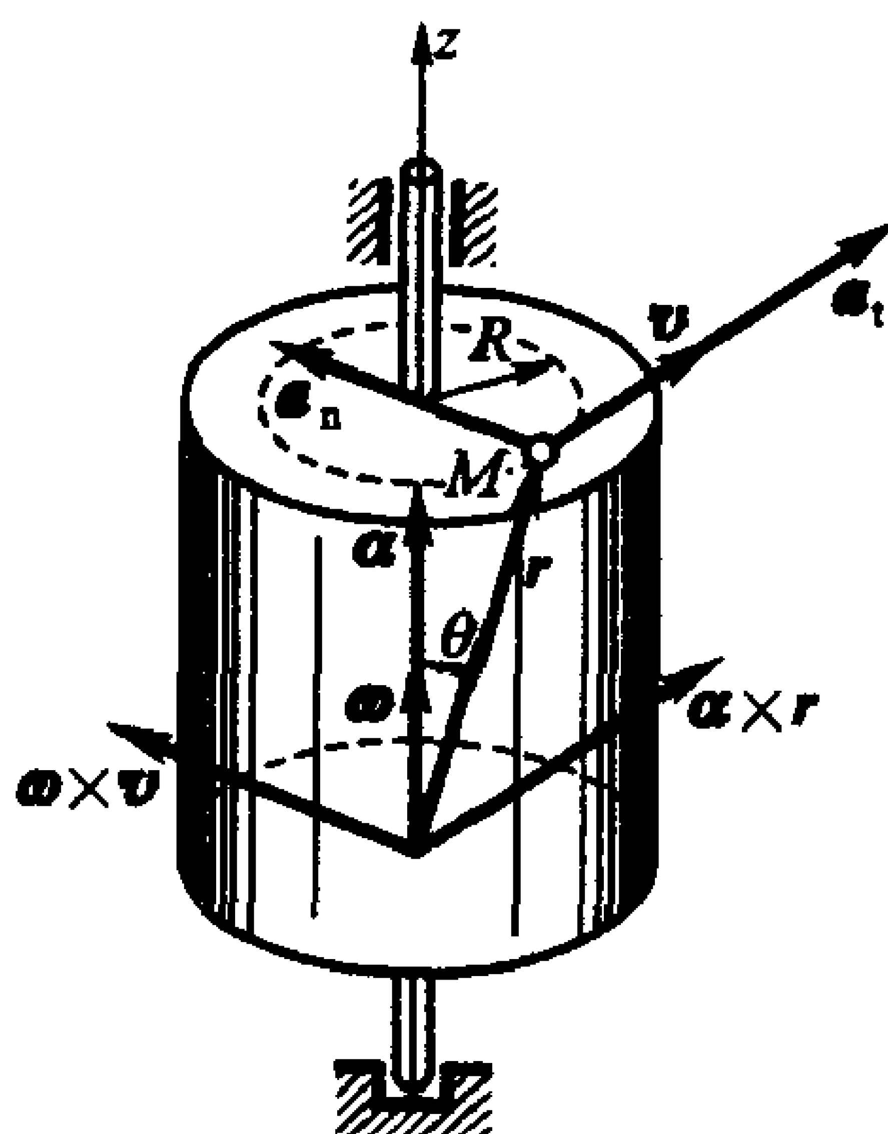


图 7－13

例 7－1 刚体绕定轴转动，已知转轴通过坐标原点 O，角速度矢为 $\boldsymbol{\omega}=5\sin\frac{\pi t}{2}\boldsymbol{i}+5\cos\frac{\pi t}{2}\boldsymbol{j}+5\sqrt{3}\boldsymbol{k}$。求 $t=1$ s 时，刚体上点 $M(0,2,3)$ 的速度矢及加速度矢。

解：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 5\sin\frac{\pi t}{2} & 5\cos\frac{\pi t}{2} & 5\sqrt{3}\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=-10\sqrt{3}\boldsymbol{i}-15\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$

$$=\left(-\frac{15}{2}\pi+75\sqrt{3}\right)\boldsymbol{i}-200\boldsymbol{j}-75\boldsymbol{k}$$

例 7－2 某定轴转动刚体的转轴通过点 $M_0(2,1,3)$，其角速度矢 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向余弦为 0.6, 0.48, 0.64，角速度的大小为 $\omega=25$ rad/s。求刚体上点 $M(10,7,11)$ 的速度矢。

解： 设原坐标系为 $Ox'y'z'$，取新坐标系以 M_0 为原点，记为 M_0xyz，且 x,y,z 三轴分别平行于原坐标系的 x',y',z' 轴。在新坐标系中有

$$\boldsymbol{\omega}=\omega\times(0.6\boldsymbol{i}+0.48\boldsymbol{j}+0.64\boldsymbol{k})=15\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+16\boldsymbol{k}$$

点 M 在新坐标系中的矢径为 $\boldsymbol{r}=(10-2)\boldsymbol{i}+(7-1)\boldsymbol{j}+(11-3)\boldsymbol{k}$，

于是有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 15 & 12 & 16 \\ 8 & 6 & 8 \end{vmatrix}=8\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$$

小 结

1. 刚体运动的最简单形式为平行移动和绕定轴转动。

2. 刚体平行移动

(1) 刚体内任一直线段在运动过程中,始终与它的最初位置平行,此种运动称为刚体平行移动,或平移。

(2) 刚体作平移时,刚体内各点的轨迹形状完全相同,各点的轨迹可能是直线,也可能是曲线。

(3) 刚体作平移时,在同一瞬时刚体内各点的速度和加速度大小、方向都相同。

3. 刚体绕定轴转动

(1) 刚体运动时,其中有两点保持不动,此种运动称为刚体绕定轴转动,或转动。

(2) 刚体的转动方程 $\varphi=f(t)$表示刚体的位置随时间的变化规律。

(3) 角速度 ω 表示刚体转动的快慢程度和转向,是代数量。

$$\omega=\dot{\varphi}$$

角速度也可用矢量表示:$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$ 。

(4) 角加速度表示角速度对时间的变化率,是代数量。

$$\alpha=\dot{\omega}=\ddot{\varphi}$$

当 ω 与 α 同号时,刚体作加速转动;当 ω 与 α 异号时,刚体作减速转动。

角加速度也可用矢量表示:$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\alpha\boldsymbol{k}$。

(5) 绕定轴转动刚体上点的速度、加速度与角速度、角加速度的关系:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为点的矢径。速度、加速度的代数值为

$$v=R\omega,\ a_{\mathrm{t}}=R\alpha,\ a_{\mathrm{n}}=R\omega^2$$

(6) 传动比 $$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{z_2}{z_1}$$

思 考 题

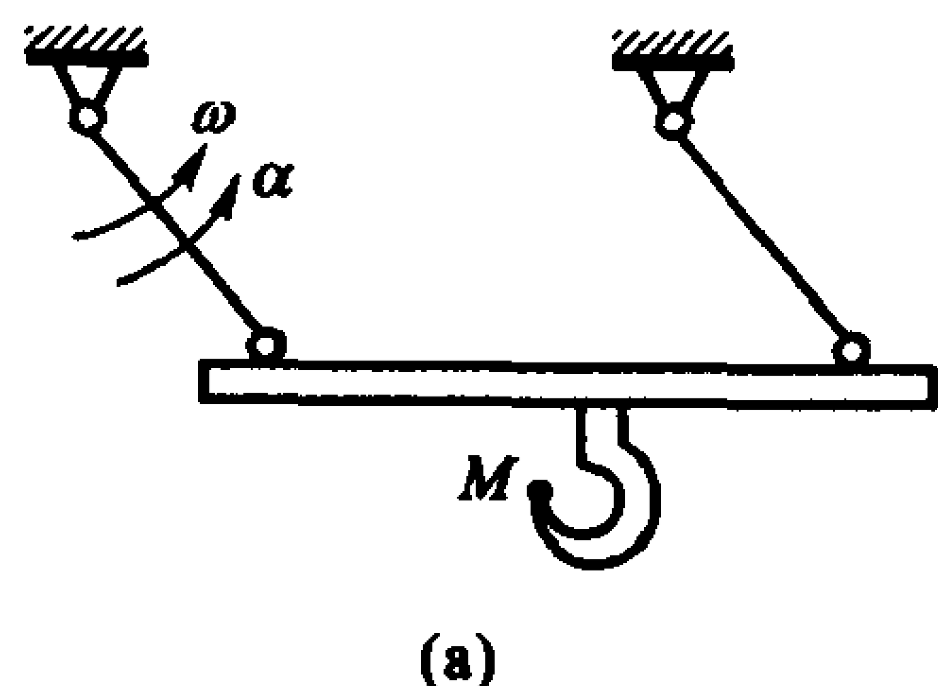
7-1 试推导刚体作匀速转动和匀加速转动的转动方程。

7-2 各点都作圆周运动的刚体一定是定轴转动吗?

7-3 “刚体作平移时，各点的轨迹一定是直线或平面曲线；刚体绕定轴转动时，各点的轨迹一定是圆”。这种说法对吗？

7-4 有人说：“刚体绕定轴转动时，角加速度为正，表示加速转动；角加速度为负，表示减速转动”。对吗？为什么？

7-5 试画出图 7-14a,b 中标有字母的各点的速度方向和加速度方向。



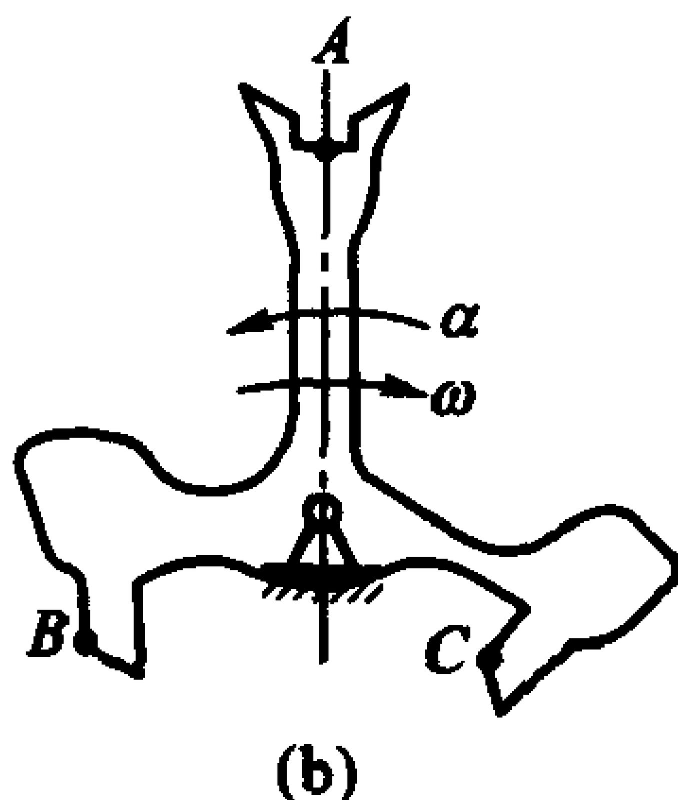


图 7-14

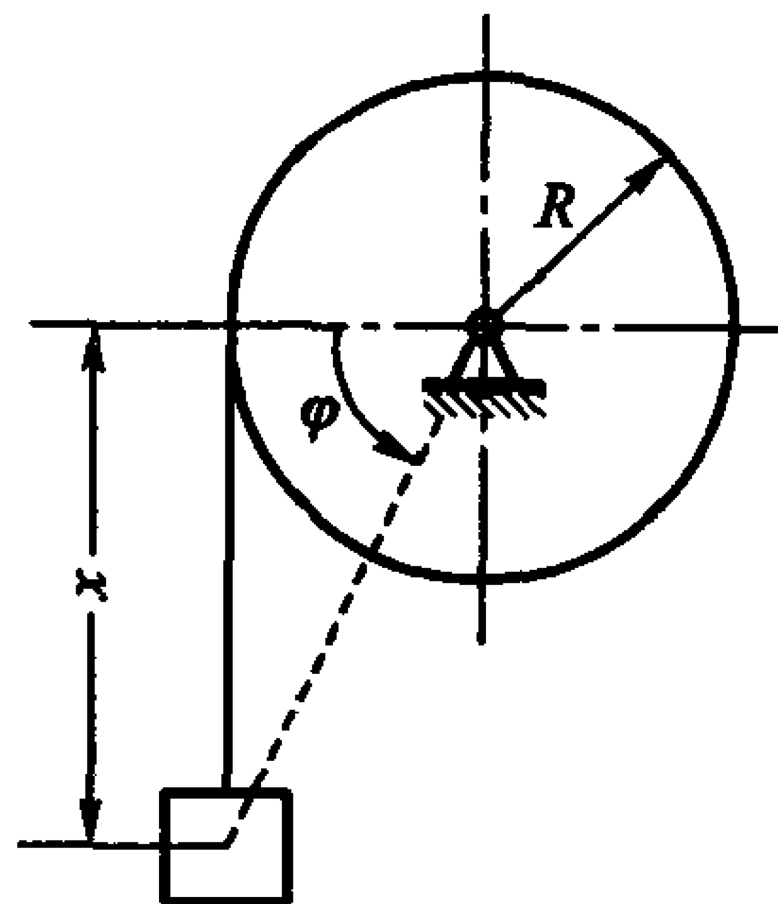


图 7-15

7-6 这样计算图 7-15 所示鼓轮的角速度对不对？

因为
$$\tan\varphi=\frac{x}{R}$$
所以
$$\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\arctan\frac{x}{R}\right)$$

7-7 刚体作定轴转动，其上某点 A 到转轴距离为 R。为求出刚体上任意点在某一瞬时的速度和加速度的大小，下述哪组条件是充分的？

(1) 已知点 A 的速度及该点的全加速度方向。

(2) 已知点 A 的切向加速度及法向加速度。

(3) 已知点 A 的切向加速度及该点的全加速度方向。

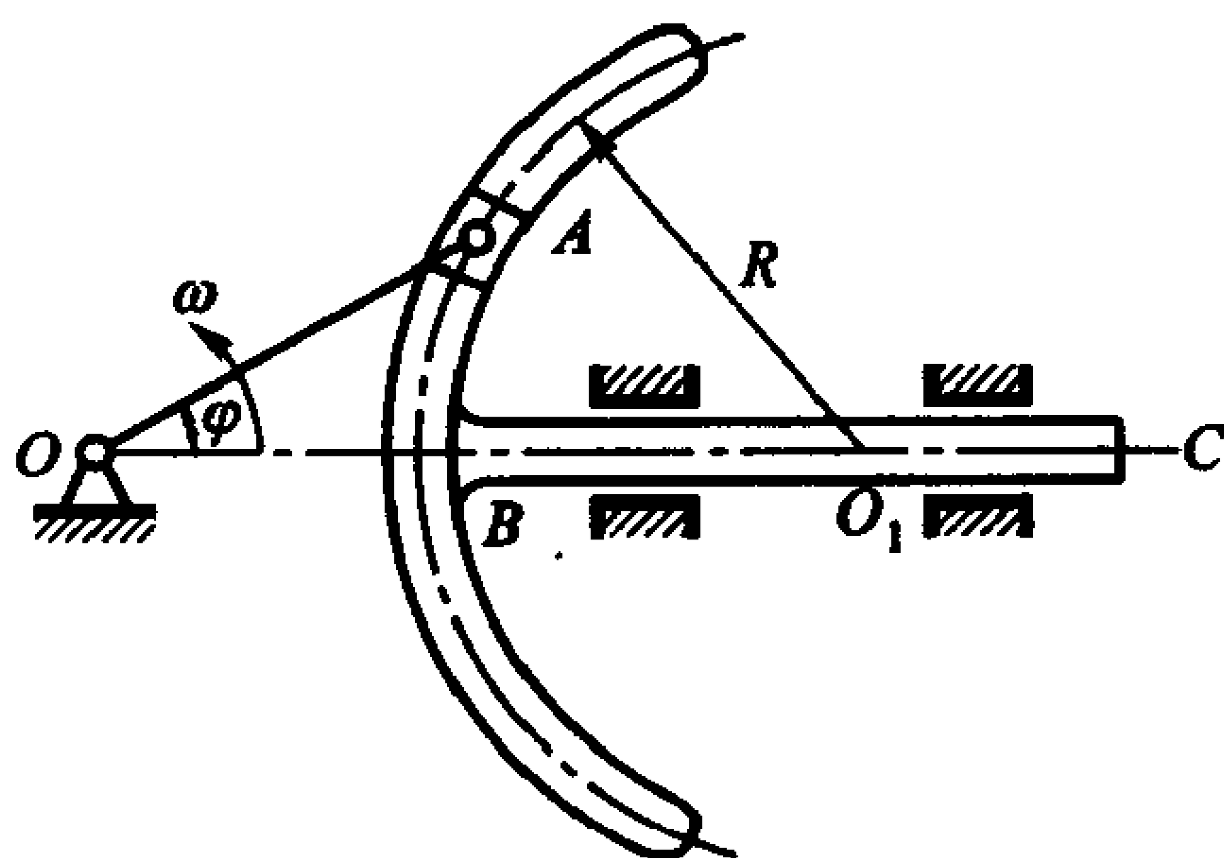
(4) 已知点 A 的法向加速度及该点的速度。

(5) 已知点 A 的法向加速度及该点全加速度的方向。

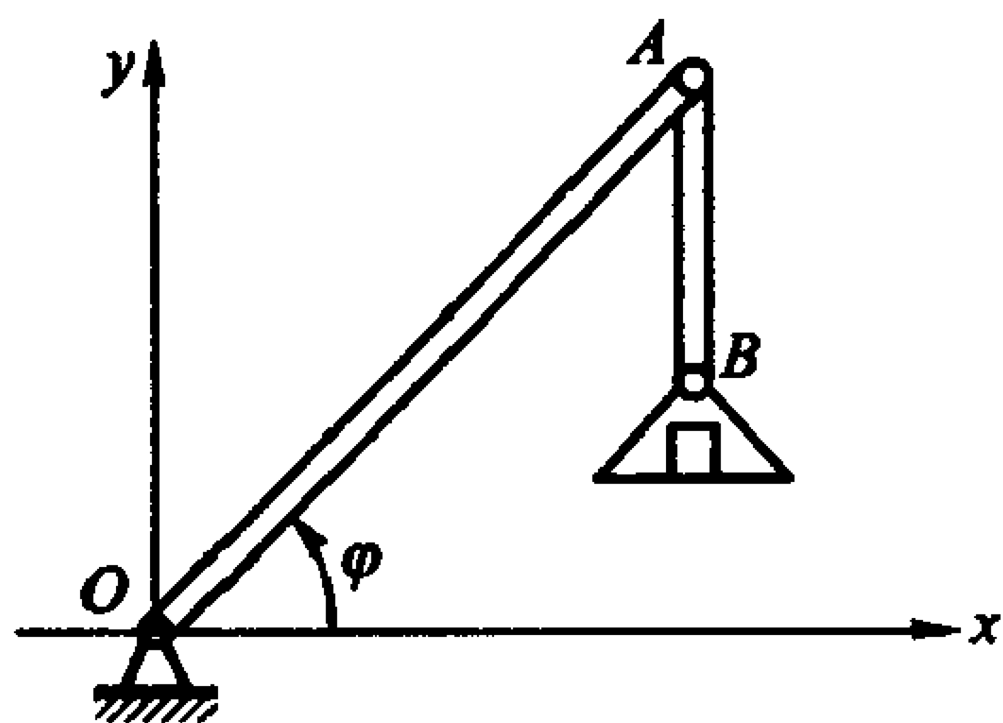
习　　题

7-1 图示曲柄滑杆机构中，滑杆上有一圆弧形滑道，其半径 $R=100$ mm，圆心 O_1 在导杆 BC 上。曲柄长 $OA=100$ mm，以等角速度 $\omega=4$ rad/s 绕 O 轴转动。求导杆 BC 的运动规律以及当曲柄与水平线间的交角 φ 为 30°时，导杆 BC 的速度和加速度。

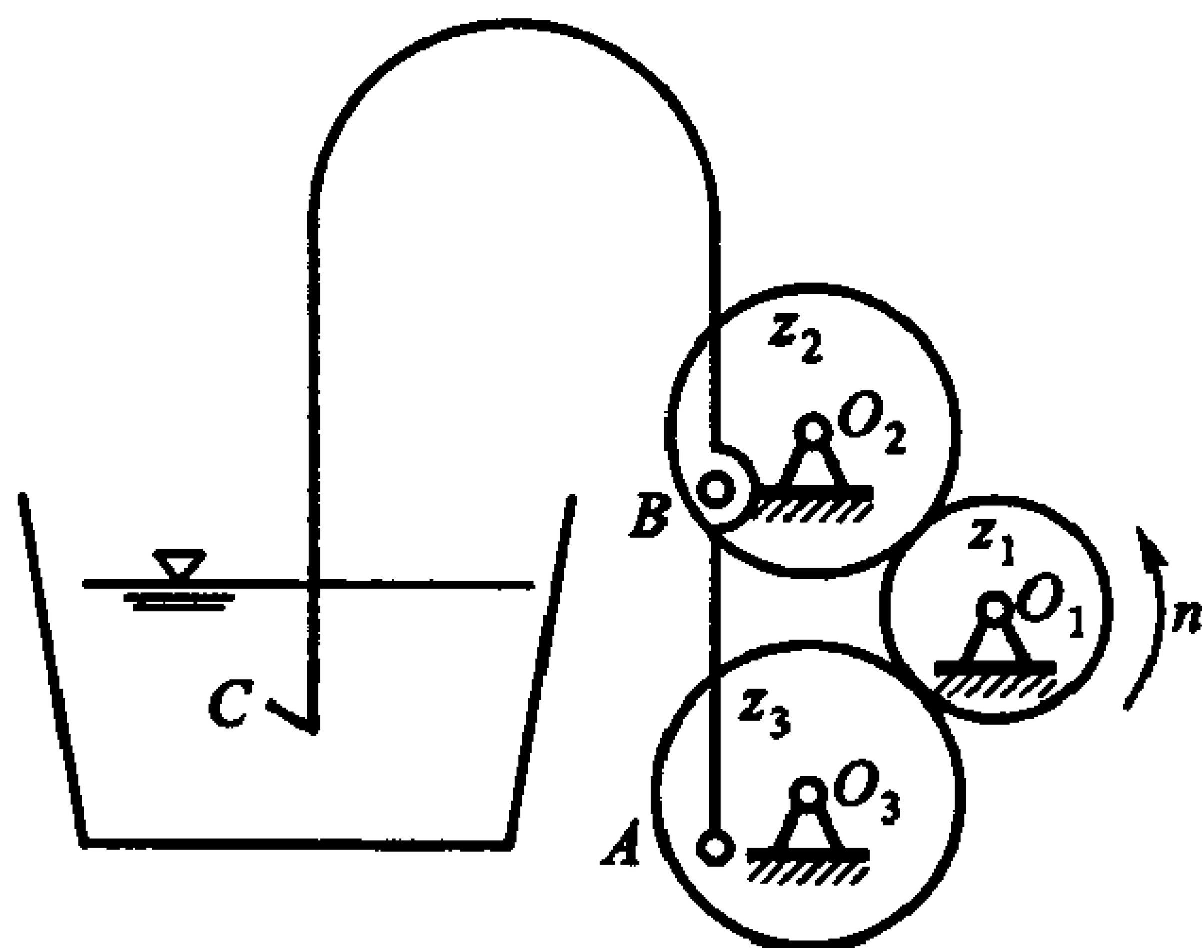
7-2 图示为把工件送入干燥炉内的机构，叉杆 $OA=1.5$ m 在铅垂面内转动，杆 $AB=0.8$ m，A 端为铰链，B 端有放置工件的框架。在机构运动时，工件的速度恒为 0.05 m/s，杆 AB 始终铅垂。设运动开始时，角 $\varphi=0$。求运动过程中角 φ 与时间的关系，以及点 B 的轨迹方程。



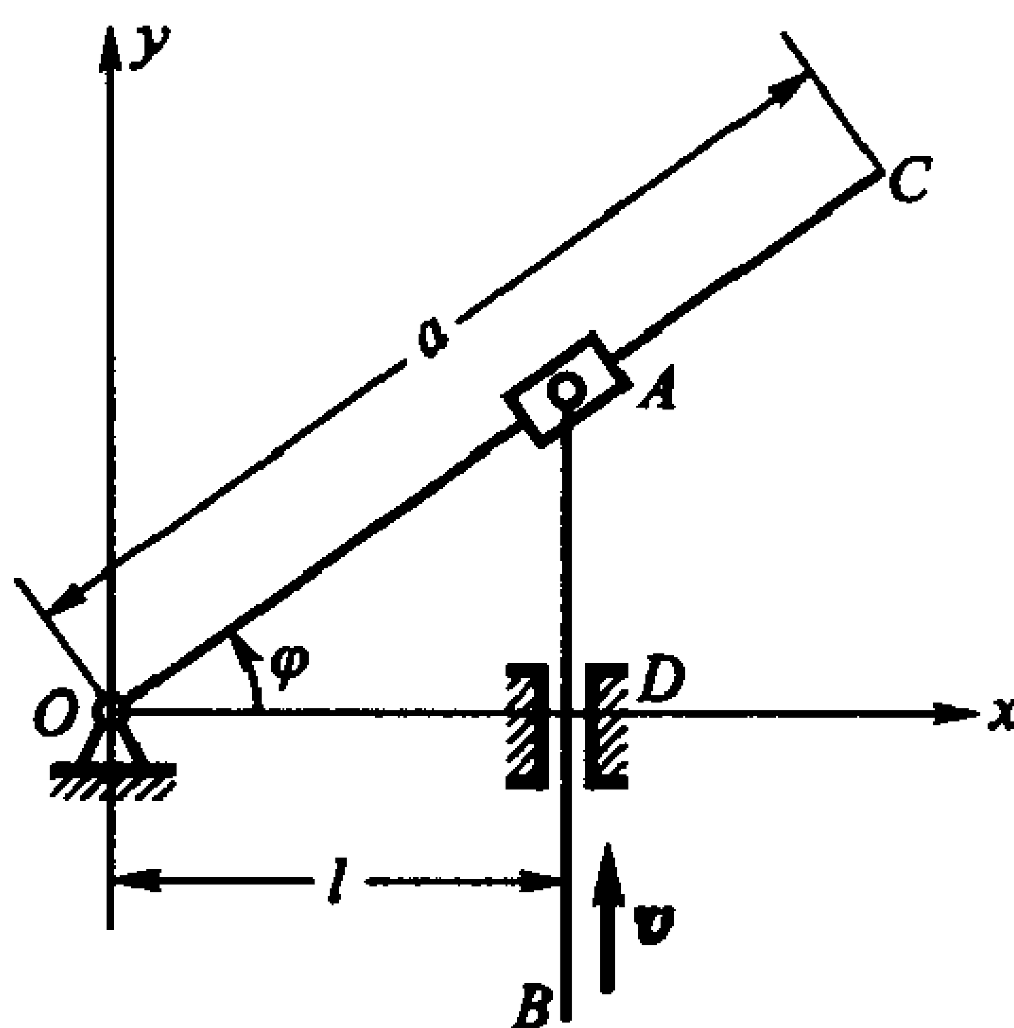
题 7－1 图



题 7－2 图



题 7－3 图

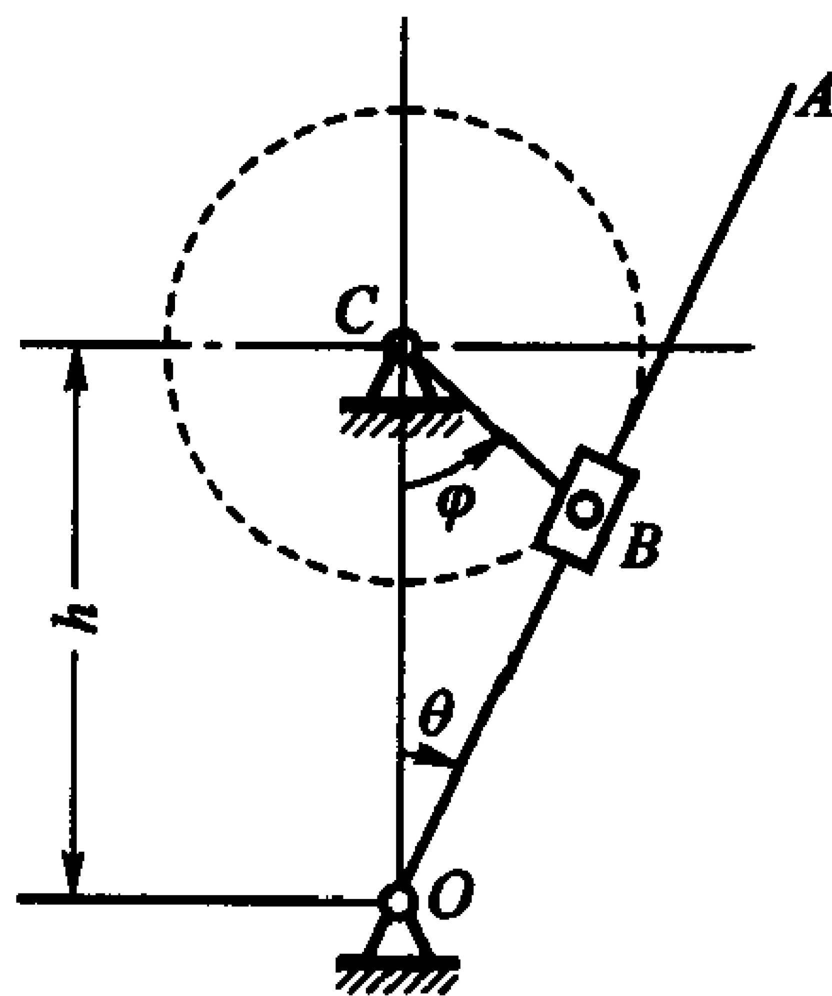


题 7－4 图

7－3　已知搅拌机的主动齿轮 O_1 以 $n = 950$ r/min 的转速转动。搅杆 ABC 用销钉 A，B 与齿轮 O_2，O_3 相连，如图所示。且 $AB = O_2O_3$，$O_3A = O_2B = 0.25$ m，各齿轮齿数为 $z_1 = 20$，$z_2 = 50$，$z_3 = 50$。求搅杆端点 C 的速度和轨迹。

7－4　机构如图所示，假定杆 AB 以匀速 $\boldsymbol{v}$ 运动，开始时 $\varphi = 0$。求当 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 时，摇杆 OC 的角速度和角加速度。

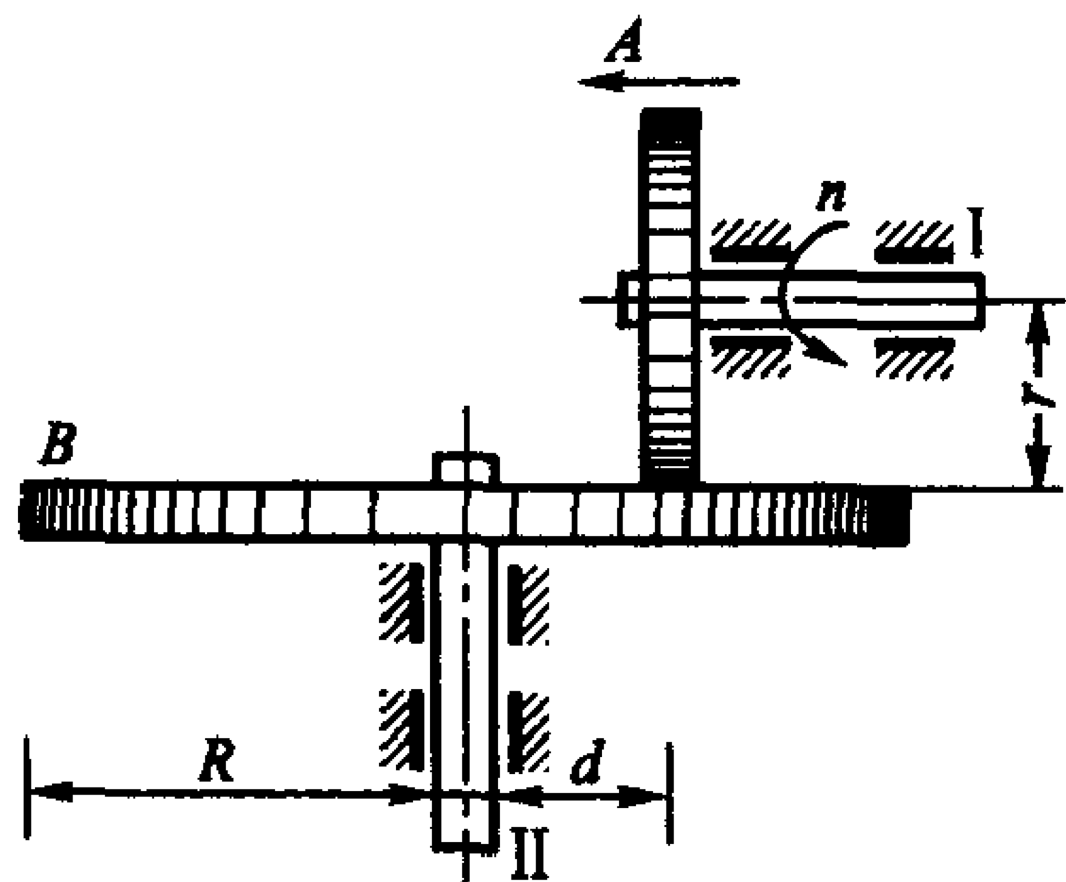
7－5　如图所示，曲柄 CB 以等角速度 ω_0 绕 C 轴转动，其转动方程为 $\varphi = \omega_0 t$。滑块 B 带动摇杆 OA 绕轴 O 转动。设 $OC = h$，$CB = r$。求摇杆的转动方程。



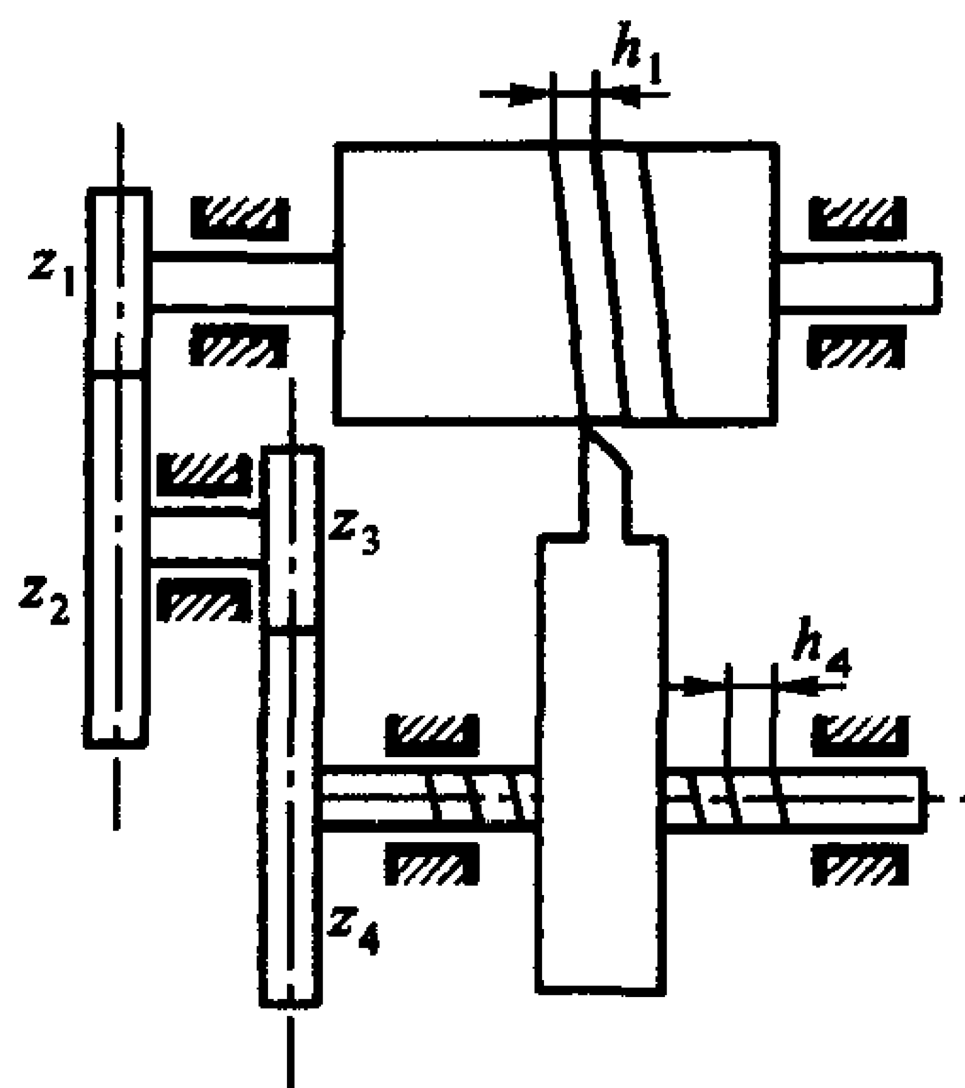
题 7－5 图

7－6　如图所示，摩擦传动机构的主动轴Ⅰ的转速为 $n = 600$ r/min。轴Ⅰ的轮盘与轴Ⅱ的轮盘接触，接触点按箭头 A 所示的方向移动。距离 d 的变化规律为 $d = 100 - 5t$，其中 d 以 mm 计，t 以 s 计。已知 $r = 50$ mm，$R = 150$ mm。求：(1)以距离 d 表示轴Ⅱ的角加速度；(2)当 $d = r$ 时，轮 B 边缘上一点的全加速度。

7-7　车床的传动装置如图所示。已知各齿轮的齿数分别为：$z_1=40$，$z_2=84$，$z_3=28$，$z_4=80$；带动刀具的丝杠的螺距为 $h_4=12$ mm。求车刀切削工件的螺距 h_1。

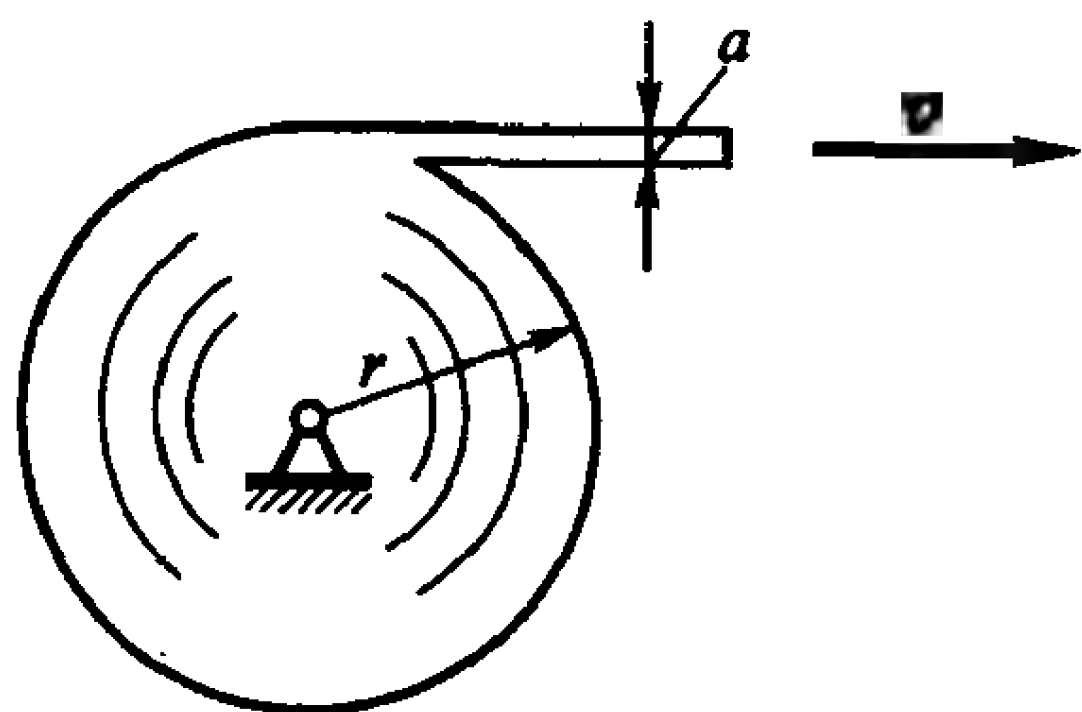


题 7-6 图

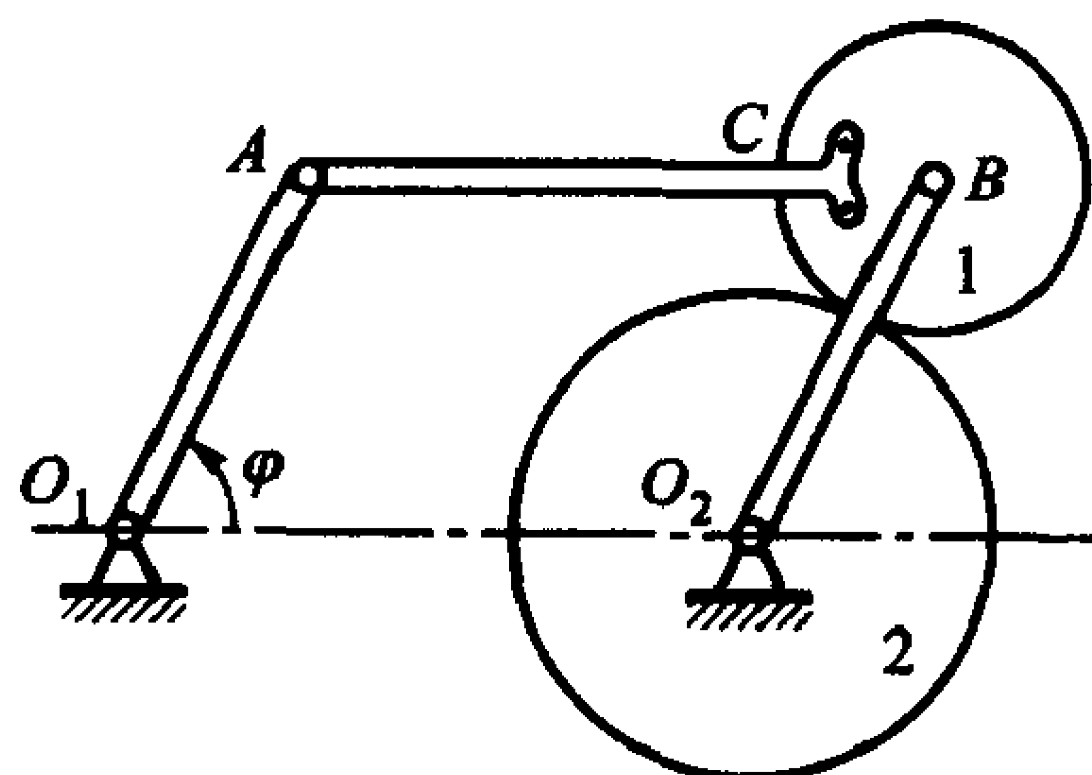


题 7-7 图

7-8　纸盘由厚度为 a 的纸条卷成，令纸盘的中心不动，而以等速 v 拉纸条。求纸盘的角加速度（以半径 r 的函数表示）。



题 7-8 图



题 7-9 图

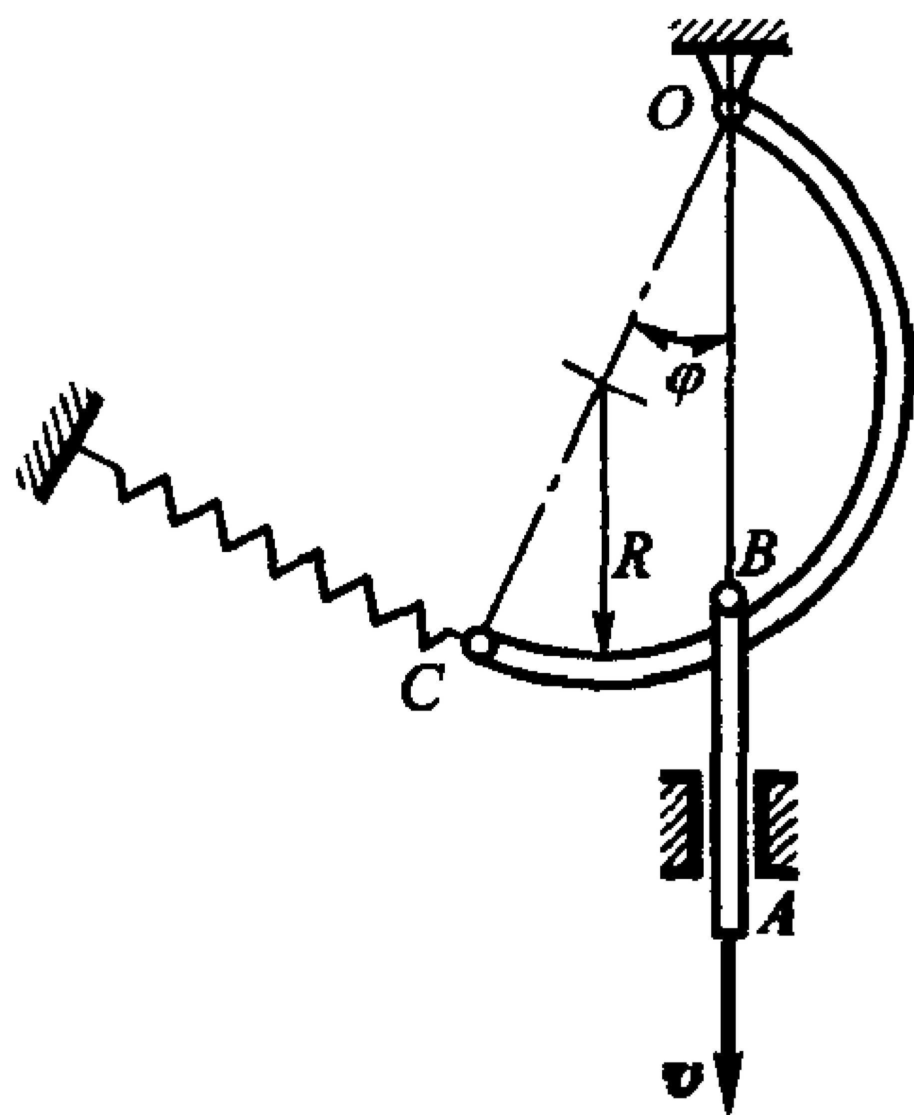
7-9　图示机构中齿轮 1 紧固在杆 AC 上，$AB=O_1O_2$，齿轮 1 和半径为 r_2 的齿轮 2 啮合，齿轮 2 可绕 O_2 轴转动且和曲柄 O_2B 没有联系。设 $O_1A=O_2B=l$，$\varphi=b\sin\omega t$，试确定 $t=\frac{\pi}{2\omega}$s 时，轮 2 的角速度和角加速度。

7-10　在上题图中，设机构从静止开始转动，轮 2 的角加速度为常量 α_2。求曲柄 O_1A 的转动规律。

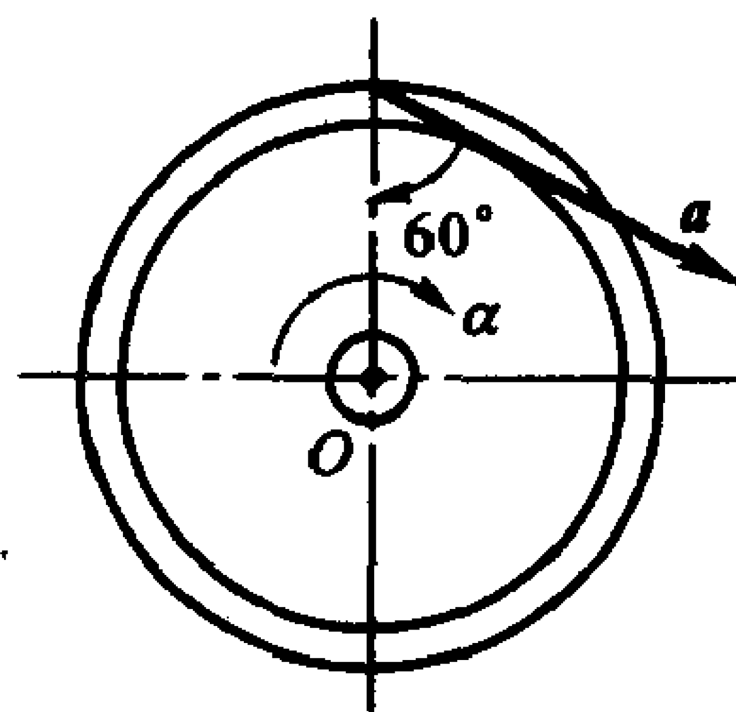
7-11　杆 AB 在铅垂方向以恒速 v 向下运动，并由 B 端的小轮带着半径为 R 的圆弧杆 OC 绕轴 O 转动，如图所示。设运动开始时，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，求此后任意瞬时 t，杆 OC 的角速度 ω 和点 C 的速度。

7-12　一飞轮绕固定轴 O 转动，其轮缘上任一点的全加速度在某段运动过程中与轮半径的交角恒为 60°。当运动开始时，其转角 φ_0 等于零，角速度为 ω_0。求飞轮的转动方程以及角速度与转角的关系。

7－13　半径 $R=100$ mm 的圆盘绕其圆心转动，图示瞬时，点 A 的速度为 $\boldsymbol{v}_A=200\boldsymbol{j}$ mm/s，点 B 的切向加速度 $\boldsymbol{a}_B^t=150\boldsymbol{i}$ mm/s²。求角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和角加速度 $\boldsymbol{\alpha}$，并进一步写出点 C 的加速度的矢量表达式。

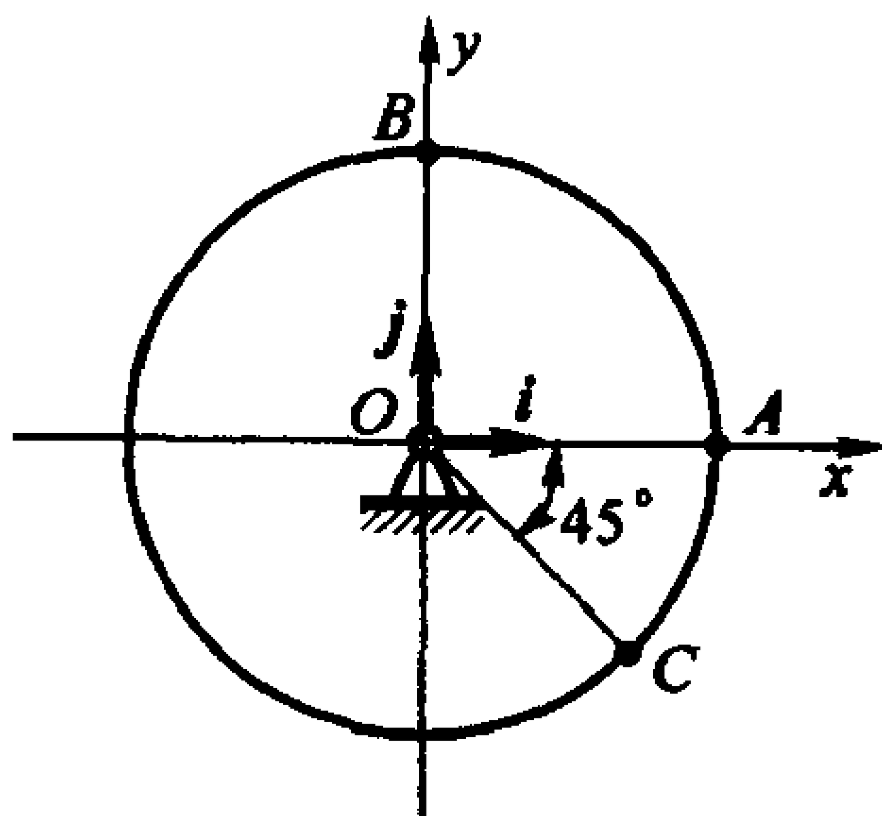


题 7－11 图

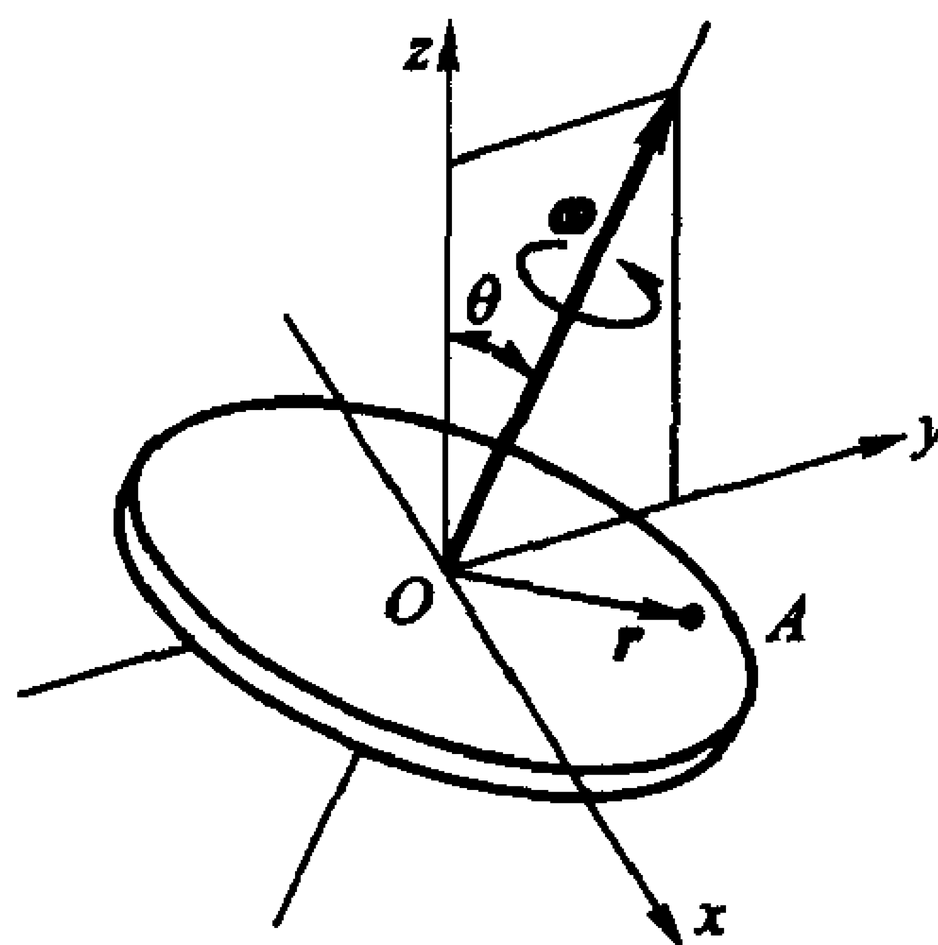


题 7－12 图

7－14　圆盘以恒定的角速度 $\omega=40$ rad/s 绕垂直于盘面的中心轴转动，该轴在 yz 面内，倾斜角 $\theta=\arctan\dfrac{3}{4}$。点 A 的矢径在图示瞬时为 $\boldsymbol{r}=150\boldsymbol{i}+160\boldsymbol{j}-120\boldsymbol{k}$ mm。求点 A 的速度和加速度的矢量表达式，并用 $v=R\omega$ 和 $a_n=R\omega^2$ 检验所得结果是否正确。



题 7－13 图



题 7－14 图

第八章　点的合成运动

前两章分析的点或刚体相对一个定参考系的运动，可称为简单运动。物体相对于不同参考系的运动是不相同的。研究物体相对于不同参考系的运动，分析物体相对于不同参考系运动之间的关系，可称为复杂运动或合成运动。

本章分析点的合成运动。分析运动中某一瞬时点的速度合成和加速度合成的规律。

§8-1　相对运动·牵连运动·绝对运动

物体的运动对于不同的参考体来说是不同的。如图 8-1 所示，沿直线轨道滚动的车轮，其轮缘上点 M 的运动，对于地面上的观察者来说，点的轨迹是旋轮线，但是对于车上的观察者来说，点的轨迹则是一个圆。又如图 8-2 所示，车床在工作时，车刀刀尖 M 相对于地面是直线运动，但是它相对于旋转的工件来说，却是圆柱面螺旋运动，因此，车刀在工件的表面上切出螺旋线。显然，在上述各例中，动点 M 相对于两个参考体的速度和加速度也都不同。

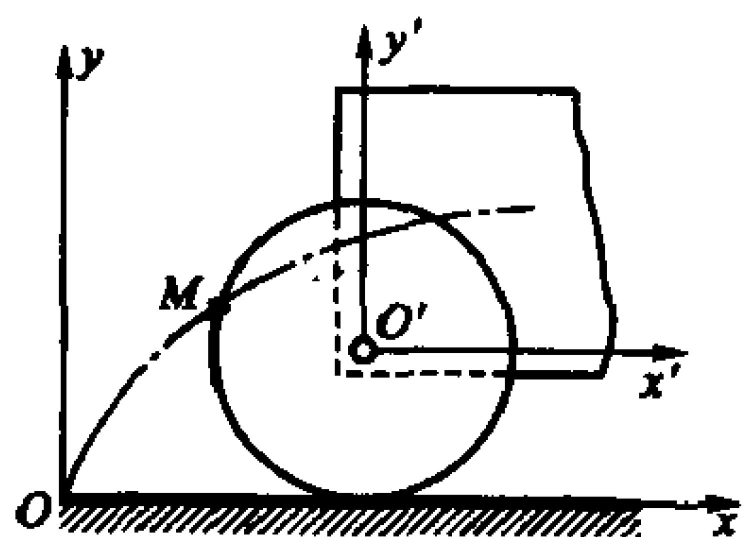


图 8-1

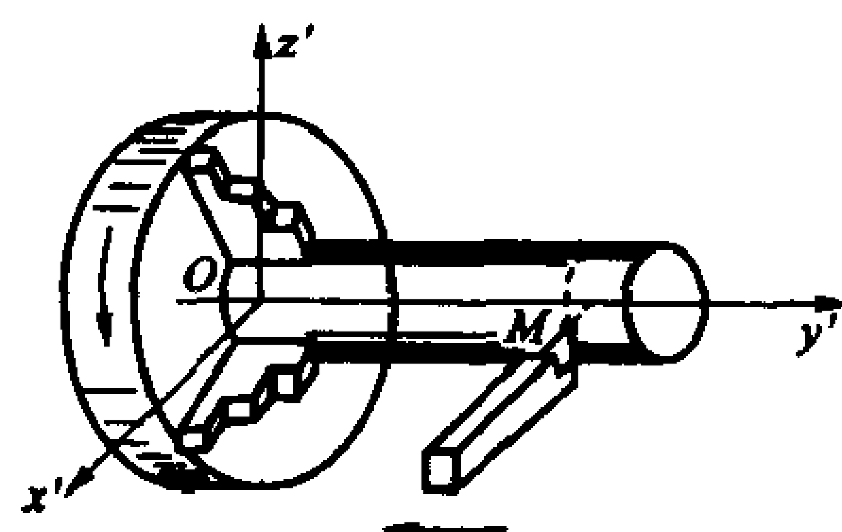


图 8-2

通过观察可以发现，物体对一参考体的运动可以由几个运动组合而成。例如，在上述的例子中，车轮上的点 M 是沿旋轮线运动，但是如果以车厢作为参考体，则点 M 相对于车厢的运动是简单的圆周运动，车厢相对于地面的运动是简单的平移。这样，轮缘上一点的运动就可以看成为两个简单运动的合成，即点 M 相对于车厢作圆周运动，同时车厢相对地面作平移。于是，相对于某一参考体的运动可由相对于其他参考体的几个运动组合而成，称这种运动为**合成运动**。

习惯上把固定在地球上的坐标系称为**定参考系**，简称定系，以 $Oxyz$ 坐标系表示；固定在其他相对于地球运动的参考体上的坐标系称为**动参考系**，简称动系，以 $O'x'y'z'$ 坐标系表示。在上述的前一例中，动参考系固定在车厢上；在后

一例中，动参考系则固定在工件上。

用点的合成运动理论分析点的运动时，必须选定两个参考系，区分三种运动：(1)动点相对于定参考系的运动，称为**绝对运动**；(2)动点相对于动参考系的运动，称为**相对运动**；(3)动参考系相对于定参考系的运动，称为**牵连运动**。仍以滚动的车轮为例：取轮缘上的一点 M 为动点，固结于车厢的坐标系为动参考系，则车厢相对于地面的平移是牵连运动；在车厢上看到点作圆周运动，这是相对运动；在地面上看到点沿旋轮线运动，这是绝对运动。注意，在分析这三种运动时，必须明确：(1)站在什么地方看物体的运动？(2)看什么物体的运动？

应该指出，动点的绝对运动和相对运动都是指点的运动，它可能作直线运动或曲线运动；而牵连运动则是参考体的运动，实际上是刚体的运动，它可能作平移、转动或其他较复杂的运动。

动点在相对运动中的轨迹、速度和加速度，称为**相对轨迹**、**相对速度**和**相对加速度**。动点在绝对运动中的轨迹、速度和加速度，称为**绝对轨迹**、**绝对速度**和**绝对加速度**。至于动点的**牵连速度**和**牵连加速度**的定义，必须特别注意。由于动参考系的运动是刚体的运动而不是一个点的运动，所以除非动参考系作平移，否则其上各点的运动都不完全相同。因为动参考系与动点直接相关的是动参考系上与动点相重合的那一点(此点称“牵连点”)，因此定义：在动参考系上与动点相重合的那一点(牵连点)的速度和加速度称为动点的牵连速度和牵连加速度。

今后，用 $\boldsymbol{v}_r$ 和 $\boldsymbol{a}_r$ 分别表示相对速度和相对加速度，用 $\boldsymbol{v}_a$ 和 $\boldsymbol{a}_a$ 分别表示绝对速度和绝对加速度，用 $\boldsymbol{v}_e$ 和 $\boldsymbol{a}_e$ 分别表示牵连速度和牵连加速度。

现在举例说明牵连速度和牵连加速度的概念。设水从喷管射出，喷管又绕 O 轴转动，转动角速度为 ω，角加速度为 α，如图 8-3 所示。将动参考系固定在喷管上，取水滴 M 为动点。显然，动点相对于喷管的运动为直线运动，因此，相对轨迹为直线 OA，相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 和相对加速度 $\boldsymbol{a}_r$ 都沿喷管 OA 方向。至于牵连速度 $\boldsymbol{v}_e$ 和牵连加速度 $\boldsymbol{a}_e$，则是喷管上与动点 M 重合的那一点(牵连点)的速度和加速度。喷管绕 O 轴转动，因此，牵连速度 $\boldsymbol{v}_e$ 的大小为

$$v_e = OM \cdot \omega$$

方向垂直于喷管，指向转动的一方。牵连加速度 $\boldsymbol{a}_e$ 的大小为

$$a_e = OM \cdot \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

它的方向与喷管成夹角

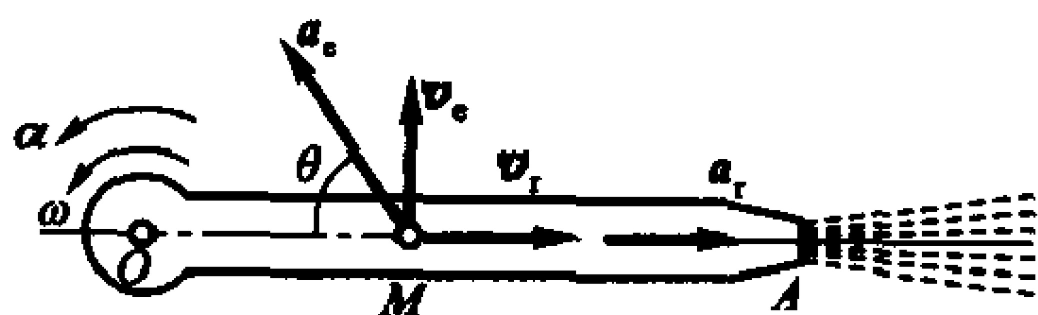


图 8-3

$$\theta = \arctan \frac{\alpha}{\omega^2}$$

偏向 α 所指的一边。

定参考系与动参考系是两个不同的坐标系，可以利用坐标变换来建立绝对、相对和牵连运动之间的关系。以平面问题为例，设 Oxy 是定系，$O'x'y'$ 是动系，M 是动点，如图 8－4 所示。动点 M 的绝对运动方程为

$$x = x(t),\qquad y = y(t)$$

动点 M 的相对运动方程为

$$x' = x'(t),\qquad y' = y'(t)$$

动系 $O'x'y'$ 相对于定系 Oxy 的运动可由如下三个方程完全描述

$$x_{O'} = x_{O'}(t),\quad y_{O'} = y_{O'}(t),\quad \varphi = \varphi(t)$$

这三个方程称为牵连运动方程，其中 φ 角是从 x 轴到 x' 轴的转角，以逆时针方向为正值。

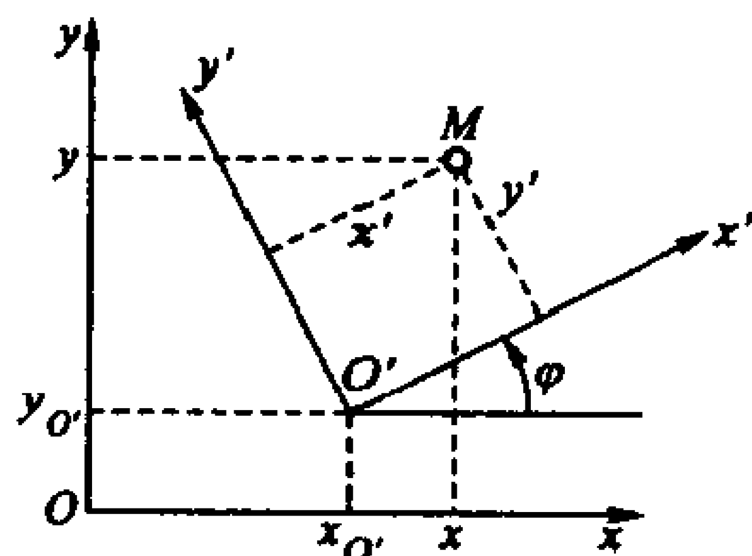


图 8－4

由图 8－4 可得动系 $O'x'y'$ 与定系 Oxy 之间的坐标变换关系为

$$\left.\begin{aligned} x &= x_{O'} + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y &= y_{O'} + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{8-1}$$

在点的绝对运动方程中消去时间 t，即得点的绝对运动轨迹；在点的相对运动方程中消去时间 t，即得点的相对运动轨迹。

例 8－1　点 M 相对于动系 $Ox'y'$ 沿半径为 r 的圆周以速度 $\boldsymbol{v}$ 作匀速圆周运动（圆心为 O_1），动系 $Ox'y'$ 相对于定系 Oxy 以匀角速度 ω 绕点 O 作定轴转动，如图 8－5 所示。初始时 $Ox'y'$ 与 Oxy 重合，点 M 与点 O 重合。求点 M 的绝对运动方程。

解：　连接 O_1M，由图 8－5 可知

$$\psi = \frac{vt}{r}$$

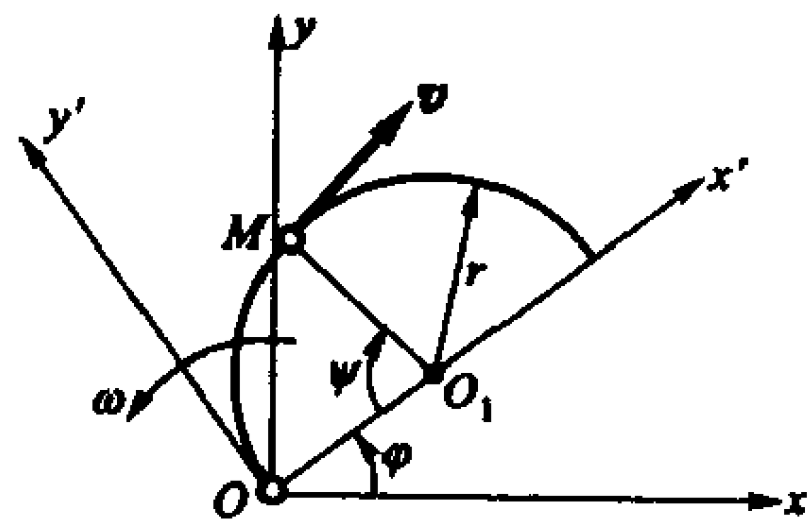


图 8－5

于是得点 M 的相对运动方程为

$$x' = OO_1 - O_1M\cos\psi = r\left(1-\cos\frac{vt}{r}\right)$$

$$y' = O_1M\sin\psi = r\sin\frac{vt}{r}$$

牵连运动方程为

$$x_{O'} = x_O = 0,\quad y_{O'} = y_O = 0\quad ,\varphi = \omega t$$

利用坐标变换关系式(8－1)，得点 M 的绝对运动方程为

$$x = r\left(1-\cos\frac{vt}{r}\right)\cos\omega t - r\sin\frac{vt}{r}\sin\omega t$$

$$y = r\left(1-\cos\frac{vt}{r}\right)\sin\omega t + r\sin\frac{vt}{r}\cos\omega t$$

例 8－2　已知点 M 在平面内运动，其绝对运动方程为

$$x = 5t^2 + 2t\cos 4t - 6t^2\sin 4t\qquad y = 3t + 2t\sin 4t + 6t^2\cos 4t$$

点 M 相对于动坐标系 $O'x'y'$ 的相对运动方程为

$$x' = 2t,\quad y' = 6t^2$$

求动坐标系原点 O' 的运动方程和动坐标轴的转动方程(牵连运动方程)。

解: 将 x,y 和 x',y' 代入坐标变换关系式(8-1),得

$$5t^2+2t\cos 4t-6t^2\sin 4t=x_{O'}+2t\cos\varphi-6t^2\sin\varphi$$

$$3t+2t\sin 4t+6t^2\cos 4t=y_{O'}+2t\sin\varphi+6t^2\cos\varphi$$

比较上式两端,可知牵连运动方程为

$$x_{O'}=5t^2,\quad y_{O'}=3t,\quad \varphi=4t$$

例 8-3 用车刀切削工件的直径端面,车刀刀尖 M 沿水平轴 x 作往复运动,如图 8-6 所示。设 Oxy 为定坐标系,刀尖的运动方程为 $x=b\sin\omega t$。工件以等角速度 ω 逆时针转向转动。求车刀在工件圆端面上切出的痕迹。

解: 根据题意,需求车刀刀尖 M 相对于工件的轨迹方程。

设刀尖 M 为动点,动参考系固定在工件上。则动点 M 在动坐标系 $Ox'y'$ 和定坐标系 Oxy 中的坐标关系为

$$x'=x\cos\omega t\qquad y'=-x\sin\omega t$$

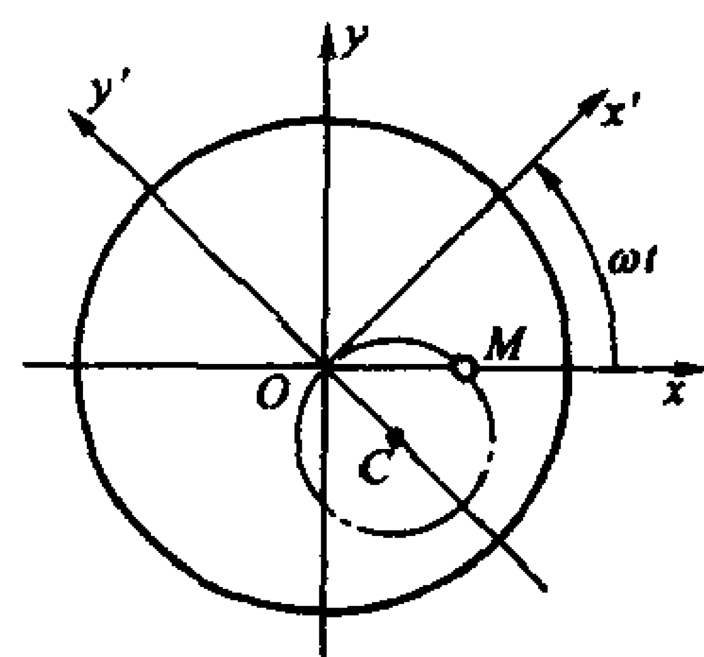


图 8-6

将点 M 的绝对运动方程代入上式中,得

$$x'=b\sin\omega t\cos\omega t=\frac{b}{2}\sin 2\omega t$$

$$y'=-b\sin^2\omega t=-\frac{b}{2}(1-\cos 2\omega t)$$

上式就是车刀相对于工件的运动方程。

从上式中消去时间 t,得刀尖的相对轨迹方程

$$(x')^2+\left(y'+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}$$

可见,车刀在工件上切出的痕迹是一个半径为 $\frac{b}{2}$ 的圆,该圆的圆心 C 在动坐标轴 Oy' 上,圆周通过工件的中心 O。

§8-2 点的速度合成定理

下面研究点的相对速度、牵连速度和绝对速度三者之间的关系。

在图 8-7 中,$Oxyz$ 为定参考系,$O'x'y'z'$ 为动参考系。动系坐标原点 O' 在定系中的矢径为 $\boldsymbol{r}_{O'}$,动系的三个单位矢量分别为 $\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$。动点 M 在定系中的矢径为 $\boldsymbol{r}_M$,在动系中的矢径为 $\boldsymbol{r}'$。动系上与动点重合的点(即牵连点)记为 M',它在定系中的矢径为 $\boldsymbol{r}_{M'}$。有如下关系:

$$\boldsymbol{r}_M=\boldsymbol{r}_{O'}+\boldsymbol{r}'$$

$$\boldsymbol{r}'=x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}'$$

在图示瞬时还有

$$\boldsymbol{r}_M=\boldsymbol{r}_{M'}$$

动点的相对速度$\boldsymbol{v}_r$为

$$\boldsymbol{v}_r=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=\dot{x}'\boldsymbol{i}'+\dot{y}'\boldsymbol{j}'+\dot{z}'\boldsymbol{k}' \quad (8-2)$$

由于相对速度$\boldsymbol{v}_r$是动点相对于动参考系的速度，因此在求导时将动系的三个单位矢量$\boldsymbol{i}'$，$\boldsymbol{j}'$，$\boldsymbol{k}'$视为常矢量。这种导数称为**相对导数**，在导数符号上加“～”表示，今后凡是用这一符号均代表相对导数。

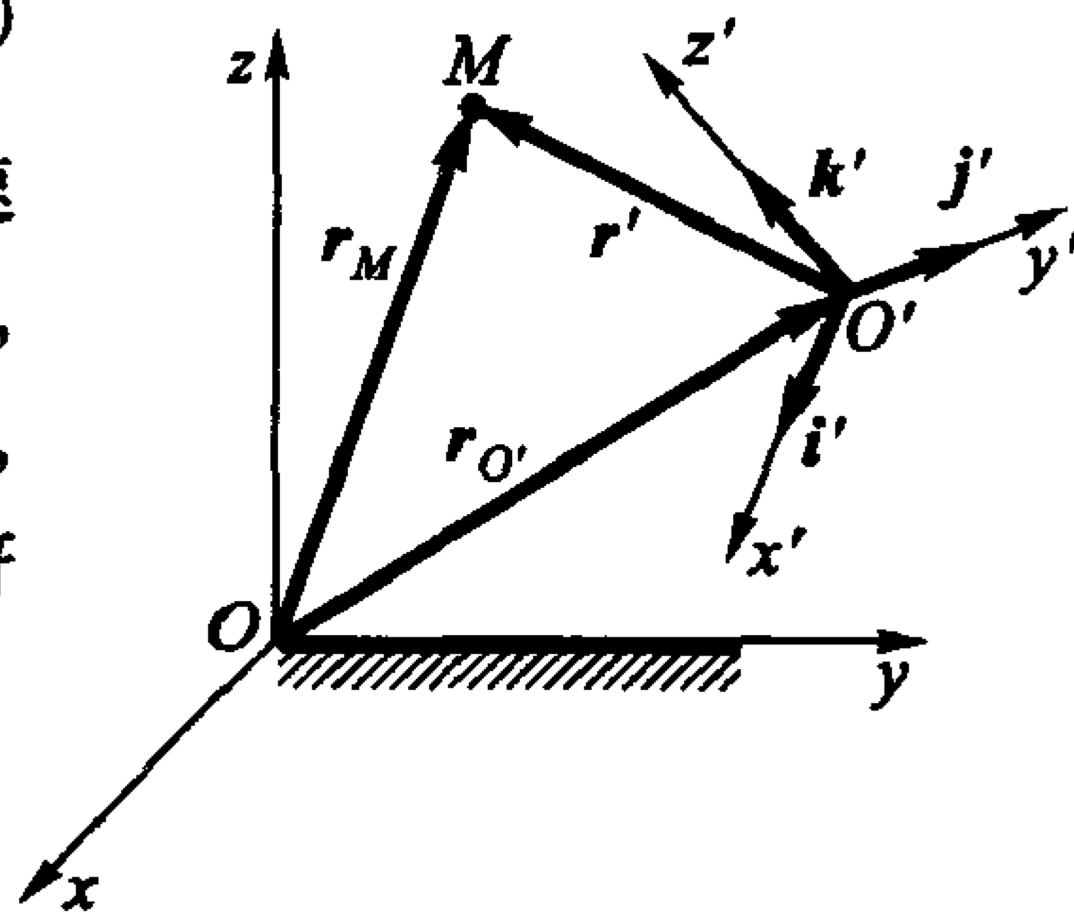


图 8－7

动点的牵连速度$\boldsymbol{v}_e$为

$$\boldsymbol{v}_e=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{M'}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}+x'\dot{\boldsymbol{i}}'+y'\dot{\boldsymbol{j}}'+z'\dot{\boldsymbol{k}}' \quad (8-3)$$

牵连速度是牵连点M'的速度，该点是动系上的点，因此它在动系上的坐标x'，y'，z'是常量。

动点的绝对速度$\boldsymbol{v}_a$为

$$\boldsymbol{v}_a=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_M}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}}_{O'}+x'\dot{\boldsymbol{i}}'+y'\dot{\boldsymbol{j}}'+z'\dot{\boldsymbol{k}}'+\dot{x}'\boldsymbol{i}'+\dot{y}'\boldsymbol{j}'+\dot{z}'\boldsymbol{k}' \quad (8-4)$$

绝对速度是动点相对于定系的速度，动点在动系中的三个坐标x'，y'，z'是时间的函数；同时由于动系在运动，动系的三个单位矢量的方向也在不断变化，因此$\boldsymbol{i}'$，$\boldsymbol{j}'$，$\boldsymbol{k}'$也是时间的函数。

由于动点M与牵连点M'仅在该瞬时重合，其他瞬时并不重合，因此$\boldsymbol{r}_M$与$\boldsymbol{r}_{M'}$对时间的导数是不同的。

将式(8－2)、(8－3)、代入式(8－4)得

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r \quad (8-5)$$

由此得到点的速度合成定理：动点在某瞬时的绝对速度等于它在该瞬时的牵连速度与相对速度的矢量和。即动点的绝对速度可以由牵连速度与相对速度所构成的平行四边形的对角线来确定。这个平行四边形称为速度平行四边形。

应该指出，在推导速度合成定理时，并未限制动参考系作什么样的运动，因此这个定理适用于牵连运动是任何运动的情况，即动参考系可作平移、转动或其他任何较复杂的运动。

下面举例说明点的速度合成定理的应用。

例 8－4　刨床的急回机构如图 8－8 所示。曲柄OA的一端A与滑块用铰链连接。当曲柄OA以匀角速度ω绕固定轴O转动时，滑块在摇杆O_1B上滑动，并带动摇杆O_1B绕固定轴O_1摆动。设曲柄长$OA=r$，两轴间距离$OO_1=l$。求当曲柄在水平位置时摇杆的角速度ω_1。

解：　在本题中应选取曲柄端点A作为研究的动点，把动参考系$O_1x'y'$固定在摇杆

O_1B 上,并与 O_1B 一起绕 O_1 轴摆动。

点 A 的绝对运动是以点 O 为圆心的圆周运动,相对运动是沿 O_1B 方向的直线运动,而牵连运动则是摇杆绕 O_1 轴的摆动。

于是,绝对速度 $\boldsymbol{v}_a$ 的大小和方向都是已知的,它的大小等于 $r\omega$,方向与曲柄 OA 垂直;相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 的方向是已知的,即沿 O_1B;而牵连速度 $\boldsymbol{v}_e$ 是杆 O_1B 上与点 A 重合的那一点的速度,它的方向垂直于 O_1B,也是已知的。共计有四个要素已知。由于 $\boldsymbol{v}_a$ 的大小和方向都已知,因此,这是一个速度分解的问题。

根据速度合成定理,作出速度平行四边形,如图 8-8 所示。由其中的直角三角形可求得

$$v_e = v_a \sin\varphi$$

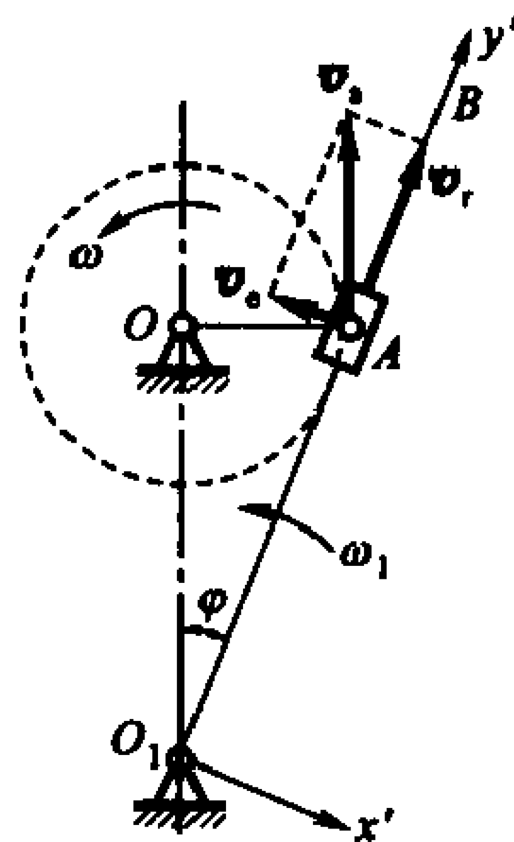


图 8-8

又 $\sin\varphi = \dfrac{r}{\sqrt{l^2+r^2}}$,且 $v_a = r\omega$,所以

$$v_e = \frac{r^2\omega}{\sqrt{l^2+r^2}}$$

设摇杆在此瞬时的角速度为 ω_1,则

$$v_e = O_1A\cdot\omega_1 = \frac{r^2\omega}{\sqrt{l^2+r^2}}$$

其中 $O_1A = \sqrt{l^2+r^2}$。

由此得出此瞬时摇杆的角速度为

$$\omega_1 = \frac{r^2\omega}{l^2+r^2}$$

方向如图。

例 8-5 如图 8-9 所示,半径为 R、偏心距为 e 的凸轮,以匀角速度 ω 绕 O 轴转动,杆 AB 能在滑槽中上下平移,杆的端点 A 始终与凸轮接触,且 OAB 成一直线。求在图示位置时,杆 AB 的速度。

解: 因为杆 AB 作平移,各点速度相同,因此只要求出其上任一点的速度即可。选取杆 AB 的端点 A 作为研究的动点,动参考系随凸轮一起绕 O 轴转动。

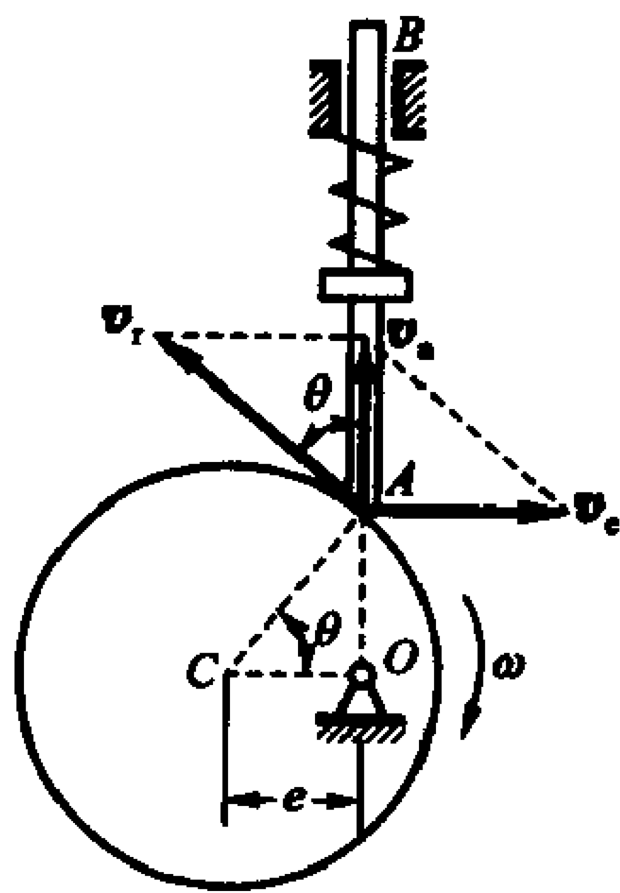


图 8-9

点 A 的绝对运动是直线运动,相对运动是以凸轮中心 C 为圆心的圆周运动,牵连运动则是凸轮绕 O 轴的转动。

于是,绝对速度方向沿 AB,相对速度方向沿凸轮圆周的切线,而牵连速度为凸轮上与杆端 A 点重合的那一点的速度,它的方向垂直于 OA,它的大小为 $v_e = \omega\cdot OA$。根据速度合成定理,已知四个要素,即可作出速度平行四边形,如图 8-9 所示。由三角关系求得杆的绝对速度为

$$v_a = v_e\cot\theta = \omega\cdot OA\,\frac{e}{OA} = \omega e$$

例 8-6 矿砂从传送带 A 落到另一传送带 B 上,如图 8-10a 所示。站在地面上观察矿砂下落的速度为 $v_1 = 4$ m/s,方向与铅直线成 30°角。已知传送带 B 水平传动速度 $v_2 = 3$ m/s。

求矿砂相对于传送带B的速度。

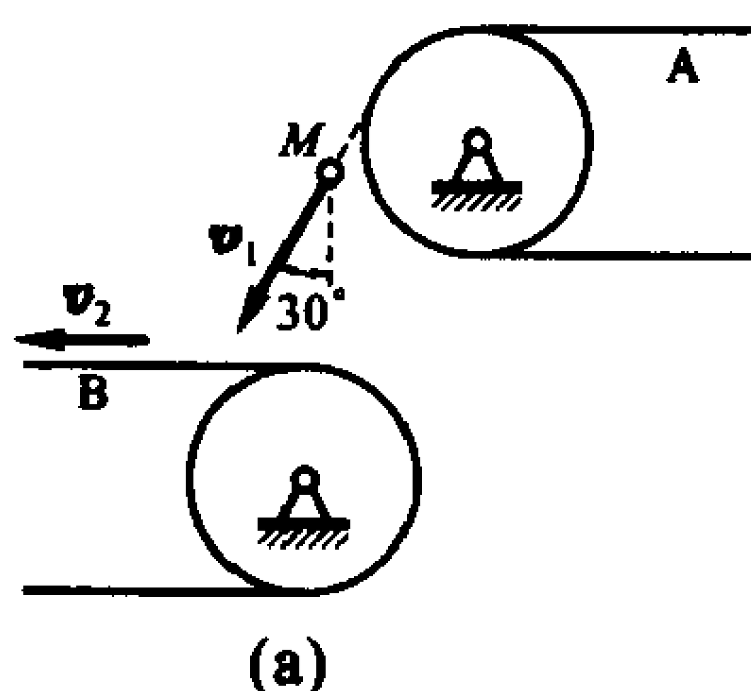
解： 以矿砂 M 为动点，动参考系固定在传送带B上。矿砂相对地面的速度 $\boldsymbol{v}_1$ 为绝对速度；牵连速度应为动参考系上与动点相重合的那一点的速度。因为动参考系为无限大，由于它作平移，各点速度都等于 $\boldsymbol{v}_2$。于是 $\boldsymbol{v}_2$ 等于动点 M 的牵连速度。

由速度合成定理知，三种速度形成平行四边形，绝对速度必须是对角线，因此作出的速度平行四边形如图8-10b所示。根据几何关系求得

$$v_r=\sqrt{v_e^2+v_a^2-2v_e v_a\cos 60^\circ}=3.6\ \mathrm{m/s}$$

$\boldsymbol{v}_r$ 与 $\boldsymbol{v}_a$ 间的夹角为

$$\beta=\arcsin\left(\frac{v_e}{v_r}\sin 60^\circ\right)=46^\circ 12'$$



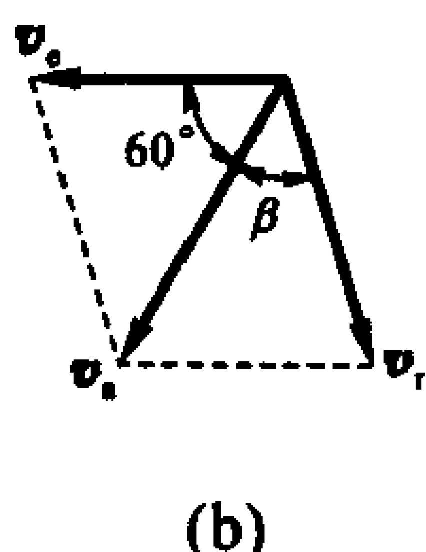


图8-10

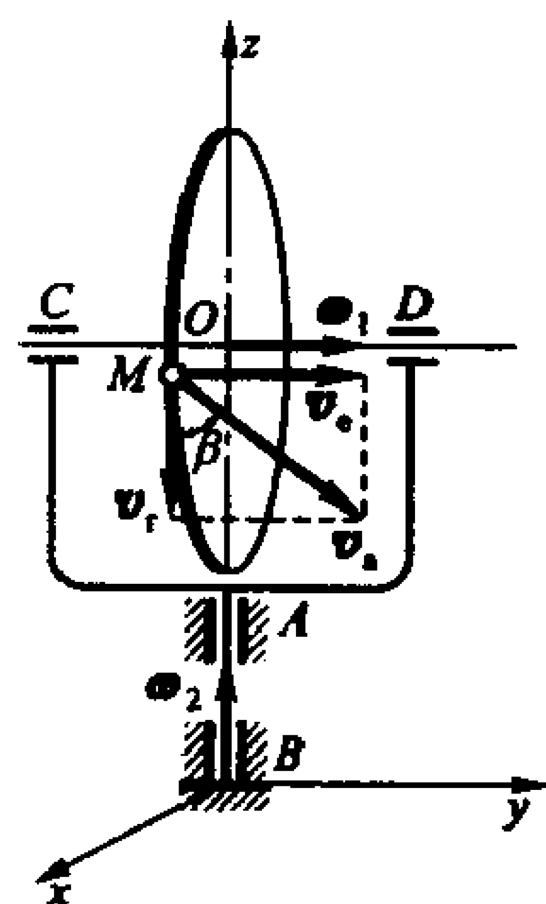


图8-11

例8-7 圆盘半径为 R，以角速度 ω_1 绕水平轴 CD 转动，支承 CD 的框架又以角速度 ω_2 绕铅直的 AB 轴转动，如图8-11所示。圆盘垂直于 CD，圆心在 CD 与 AB 的交点 O 处。求当连线 OM 在水平位置时，圆盘边缘上的点 M 的绝对速度。

解： 以点 M 为动点，动参考系与框架固结。点 M 的相对运动是以 O 为圆心、在铅直平面内的圆周运动，相对速度垂直于 OM，方向朝下，大小为

$$v_r=R\omega_1$$

点 M 的牵连速度应为动参考系上与动点 M 相重合的那一点的速度，是绕 z 轴以角速度 ω_2 转动的动参考系上该点的速度，因此

$$v_e=R\omega_2$$

速度矢 $\boldsymbol{v}_e$ 在水平面内，垂直于半径 OM。于是 $\boldsymbol{v}_e$ 垂直 $\boldsymbol{v}_r$。根据点的速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

得

$$v_a=\sqrt{v_e^2+v_r^2}=R\sqrt{\omega_2^2+\omega_1^2}$$

$$\tan\beta=\frac{v_e}{v_r}=\frac{\omega_2}{\omega_1}$$

式中的 β 为 $\boldsymbol{v}_a$ 与铅直线间的夹角。

总结以上各例的解题步骤如下：

(1) 选取动点、动参考系和定参考系。所选的参考系应能将动点的运动分解成为相对运动和牵连运动。因此,动点和动参考系不能选在同一个物体上;一般应使相对运动易于看清。

(2) 分析三种运动和三种速度。相对运动是怎样的一种运动(直线运动、圆周运动或其他某种曲线运动)? 牵连运动是怎样的一种运动(平移、转动或其他某一种刚体运动)? 绝对运动是怎样的一种运动(直线运动、圆周运动或其他某一种曲线运动)? 各种运动的速度都有大小和方向两个要素,只有已知四个要素时才能画出速度平行四边形。

(3) 应用速度合成定理,作出速度平行四边形。必须注意,作图时要使绝对速度成为平行四边形的对角线。

(4) 利用速度平行四边形中的几何关系解出未知数。

§8-3　点的加速度合成定理

为便于推导,先分析动参考系为定轴转动时,其单位矢量 $\boldsymbol{i}'$,$\boldsymbol{j}'$,$\boldsymbol{k}'$对时间的导数。

设动参考系 $O'x'y'z'$以角速度 ω_e 绕定轴转动,角速度矢为 $\boldsymbol{\omega}_e$。不失一般性,可把定轴取为定坐标轴的 z 轴,如图 8-12 所示。

先分析 $\boldsymbol{k}'$对时间的导数。设 $\boldsymbol{k}'$的矢端点 A 的矢径为$\boldsymbol{r}_A$,则点 A 的速度既等于矢径$\boldsymbol{r}_A$ 对时间的一阶导数,又可用角速度矢 $\boldsymbol{\omega}_e$ 和矢径 $\boldsymbol{r}_A$ 的矢积表示,即

$$\boldsymbol{v}_A=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{r}_A$$

由图 8-12,有

$$\boldsymbol{r}_A=\boldsymbol{r}_{O'}+\boldsymbol{k}'$$

其中 $\boldsymbol{r}_{O'}$为动系原点 O'的矢径,将上式代入前式,得

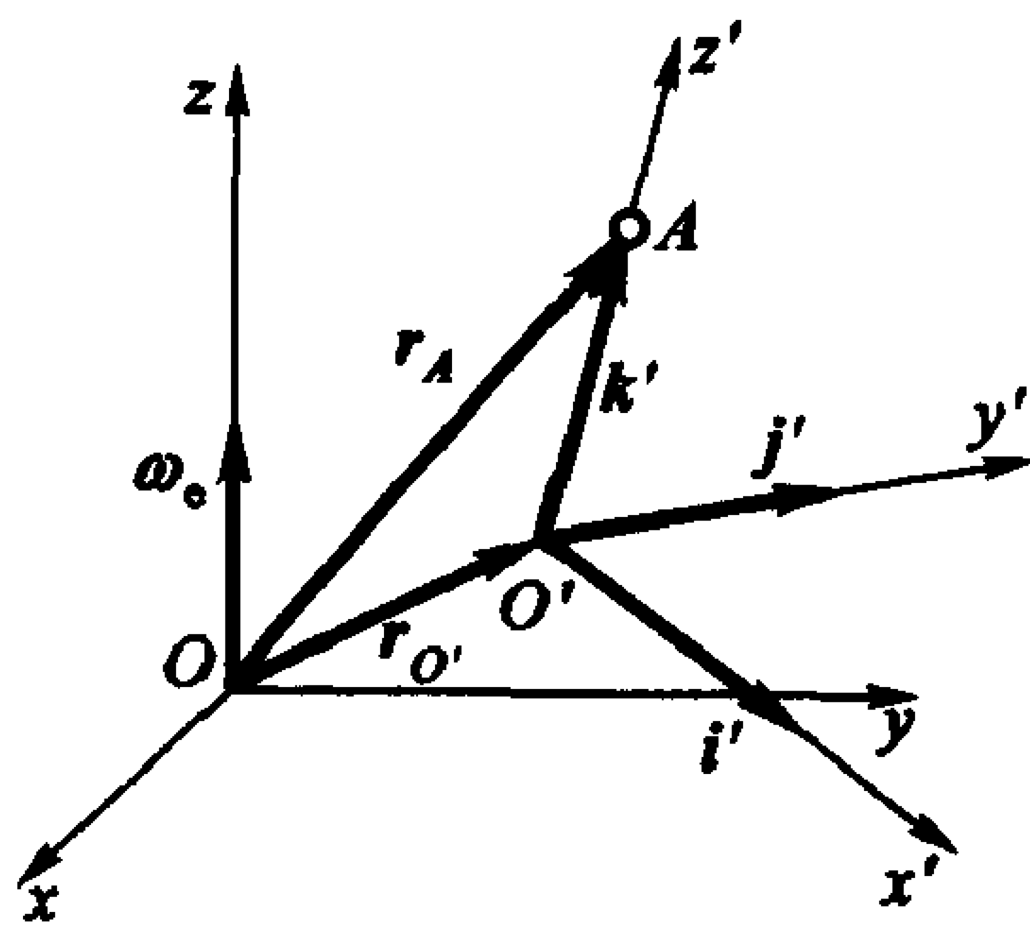


图 8-12

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{O'}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}_e\times(\boldsymbol{r}_{O'}+\boldsymbol{k}')$$

由于动系原点 O'的速度为

$$\boldsymbol{v}_{O'}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{O'}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{r}_{O'}$$

代入前式,得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{k}'$$

$\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}'$的导数与上式相似,合写为

$$\dot{\boldsymbol{i}}'=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{i}',\qquad \dot{\boldsymbol{j}}'=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{j}',\qquad \dot{\boldsymbol{k}}'=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{k}' \tag{8-6}$$

式(8-6)是在动系作定轴转动情况下证明的。当动参考系作任意运动时,可以证明式(8-6)仍然是正确的,这时 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}$ 为动系在该瞬时的角速度矢。

下面推导点的加速度合成定理。观察上一节的图(8-7),各符号及字母的意义与上节相同,并设动系在该瞬时的角速度矢为 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}$。

动点的相对加速度为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{x}'\boldsymbol{i}'+\ddot{y}'\boldsymbol{j}'+\ddot{z}'\boldsymbol{k}' \tag{8-7}$$

由于相对加速度是动点相对于动系的加速度,即在动系上观察的动点的加速度,因此使用相对导数,$\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$为常矢量。

动点的牵连加速度为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_{M'}}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}+x'\ddot{\boldsymbol{i}}'+y'\ddot{\boldsymbol{j}}'+z'\ddot{\boldsymbol{k}}' \tag{8-8}$$

由于牵连加速度是动系上与动点重合那一点即牵连点 M'的加速度,该点是动系上的点,因此点 M'在动系上的坐标x',y',z'是常量。

动点的绝对加速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_{M}}{\mathrm{d}t^2}&=\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}+x'\ddot{\boldsymbol{i}}'+y'\ddot{\boldsymbol{j}}'+z'\ddot{\boldsymbol{k}}'\\&+\ddot{x}'\boldsymbol{i}'+\ddot{y}'\boldsymbol{j}'+\ddot{z}'\boldsymbol{k}'\\&+2(\dot{x}'\dot{\boldsymbol{i}}'+\dot{y}'\dot{\boldsymbol{j}}'+\dot{z}'\dot{\boldsymbol{k}}')\end{aligned} \tag{8-9}$$

绝对加速度是动点相对于定系的加速度,动点在动系中的坐标 x',y',z'是时间的函数;同时由于动系在运动,动系的三个单位矢 $\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$的方向也在不断变化,它们也是时间的函数,因此有式(8-9)的结果。

由式(8-6)及式(8-2),有

$$\begin{aligned}2(\dot{x}'\dot{\boldsymbol{i}}'+\dot{y}'\dot{\boldsymbol{j}}'+\dot{z}'\dot{\boldsymbol{k}}')&=2[\dot{x}'(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{i}')+\dot{y}'(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{j}')+\dot{z}'(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{k}')]\\&=2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times(\dot{x}'\boldsymbol{i}'+\dot{y}'\boldsymbol{j}'+\dot{z}'\boldsymbol{k}')\\&=2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}\end{aligned} \tag{8-10}$$

将式(8-7)、(8-8)及式(8-10)代入式(8-9),得

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

令

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}=2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} \tag{8-11}$$

称 $\boldsymbol{a}_C$ 为**科氏加速度**，其等于动系角速度矢与点的相对速度矢的矢积的两倍。于是，有

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C \tag{8-12}$$

上式表示点的加速度合成定理：动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时它的牵连加速度、相对加速度与科氏加速度的矢量和。

当牵连运动为任意运动时式(8-12)都成立，它是点的加速度合成定理的普遍形式。

根据矢积运算规则，$\boldsymbol{a}_C$ 的大小为

$$a_C=2\omega_e v_r\sin\theta$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{\omega}_e$ 与 $\boldsymbol{v}_r$ 两矢量间的最小夹角。矢 $\boldsymbol{a}_C$ 垂直于 $\boldsymbol{\omega}_e$ 和 $\boldsymbol{v}_r$，指向按右手法则确定，如图 8-13 所示。

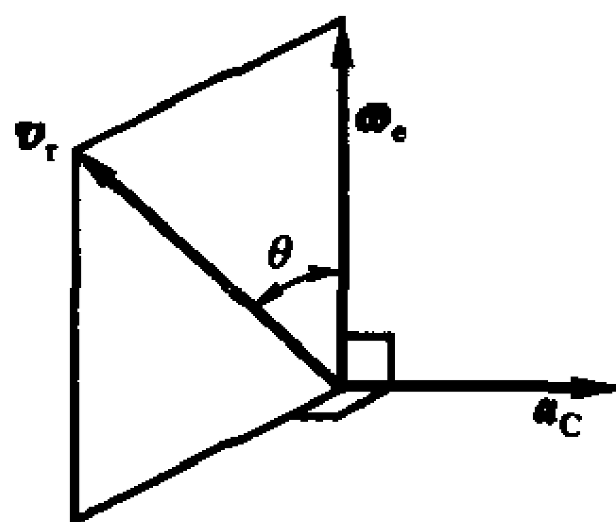


图 8-13

当 $\boldsymbol{\omega}_e$ 和 $\boldsymbol{v}_r$ 平行时($\theta=0°$或 180°)，$\boldsymbol{a}_C=0$；当 $\boldsymbol{\omega}_e$ 与 $\boldsymbol{v}_r$ 垂直时，$a_C=2\omega_e v_r$。

工程常见的平面机构中，$\boldsymbol{\omega}_e$ 是与 $\boldsymbol{v}_r$ 垂直的，此时 $a_C=2\omega_e v_r$；且 $\boldsymbol{v}_r$ 按 ω_e 转向转动 90°就是 $\boldsymbol{a}_C$ 的方向。

当牵连运动为平移时，$\boldsymbol{\omega}_e=0$，因此 $a_C=0$，此时有

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r \tag{8-13}$$

这表明，当牵连运动为平移时，动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时它的牵连加速度与相对加速度的矢量和。式(8-13)称为牵连运动为平移时点的加速度合成定理。

科氏加速度是由于动系为转动时，牵连运动与相对运动相互影响而产生的。现通过一例给以形象的说明。

在图 8-14a 中，动点沿直杆 AB 运动，而杆又绕 A 轴匀速转动。设动系固结在杆 AB 上。在瞬时 t，动点在 M 处，它的相对速度和牵连速度分别为 $\boldsymbol{v}_r$ 和 $\boldsymbol{v}_e$。经过时间间隔 Δt 后，杆转到位置 AB'，动点移动到 M_3，这时它的相对速度为 $\boldsymbol{v}'_r$，牵连速度为 $\boldsymbol{v}'_e$。

如果杆 AB 不转动，则 $t+\Delta t$ 时刻动点的相对速度是图中的 $\boldsymbol{v}_{r2}$；由于牵连运动是转动，使 $t+\Delta t$ 时刻动点的相对速度的方向又发生变化，变为图中的 $\boldsymbol{v}'_r$。相对加速度是在动系 AB 上观察的，只反映出由 $\boldsymbol{v}_r$ 到 $\boldsymbol{v}_{r2}$ 的速度变化，而由 $\boldsymbol{v}_{r2}$ 变为 $\boldsymbol{v}'_r$，则反映为科氏加速度的一部分(见图 8-14b)。

如果没有相对运动，则 $t+\Delta t$ 时刻点 M 移到 M_1，牵连速度应为图中的 $\boldsymbol{v}_{M1}$；由于有相对运动，使 $t+\Delta t$ 时刻的牵连速度不同于 $\boldsymbol{v}_{M1}$ 而变为图中的 $\boldsymbol{v}'_e$。牵连加速度是动系上 M 点的加速度，只反映出由 $\boldsymbol{v}_e$ 到 $\boldsymbol{v}_{M1}$ 的速度变化，而由 $\boldsymbol{v}_{M1}$ 变为 $\boldsymbol{v}'_e$，则反映为科氏加速度的另一部分(见图 8-14c)。

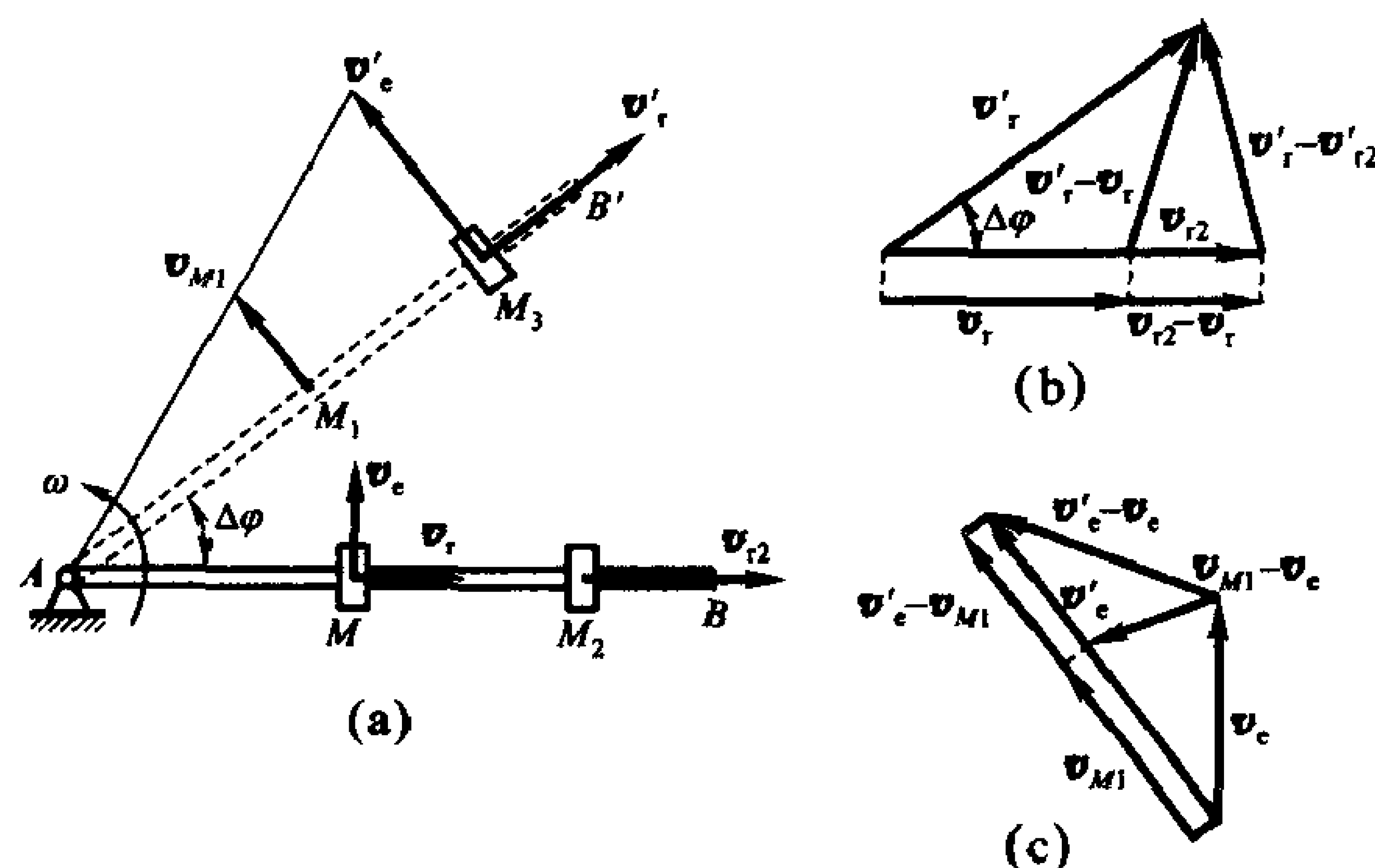


图 8－14

上面的分析表明(见图 8－14)：

$$\boldsymbol{a}_e=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}_{M1}-\boldsymbol{v}_e}{\Delta t},\qquad \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_e}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}_e'-\boldsymbol{v}_e}{\Delta t}$$

$$\boldsymbol{a}_r=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}_{r2}-\boldsymbol{v}_r}{\Delta t},\qquad \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}_r'-\boldsymbol{v}_r}{\Delta t}$$

科氏加速度 $\boldsymbol{a}_C$，正是由此产生。下面两个等式读者可自行证明：

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{v}_r\qquad \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_e}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{v}_r$$

科氏加速度是 1832 年由科利奥里发现的，因而命名为科利奥里加速度，简称科氏加速度。科氏加速度在自然现象中是有所表现的。

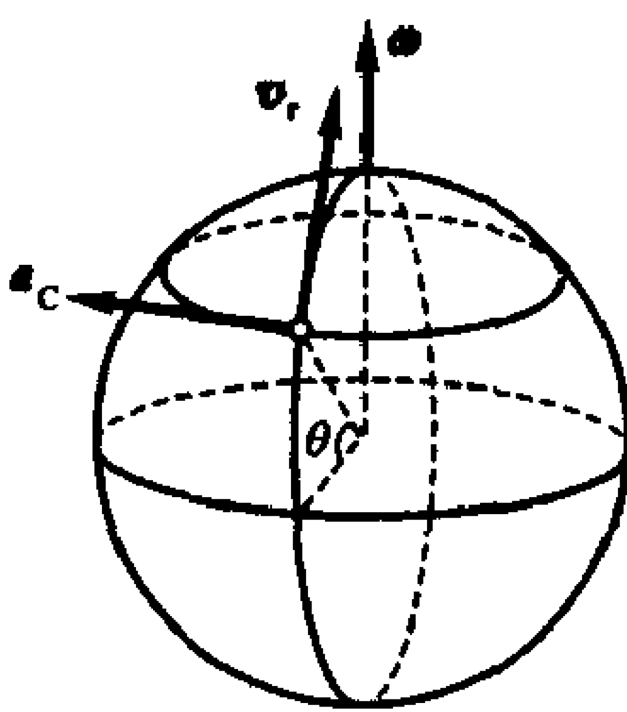


图 8－15

地球绕地轴转动，地球上物体相对于地球运动，这都是牵连运动为转动的合成运动。地球自转角速度很小，一般情况下其自转的影响可略去不计；但是在某些情况下，却必须给予考虑。

例如，在北半球，河水向北流动时，河水的科氏加速度 $\boldsymbol{a}_C$ 向西，即指向左侧，如图 8－15 所示。由动力学可知，有向左的加速度，河水必受有右岸对水的向左的作用力。根据作用与反作用定律，河水必对右岸有反作用力。北半球的江河，其右岸都受有较明显的冲刷，这是地理学中的一项规律。

例 8－8　空气压缩机的工作轮以角速度 ω 绕垂直于图面的 O 轴匀速转动，空气以相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 沿弯曲的叶片匀速流动，如图 8－16 所示。如曲线 AB 在点 C 的曲率半径为 ρ，通过点 C 的法线与半径间所夹的角为 φ，$CO=r$，求气体微团在点 C 的绝对加速度 $\boldsymbol{a}_a$。

解：　取气体微团为动点，动参考系固定在工作轮上，定参考系固定于地面。因动参考系作转动，故气体微团在点 C 的绝对加速度为相对、牵连和科氏加速度三项的合成。现分别求这三项加速度。

$\boldsymbol{a}_e$:等于动参考系上的点 C 的加速度。因工作轮匀速转动,故只有向心加速度,即

$$a_e = \omega^2 r$$

方向如图所示。

$\boldsymbol{a}_r$:由于气体微团相对于叶片作匀速曲线运动,故只有法向加速度,即

$$a_r = \frac{v_r^2}{\rho}$$

方向如图所示。

$\boldsymbol{a}_C$:由

$$\boldsymbol{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{v}_r$$

可确定 $\boldsymbol{a}_C$ 在图示平面内,并与 $\boldsymbol{v}_r$ 垂直,指向如图所示。它的大小为

$$a_C = 2\omega v_r \sin 90° = 2\omega v_r$$

根据加速度合成定理:

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

将其分别投影到 Ox' 及 Oy' 轴上,得

$$a_{ax'} = a_{ex'} + a_{rx'} + a_{Cx'} = 0 - \frac{v_r^2}{\rho}\sin\varphi + 2\omega v_r \sin\varphi = \left(2\omega v_r - \frac{v_r^2}{\rho}\right)\sin\varphi$$

$$a_{ay'} = a_{ey'} + a_{ry'} + a_{Cy'} = -r\omega^2 + \frac{v_r^2}{\rho}\cos\varphi - 2\omega v_r\cos\varphi = \left(\frac{v_r^2}{\rho} - 2\omega v_r\right)\cos\varphi - r\omega^2$$

于是,绝对加速度的大小可按下式求得

$$a_a = \sqrt{a_{ax'}^2 + a_{ay'}^2}$$

$\boldsymbol{a}_a$ 的方向可由其方向余弦确定。

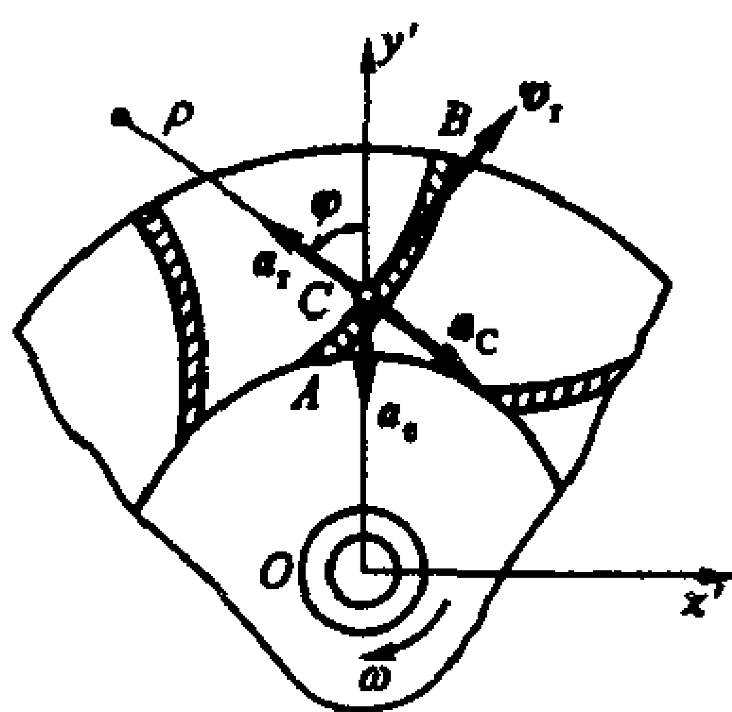


图 8-16

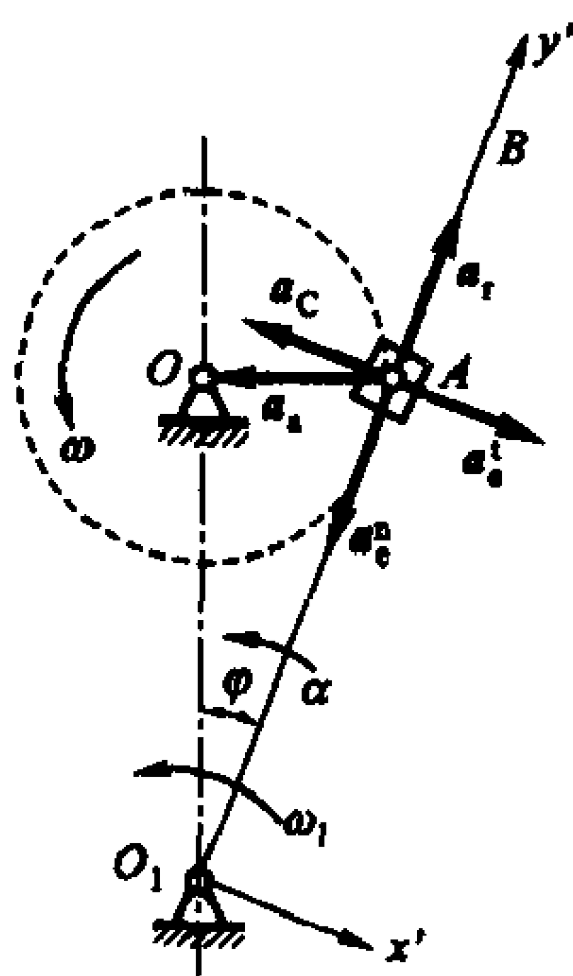


图 8-17

例 8-9 求例 8-4 中摇杆 O_1B 在图 8-17 所示位置时的角加速度。

解: 动点和动参考系选择同例 8-4。因为动参考系作转动,因此加速度合成定理为

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

由于 $a_e^t = \alpha \cdot O_1A$,欲求摇杆 O_1B 的角加速度 α,只需求出 a_e^t 即可。

现在分别分析上式中的各项:

$\boldsymbol{a}_a$:因为动点的绝对运动是以 O 为圆心的匀速圆周运动,故只有法向加速度,方向如图

所示，大小为

$$a_a = r\omega^2$$

$\boldsymbol{a}_e$：摇杆上与动点相重合的那一点的加速度。摇杆摆动，其上点 A 的切向加速度为 $\boldsymbol{a}_e^t$ 垂直于杆 O_1A，假设指向如图；法向加速度为 $\boldsymbol{a}_e^n$，它的大小为

$$a_e^n = \omega_1^2 \cdot O_1A$$

方向如图所示。在例 8－4 中已求得 $\omega_1 = \dfrac{r^2\omega}{l^2+r^2}$，且 $O_1A = \sqrt{l^2+r^2}$，故有

$$a_e^n = \frac{r^4\omega^2}{(l^2+r^2)^{3/2}}$$

$\boldsymbol{a}_r$：因相对轨迹为直线，故 $\boldsymbol{a}_r$ 沿 O_1A，大小未知。

$\boldsymbol{a}_C$：由 $\boldsymbol{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{v}_r$ 知

$$a_C = 2\omega_1 v_r \sin 90^\circ$$

由例 8－4 知

$$v_r = v_a \cos\varphi = \frac{\omega r l}{\sqrt{l^2+r^2}}$$

于是有

$$a_C = \frac{2\omega^2 r^3 l}{(l^2+r^2)^{3/2}}$$

方向如图所示。

为了求得 $\boldsymbol{a}_e^t$，应将加速度合成定理向 O_1x' 轴投影

即

$$a_{ax'} = a_{ex'} + a_{rx'} + a_{Cx'}$$

或

$$-a_a\cos\varphi = a_e^t - a_C$$

解得

$$a_e^t = -\frac{rl(l^2-r^2)}{(l^2+r^2)^{3/2}}\omega^2$$

式中 $l^2 - r^2 > 0$，故 a_e^t 为负值。负号表示真实方向与图中假设的指向相反。

摇杆 O_1A 的角加速度

$$\alpha = \frac{a_e^t}{O_1A} = -\frac{rl(l^2-r^2)}{(l^2+r^2)^2}\omega^2$$

负号表示与图示方向相反，α 的真实转向应为逆时针转向。

例 8－10 图 8－18a 所示平面机构中，曲柄 $OA = r$，以匀角速度 ω_O 转动。套筒 A 可沿 BC 杆滑动。已知 $BC = DE$，且 $BD = CE = l$。求：图示位置时，杆 BD 的角速度和角加速度。

解： 由于 $DBCE$ 为平行四边形，因而杆 BC 作平移。以套筒 A 为动点，绝对速度 $v_a = r\omega_O$。以杆 BC 为动系，牵连速度 $\boldsymbol{v}_e$ 等于点 B 速度 $\boldsymbol{v}_B$。其速度合成关系如图 8－18 a 所示。

由图示几何关系解出

$$v_e = v_r = v_a = r\omega_O$$

因而杆 BD 的角速度 ω 方向如图，大小为

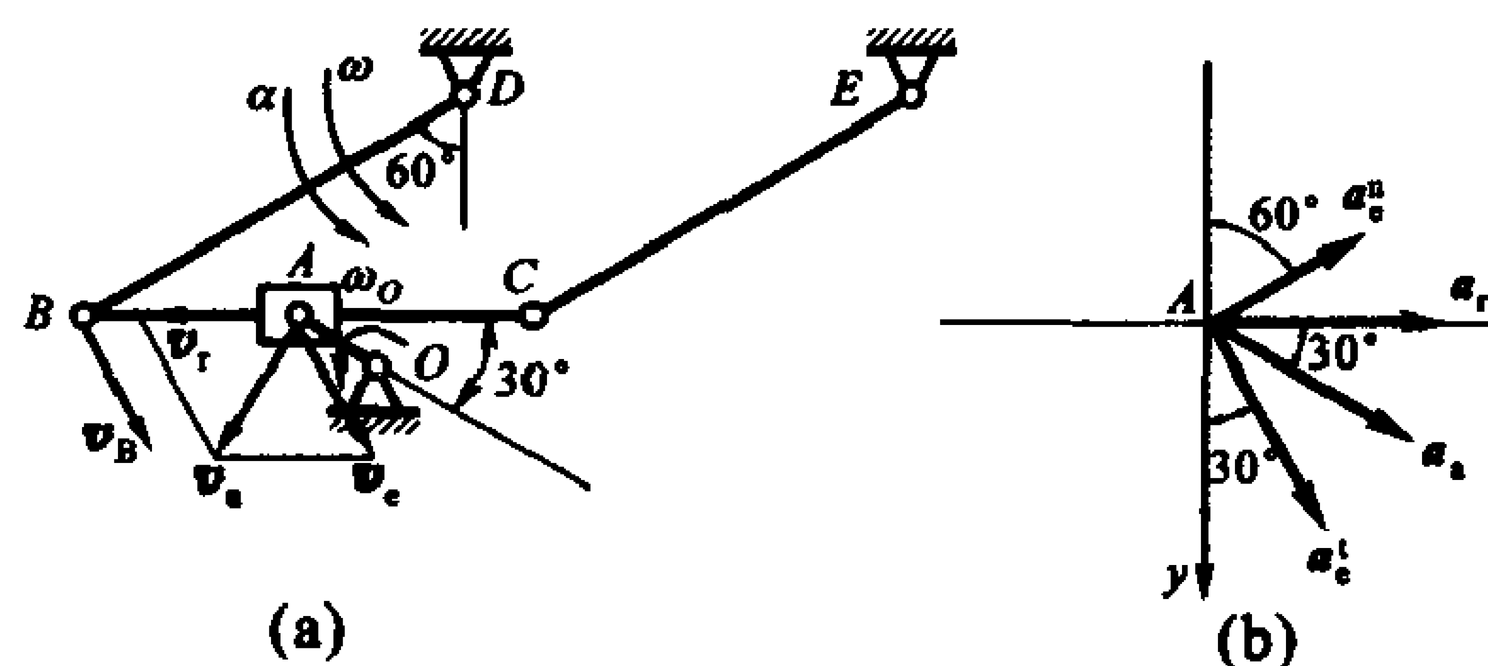


图 8－18

$$\omega = \frac{v_B}{l} = \frac{v_e}{l} = \frac{r\omega_O}{l} \tag{a}$$

动系 BC 为曲线平移，因此科氏加速度 $a_C = 0$；牵连加速度与点 B 加速度相同，应分解为 $\boldsymbol{a}_e^t$ 和 $\boldsymbol{a}_e^n$ 两项。由加速度合成定理，有

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r \tag{b}$$

其中

$$a_a = \omega_O^2 r, \qquad a_e^n = \omega^2 l = \frac{\omega_O^2 r^2}{l}$$

而 a_e^t 和 a_r 为未知量，暂设 $\boldsymbol{a}_e^t$ 和 $\boldsymbol{a}_r$ 的指向如图 8－18b。

将式(b)两端向 y 轴投影，得

$$a_a \sin 30° = a_e^t \cos 30° - a_e^n \sin 30°$$

解出

$$a_e^t = \frac{(a_a + a_e^n)\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\sqrt{3}\omega_O^2 r(l + r)}{3l}$$

解得 a_e^t 为正，表明所设 $\boldsymbol{a}_e^t$ 指向正确。

动系平移，点 B 的加速度等于牵连加速度，因而杆 BD 的角加速度方向如图，值为

$$\alpha = \frac{a_e^t}{l} = \frac{\sqrt{3}\omega_O^2 r(l + r)}{3l^2}$$

例 8－11　图 8－19 所示凸轮，机构中，凸轮以匀角速度 ω 绕水平 O 轴转动，带动直杆 AB 沿铅直线上、下运动，且 O，A，B 共线。凸轮上与点 A 接触的点为 A'，图示瞬时凸轮上点 A' 的曲率半径为 ρ_A，点 A' 的法线与 OA 夹角为 θ，$OA = l$。求该瞬时杆 AB 的速度及加速度。

解：　如果取凸轮上点 A' 作为动点，动系固结在杆 AB 上，所看到的相对运动轨迹是不清楚的。因此取杆 AB 上的点 A 为动点，动系固结在凸轮上。绝对运动是点 A 的直线运动，牵连运动是凸轮绕 O 轴的定轴转动，相对运动是点 A 沿凸轮轮缘的运动。各速度矢方向很容易画出，如图 8－19a。由点的速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

其中 $v_e = \omega l$，可求得

$$v_a = \omega l \tan\theta, \quad v_r = \omega l / \cos\theta$$

绝对运动是直线运动，因此 $\boldsymbol{a}_a$ 沿直线 AB 方向；牵连运动是匀速定轴转动，因此 $\boldsymbol{a}_e$ 指向

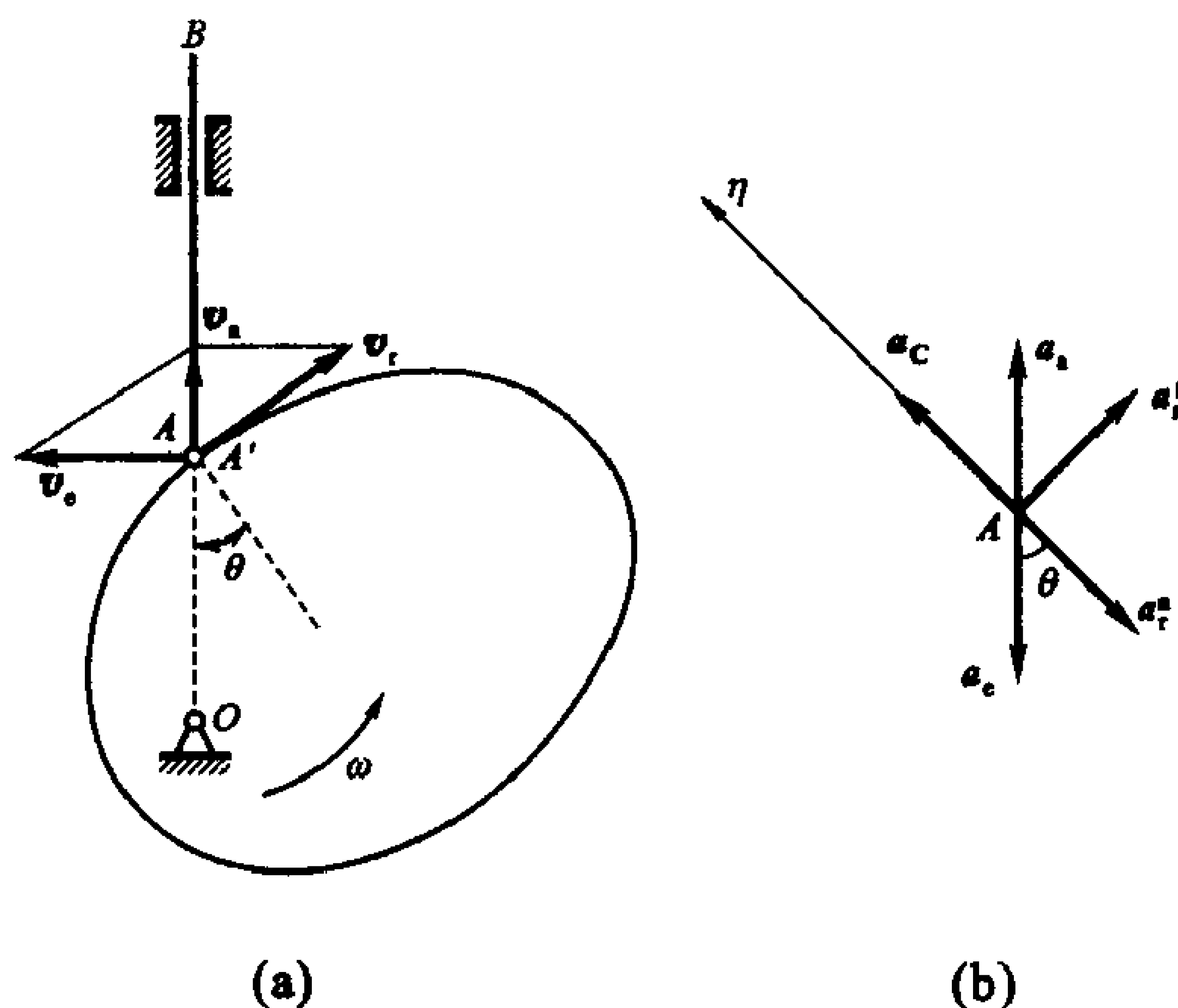


图 8-19

点 O；相对加速度有切向加速度 a_r^t 及法向加速度 a_r^n 两项组成。其中

$$a_e = l\omega^2, \qquad a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho_A} = \frac{\omega^2 l^2}{\rho_A \cos^2\theta}$$

由于牵连运动为转动，因此有科氏加速度 $\boldsymbol{a}_C$

$$\boldsymbol{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{v}_r$$

大小为

$$a_C = 2\omega v_r = 2\omega^2 l/\cos\theta$$

各加速度方向如图 8-19b 所示。点的加速度合成定理为

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r^t + \boldsymbol{a}_r^n + \boldsymbol{a}_C$$

在此矢量方程中，只有 $\boldsymbol{a}_a$ 的大小及 $\boldsymbol{a}_r^t$ 的大小未知。欲求 a_a，可将此矢量方程向垂直于 $\boldsymbol{a}_r^t$ 的 η 轴上投影

$$a_a\cos\theta = -a_e\cos\theta - a_r^n + a_C$$

解得

$$a_a = -\omega^2 l\left(1 + \frac{l}{\rho_A\cos^3\theta} - \frac{2}{\cos^2\theta}\right)$$

例 8-12 圆盘半径 $R = 50$ mm，以匀角速度 ω_1 绕水平轴 CD 转动，同时框架和 CD 轴一起以匀角速度 ω_2 绕通过圆盘中心 O 的铅直轴 AB 转动，如图 8-20 所示。如 $\omega_1 = 5$ rad/s，$\omega_2 = 3$ rad/s，求圆盘上 1 和 2 两点的绝对加速度。

解： 首先计算点 1 的加速度。

取圆盘上的点 1 为动点，动参考系与框架固结，则动参考系绕轴 AB 转动。应用加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

$\boldsymbol{a}_e$：是动参考系上与动点相重合的那一点（牵连点）的加速度。动参考系是无限大体，其上与动点相重合的点以 O 为圆心在水平面内作匀速圆周运动，因此这点只有法向加速度，它

的大小为

$$a_e=\omega_2^2 R=3^2(\text{rad/s})^2\times 50\ \text{mm}=450\ \text{mm/s}^2$$

方向如图所示。

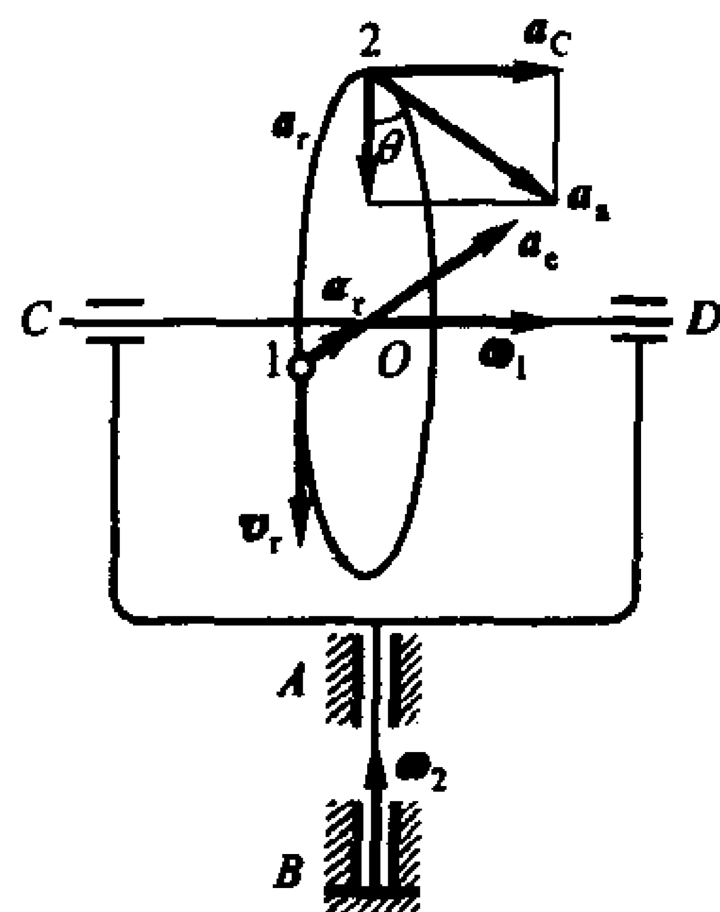


图 8-20

$\boldsymbol{a}_r$:动点的相对运动以 O 为圆心,在铅直平面内作匀速圆周运动,因此也只有法向加速度,它的大小为

$$a_r=\omega_1^2 R=5^2(\text{rad/s})^2\times 50\ \text{mm}=1\ 250\ \text{mm/s}^2$$

方向如图所示。

$\boldsymbol{a}_C$:由 $\boldsymbol{a}_C=2\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{v}_r$ 确定 $\boldsymbol{a}_C$ 的大小为

$$a_C=2\omega_2 v_r \sin 180^\circ=0$$

于是点 1 的绝对加速度的大小为

$$a_a=a_e+a_r=1\ 700\ \text{mm/s}^2$$

它的方向与 $\boldsymbol{a}_e$,$\boldsymbol{a}_r$ 同向,指向轮心 O。

现在计算点 2 的加速度。仍将动参考系固结在框架上。

$\boldsymbol{a}_e$:因动参考系上与点 2 相重合的点是轴线上的一个点,这点的加速度等于零,因此 $a_e=0$。

$\boldsymbol{a}_r$:相对加速度的大小为

$$a_r=R\omega_1^2=50\ \text{mm}\times 5^2(\text{rad/s})^2=1\ 250\ \text{mm/s}^2$$

方向指向轮心 O。

$\boldsymbol{a}_C$:　$a_C=2\omega_e v_r\sin 90^\circ=2\omega_2\omega_1 R=2\times 3\times 5(\text{rad/s})^2\times 50\ \text{mm}=1\ 500\ \text{mm/s}^2$

$\boldsymbol{a}_C$ 垂直于圆盘平面,方向如图所示。

于是,点 2 的绝对加速度的大小为

$$a_a=\sqrt{a_r^2+a_C^2}=1\ 953\ \text{mm/s}^2$$

它与铅直线形成的夹角为

$$\theta=\arctan\frac{a_C}{a_r}=50^\circ 12'$$

总结以上各例的解题步骤可见,应用加速度合成定理求解点的加速度,其步骤基本上与应用速度合成定理求解点的速度相同,但要注意以下几点:

1. 选取动点和动参考系后,应根据动参考系有无转动,确定是否有科氏加速度。

2. 因为点的绝对运动轨迹和相对运动轨迹可能都是曲线,因此点的加速度合成定理一般可写成如下形式:

$$\boldsymbol{a}_a^t+\boldsymbol{a}_a^n=\boldsymbol{a}_e^t+\boldsymbol{a}_e^n+\boldsymbol{a}_r^t+\boldsymbol{a}_r^n+\boldsymbol{a}_C$$

式中每一项都有大小和方向两个要素,必须认真分析每一项,才可能正确地解决问题。在平面问题中,一个矢量方程相当于两个代数方程,因而可求解两个未知量。上式中各项法向加速度的方向总是指向相应曲线的曲率中心,它们的大小总是可以根据相应的速度大小和曲率半径求出。因此在应用加速度合成定理时,一般应先进行速度分析,这样各项法向加速度都是已知量。科氏加速度 $\boldsymbol{a}_C$

的大小和方向由牵连角速度 $\boldsymbol{\omega}_e$ 和相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 确定，它们也完全可通过速度分析求出，因此 $\boldsymbol{a}_C$ 的大小和方向两个要素也是已知的。这样，在加速度合成定理中只有三项切向加速度的六个要素可能是待求量，若知其中的四个要素，则余下的两个要素就完全可求了。

在应用加速度合成定理时，正确的选取动点和动系是很重要的。动点相对于动系是运动的，因此它们不能处于同一刚体上。选择动点、动系时还要注意相对运动轨迹是否清楚。若相对运动轨迹不清楚，则相对加速度 $\boldsymbol{a}_r^t$，$\boldsymbol{a}_r^n$ 的方向就难以确定，从而使待求量个数增加，致使求解困难。

小　结

1．点的绝对运动为点的牵连运动和相对运动的合成结果。

绝对运动：动点相对于定参考系的运动；

相对运动：动点相对于动参考系的运动；

牵连运动：动参考系相对于定参考系的运动。

2．点的速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

绝对速度 $\boldsymbol{v}_a$：动点相对于定参考系运动的速度；

相对速度 $\boldsymbol{v}_r$：动点相对于动参考系运动的速度；

牵连速度 $\boldsymbol{v}_e$：动参考系上与动点相重合的那一点（牵连点）相对于定参考系运动的速度。

3．点的加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

绝对加速度 $\boldsymbol{a}_a$：动点相对于定参考系运动的加速度；

相对加速度 $\boldsymbol{a}_r$：动点相对于动参考系运动的加速度；

牵连加速度 $\boldsymbol{a}_e$：动参考系上与动点相重合的那一点（牵连点）相对于定参考系运动的加速度；

科氏加速度 $\boldsymbol{a}_C$：牵连运动为转动时，牵连运动和相对运动相互影响而出现的一项附加的加速度。

$$\boldsymbol{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{v}_r$$

当动参考系作平移或 $\boldsymbol{v}_r = 0$，或 $\boldsymbol{\omega}_e$ 与 $\boldsymbol{v}_r$ 平行时，$\boldsymbol{a}_C = 0$。

思 考 题

8－1　如何选择动点和动参考系？在例 8－4 中以滑块 A 为动点。为什么不宜以曲柄 OA 为动参考系？若以 O_1B 上的点 A 为动点，以曲柄 OA 为动参考系，是否可求出 O_1B 的

角速度、角加速度？

8-2　图 8-21 中的速度平行四边形有无错误？错在哪里？

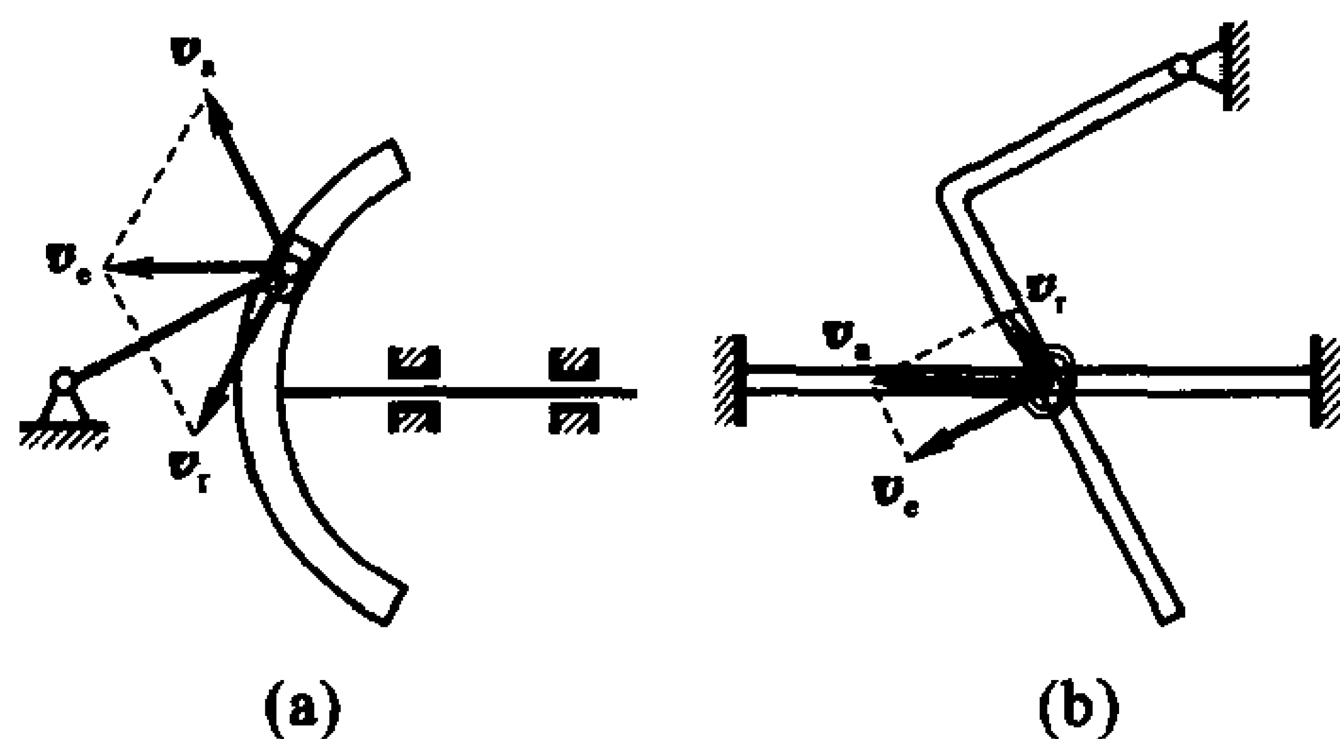


图 8-21

8-3　如下计算对不对？错在哪里？

(a) 图 8-22 中取动点为滑块 A，动参考系为杆 OC，则

$$v_e=\omega\cdot OA,\quad v_a=v_e\cos\varphi$$

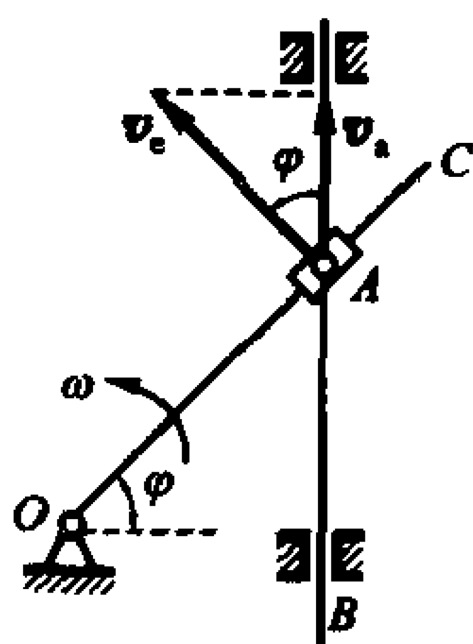


图 8-22

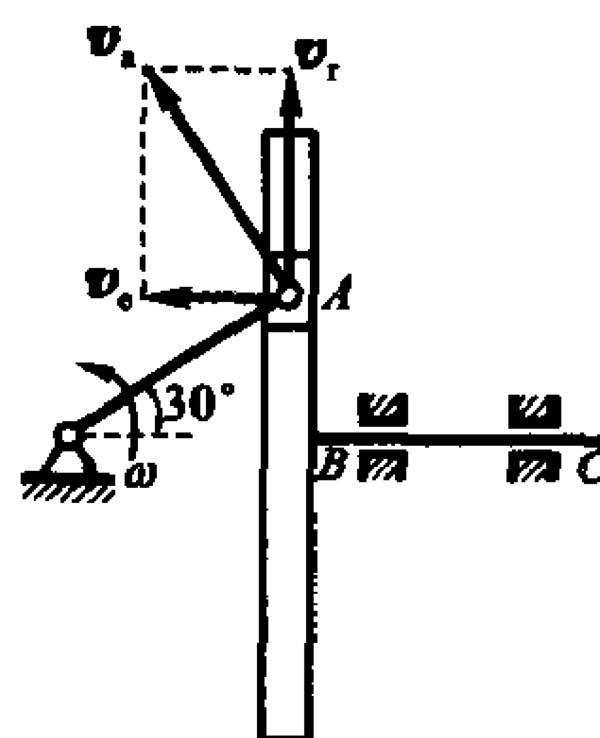


图 8-23

(b) 图 8-23 中 $v_{BC}=v_e=v_a\cos 60°$

$$v_a=\omega r$$

因为

$$\omega=常量$$

所以

$$v_{BC}=常量,\quad a_{BC}=\frac{\mathrm{d}v_{BC}}{\mathrm{d}t}=0$$

(c) 图 8-24 中为了求 $\boldsymbol{a}_a$ 的大小，取加速度在 η 轴上的投影式：

$$a_a\cos\varphi-a_C=0$$

所以

$$a_a=\frac{a_C}{\cos\varphi}$$

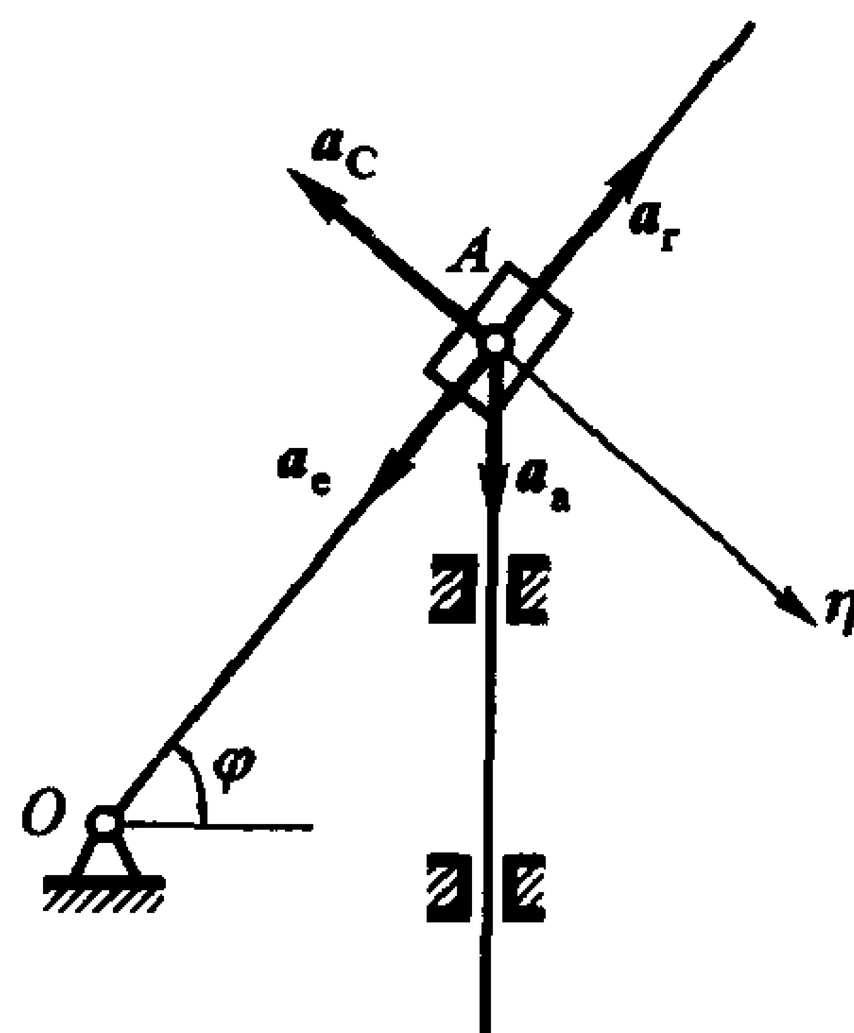


图 8-24

8-4　点的速度合成定理 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$ 对牵连运动是平移或转动都成立，将其两端对时间求导，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_e}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}$$

从而有

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r$$

因而此式对牵连运动是平移或转动都应该成立。

试指出上面的推导错在哪里？

8-5 如下计算对吗？

$$a_a^t = \frac{dv_a}{dt},\quad a_a^n = \frac{v_a^2}{\rho_a} \qquad a_e^t = \frac{dv_e}{dt},\quad a_e^n = \frac{v_e^2}{\rho_e} \qquad a_r^t = \frac{dv_r}{dt},\quad a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho_r}$$

式中 ρ_a，ρ_r 分别是绝对轨迹、相对轨迹上该处的曲率半径，ρ_e 为动参考系上与动点相重合的那一点的轨迹在重合位置的曲率半径。

8-6 图 8-25 中曲柄 OA 以匀角速度转动，a，b 两图中哪一种分析对？

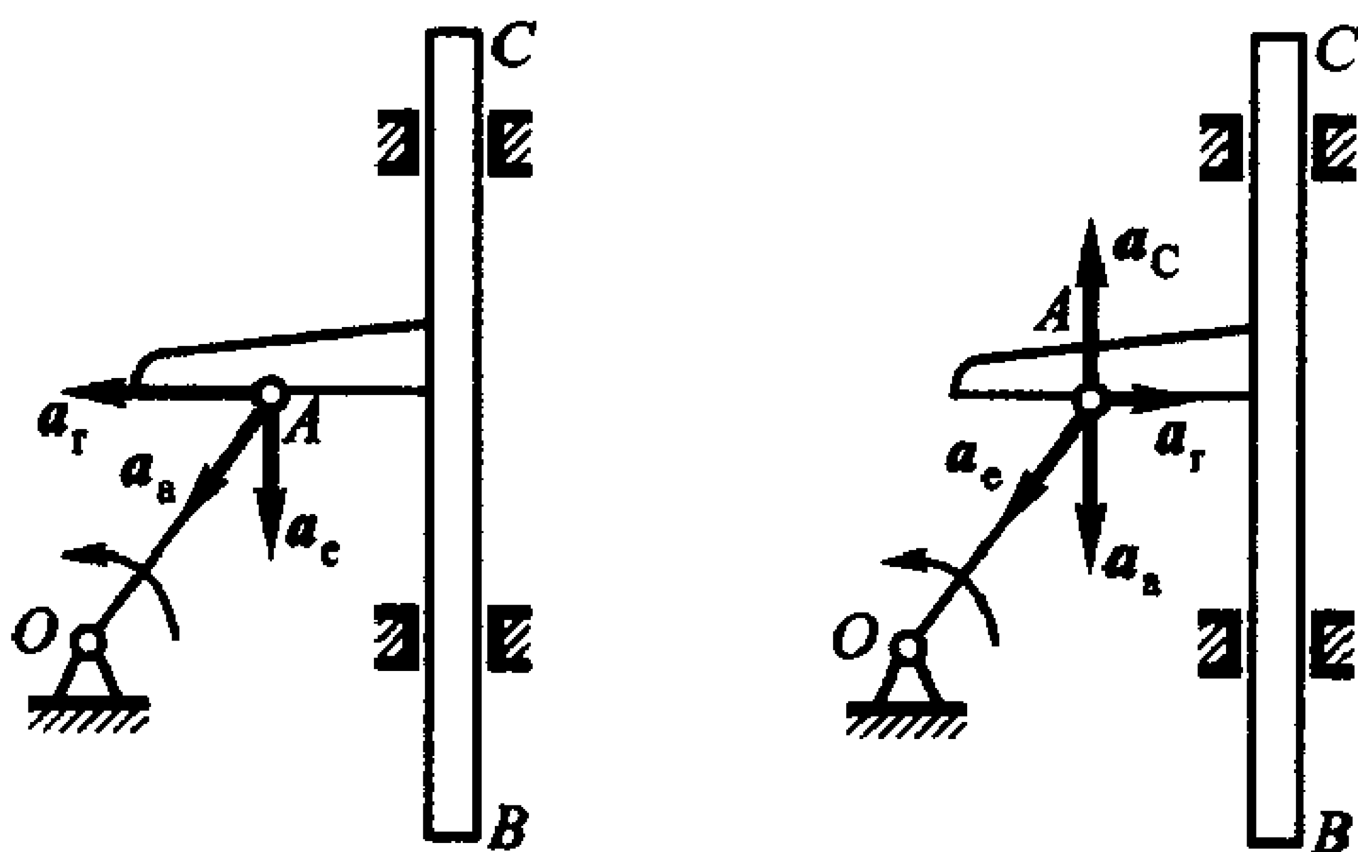


图 8-25

(a) 以 OA 上的点 A 为动点，以 BC 为动参考体；

(b) 以 BC 上的点 A 为动点，以 OA 为动参考体。

8-7 按点的合成运动理论导出速度合成定理及加速度合成定理时，定参考系是固定不动的。如果定参考系本身也在运动(平移或转动)，对这类问题你该如何求解？

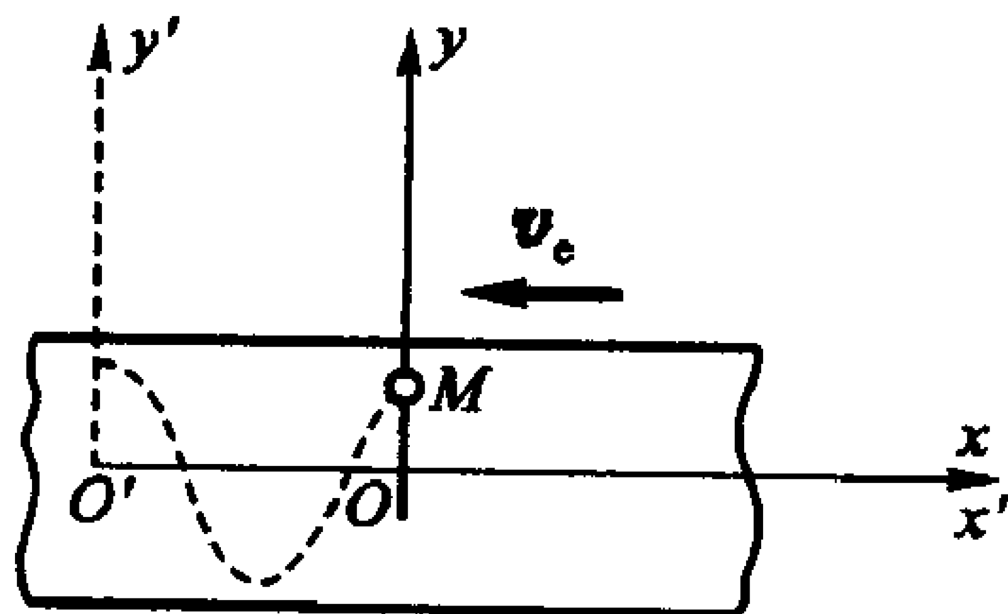
8-8 试引用点的合成运动的概念，证明在极坐标中点的加速度公式为

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \qquad a_\varphi = \ddot{\varphi}r + 2\dot{\varphi}\dot{r}$$

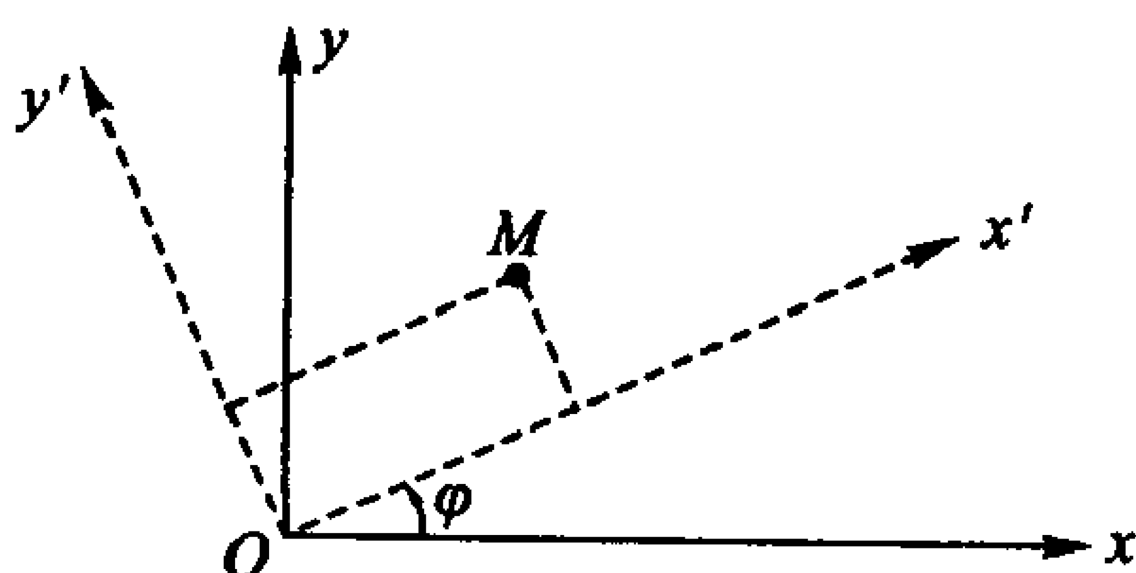
其中 r 和 φ 是用极坐标表示的点的运动方程，a_r 和 a_φ 是点的加速度沿极径和其垂直方向的投影。

习　题

8-1 如图所示，光点 M 沿 y 轴作谐振动，其运动方程为



题 8-1 图



题 8-2 图

$$x=0 \qquad y=a\cos(kt+\beta)$$

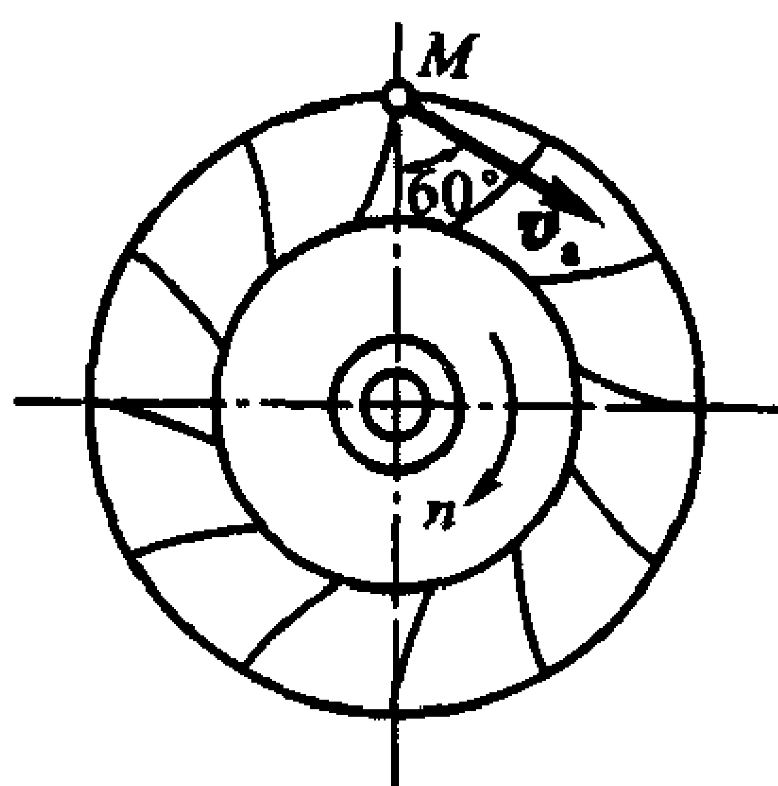
如将点 M 投影到感光记录纸上，此纸以等速 $\boldsymbol{v}_e$ 向左运动。求点 M 在记录纸上的轨迹。

8－2　如图所示，点 M 在平面 $Ox'y'$ 中运动，运动方程为

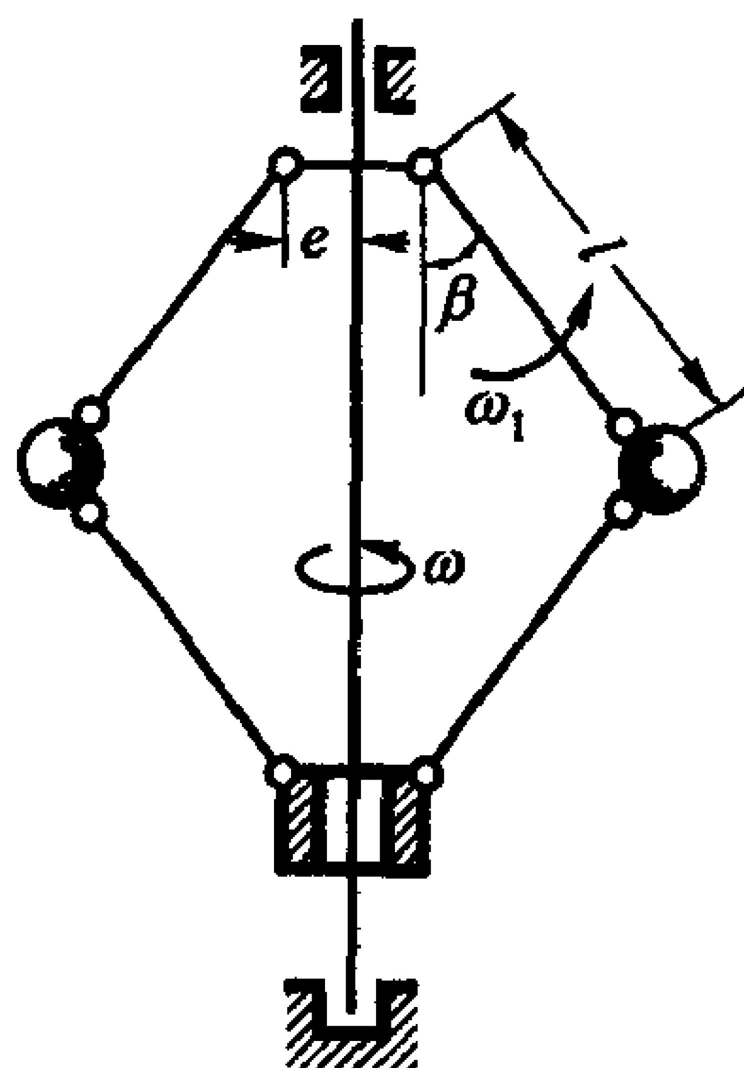
$$x'=40(1-\cos t) \qquad y'=40\sin t$$

式中 t 以 s 计，x' 和 y' 以 mm 计。平面 $Ox'y'$ 又绕垂直于该平面的 O 轴转动，转动方程为 $\varphi=t$ rad，式中角 φ 为动坐标系的 x' 轴与定坐标系的 x 轴间的交角。求点 M 的相对轨迹和绝对轨迹。

8－3　水流在水轮机工作轮入口处的绝对速度 $v_a=15$ m/s，并与直径成 60°角，如图所示。工作轮的外缘半径 $R=2$ m，转速 $n=30$ r/min。为避免水流与工作轮叶片相冲击，叶片应恰当地安装，以使水流对工作轮的相对速度与叶片相切。求在工作轮外缘处水流对工作轮的相对速度的大小和方向。



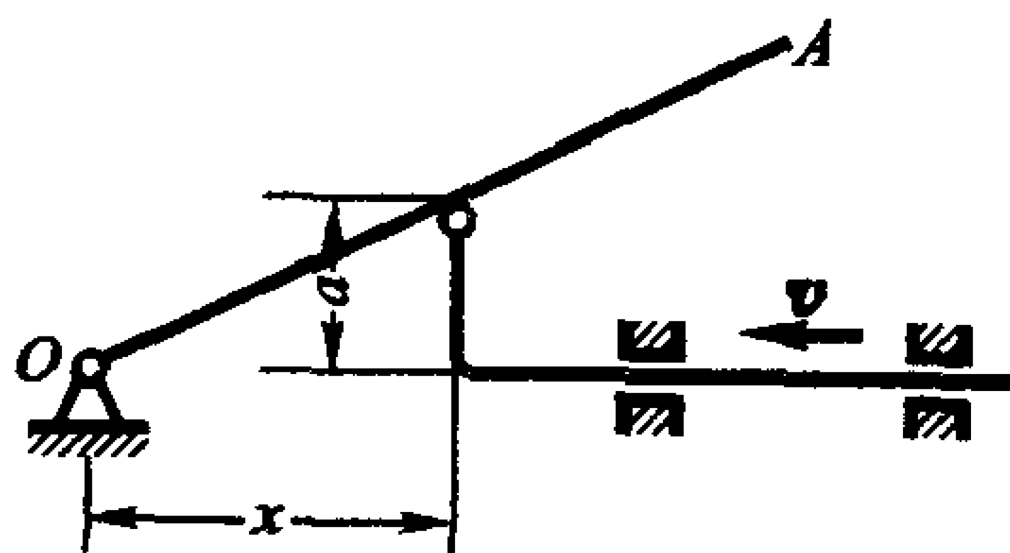
题 8－3 图



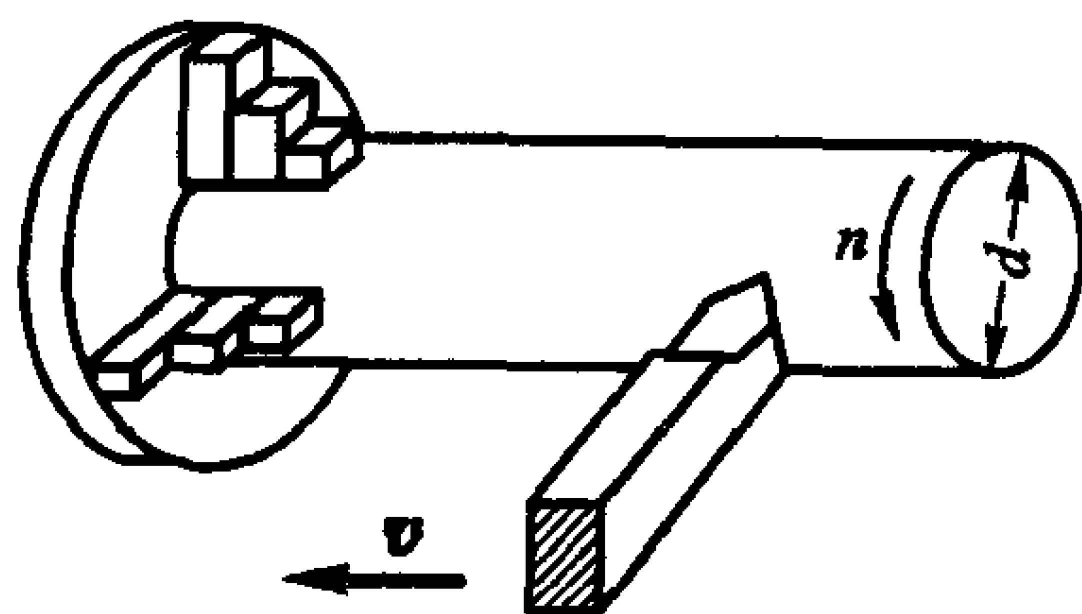
题 8－4 图

8－4　如图所示，瓦特离心调速器以角速度 ω 绕铅直轴转动。由于机器负荷的变化，调速器重球以角速度 ω_1 向外张开。如 $\omega=10$ rad/s，$\omega_1=1.2$ rad/s，球柄长 $l=500$ mm，悬挂球柄的支点到铅直轴的距离为 $e=50$ mm，球柄与铅直轴间所成的交角 $\beta=30°$。求此时重球的绝对速度。

8－5　杆 OA 长 l，由推杆推动而在图面内绕点 O 转动，如图所示。假定推杆的速度为 $\boldsymbol{v}$，其弯头高为 a。求杆端 A 的速度的大小(表示为 x 的函数)。



题 8－5 图

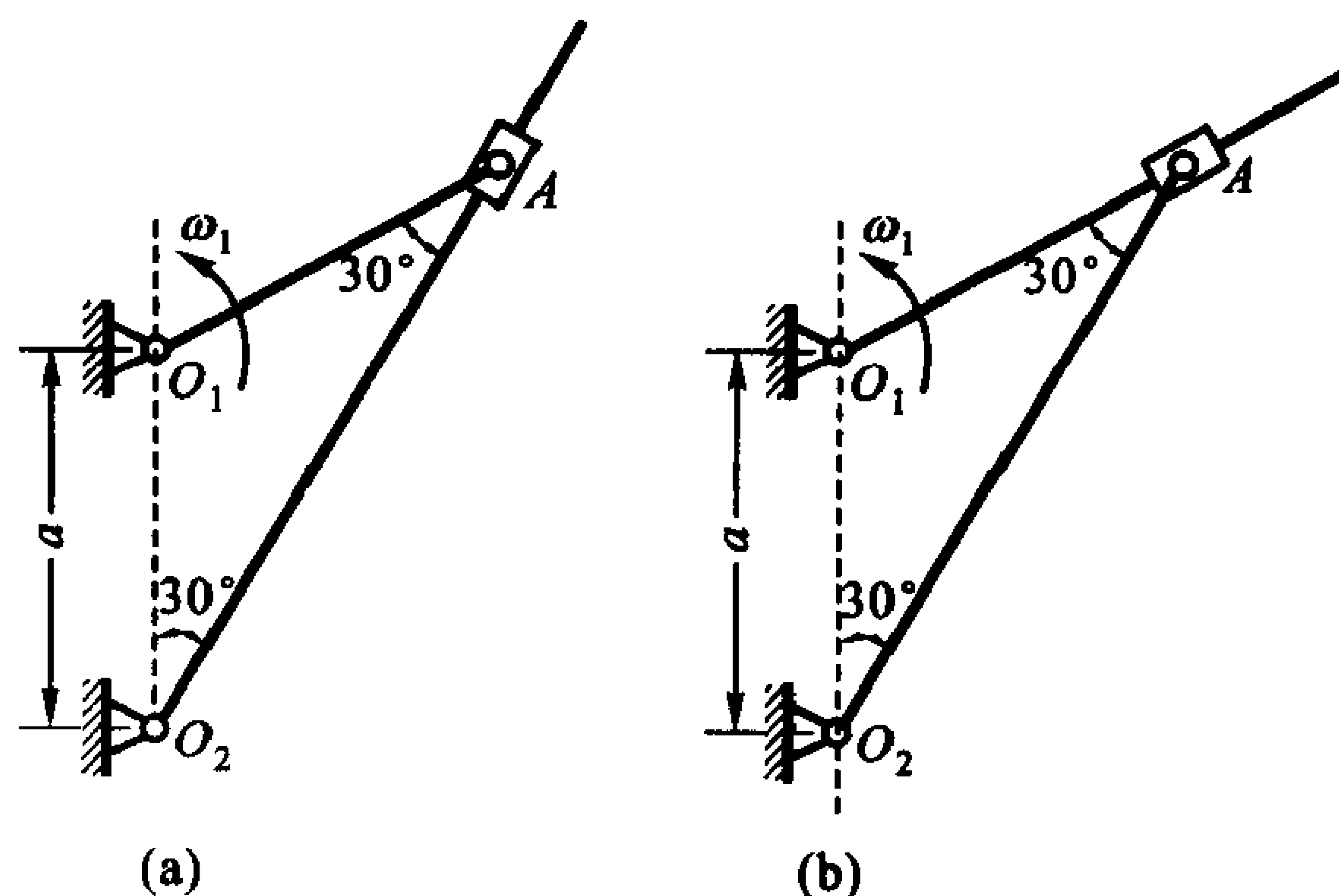


题 8－6 图

8－6　车床主轴的转速 $n=30$ r/min，工件的直径 $d=40$ mm，如图所示。如车刀横向走

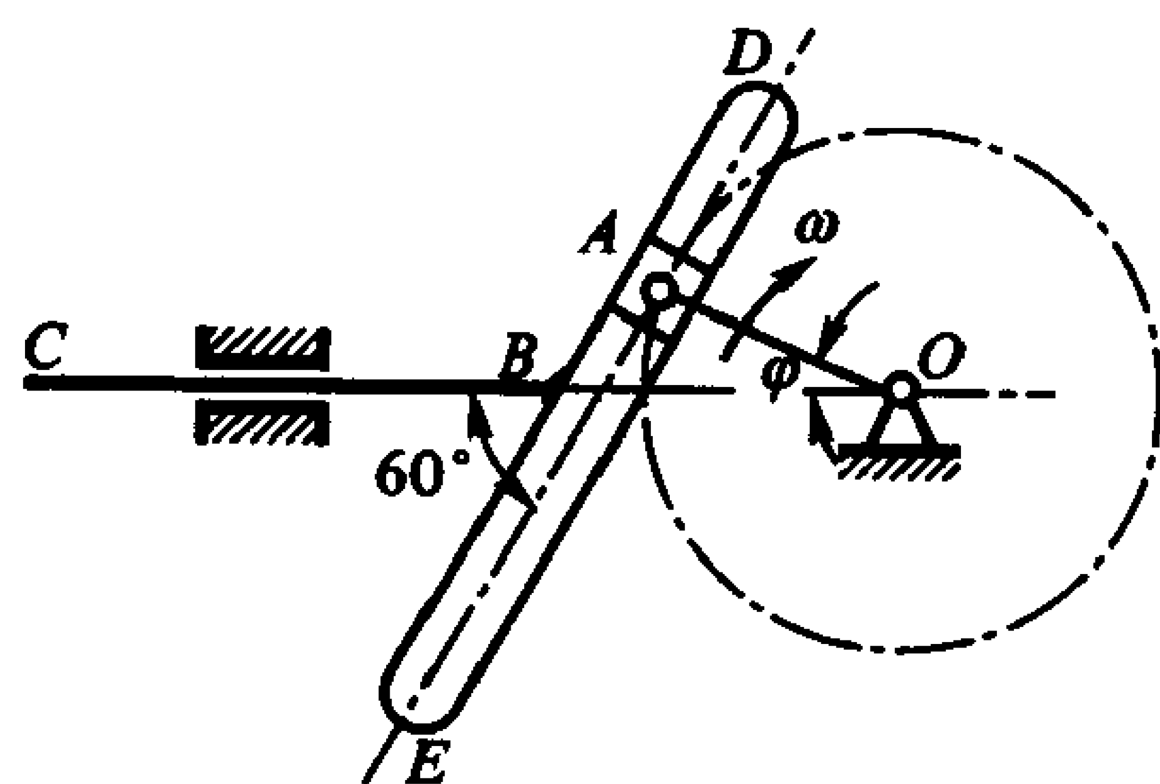
刀速度为 $v=10$ mm/s,求车刀对工件的相对速度。

8－7　在图 a 和 b 所示的两种机构中,已知 $O_1O_2=a=200$ mm,$\omega_1=3$ rad/s。求图示位置时杆 O_2A 的角速度。

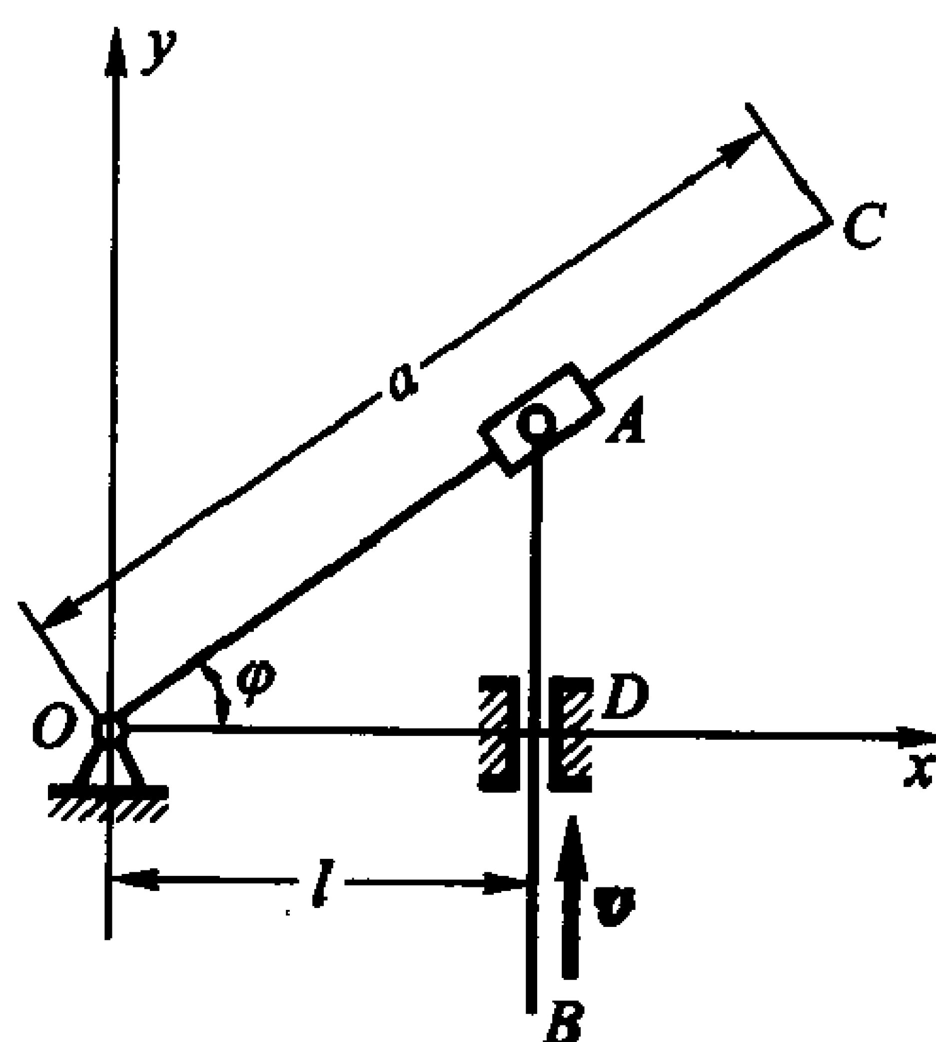


题 8－7 图

8－8　图示曲柄滑道机构中,曲柄长 $OA=r$,并以等角速度 ω 绕 O 轴转动。装在水平杆上的滑槽 DE 与水平线成 60°角。求当曲柄与水平线的交角分别为 $\varphi=0°,30°,60°$ 时,杆 BC 的速度。



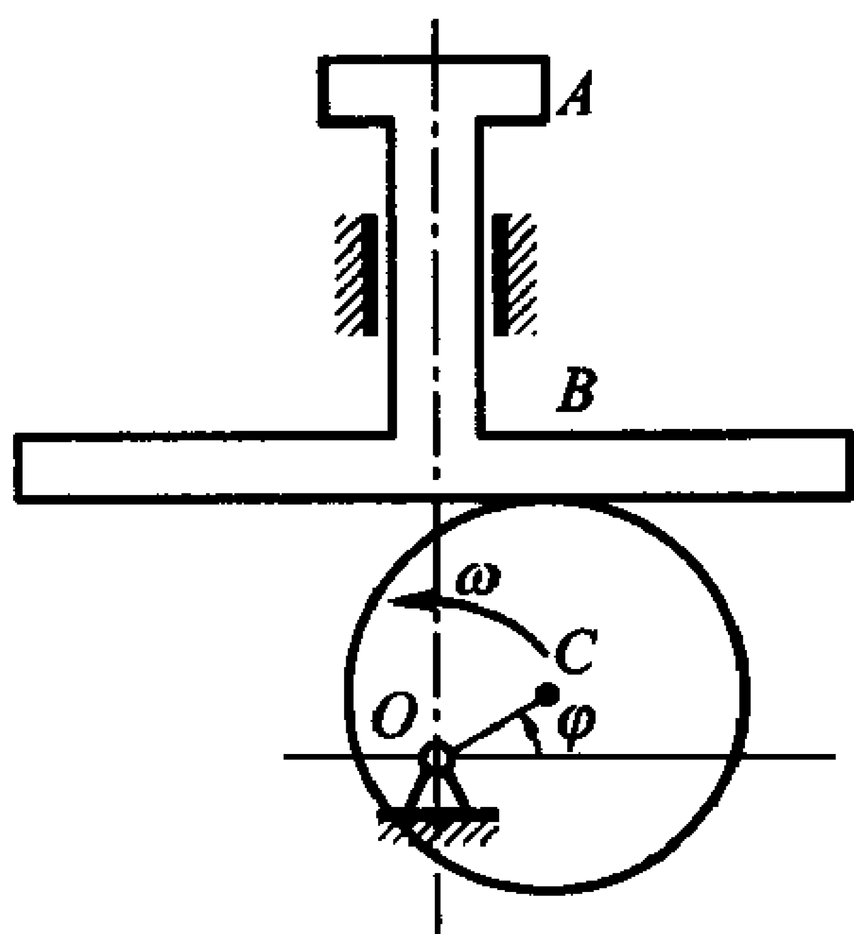
题 8－8 图



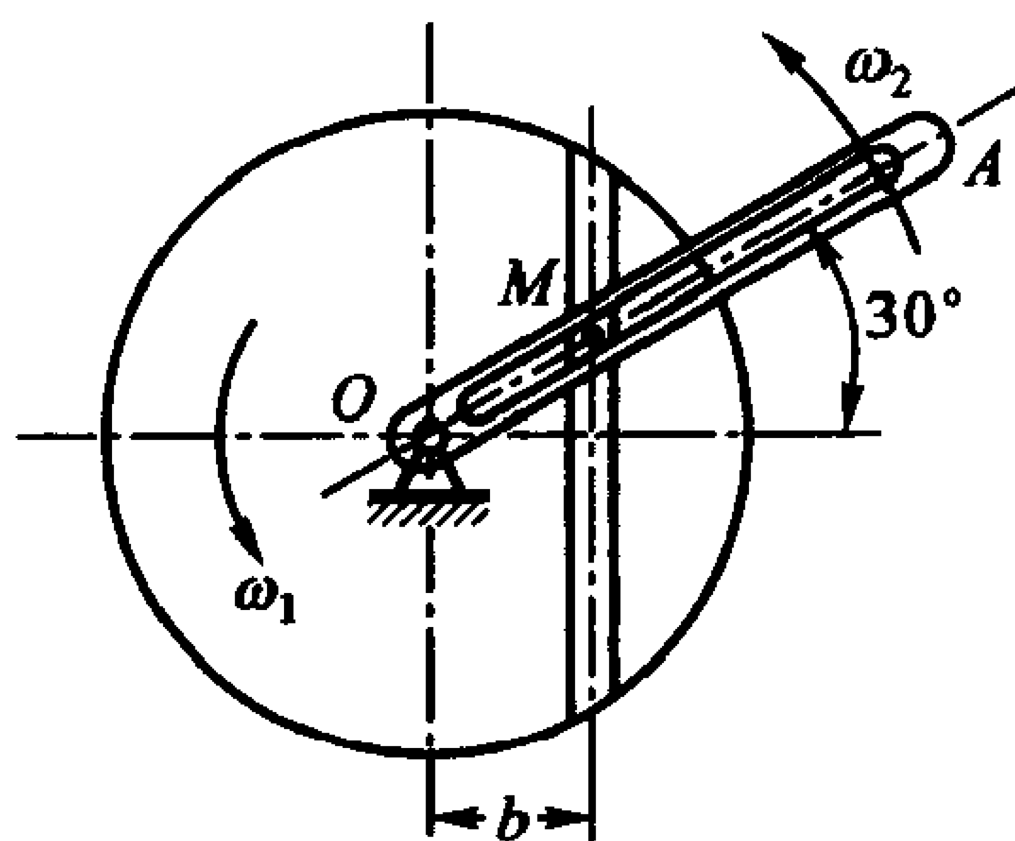
题 8－9 图

8－9　如图所示,摇杆机构的滑杆 AB 以等速 $\boldsymbol{v}$ 向上运动,初瞬时摇杆 OC 水平。摇杆长 $OC=a$,距离 $OD=l$。求当 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 时点 C 的速度的大小。

8－10　平底顶杆凸轮机构如图所示,顶杆 AB 可沿导槽上下移动,偏心圆盘绕轴 O 转动,轴 O 位于顶杆轴线上。工作时顶杆的平底始终接触凸轮表面。该凸轮半径为 R,偏心距 $OC=e$,凸轮绕轴 O 转动的角速度为 ω,OC 与水平线成夹角 φ。求当 $\varphi=0°$ 时,顶杆的速度。



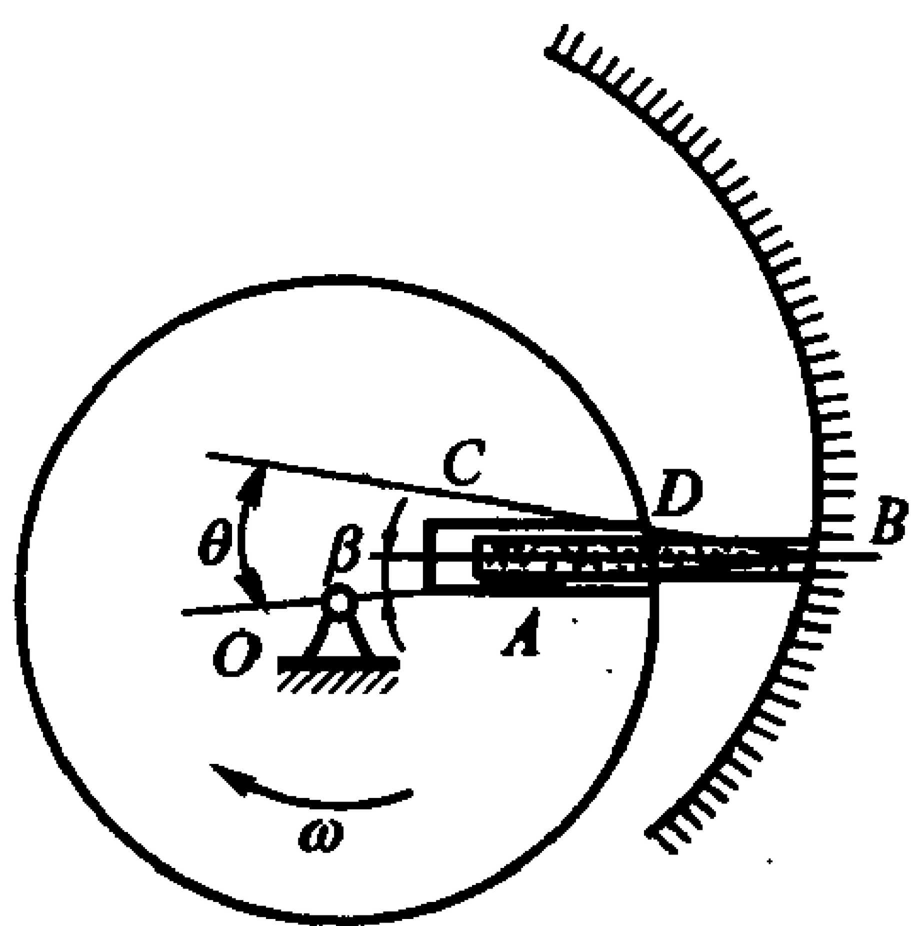
题 8－10 图



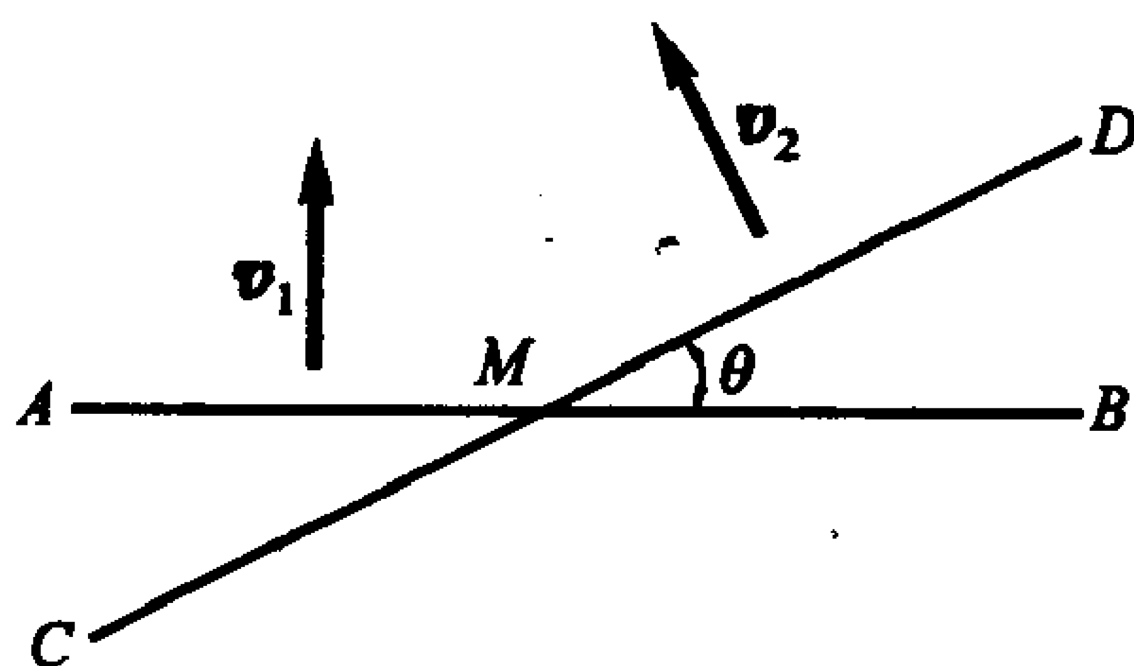
题 8－11 图

8－11　绕轴 O 转动的圆盘及直杆 OA 上均有一导槽，两导槽间有一活动销子 M 如图所示，$b=0.1$ m。设在图示位置时，圆盘及直杆的角速度分别为 $\omega_1=9$ rad/s 和 $\omega_2=3$ rad/s。求此瞬时销子 M 的速度。

8－12　图为叶片泵的示意图。当转子转动时，叶片端点 B 将沿固定的定子曲线运动，同时叶片 AB 将在转子上的槽 CD 内滑动。已知转子转动的角速度为 ω，槽 CD 不通过轮心 O 点，此时 AB 和 OB 间的夹角为 β，OB 和定子曲线的法线间成 θ 角，$OB=\rho$。求叶片在转子槽内的滑动速度。



题 8－12 图



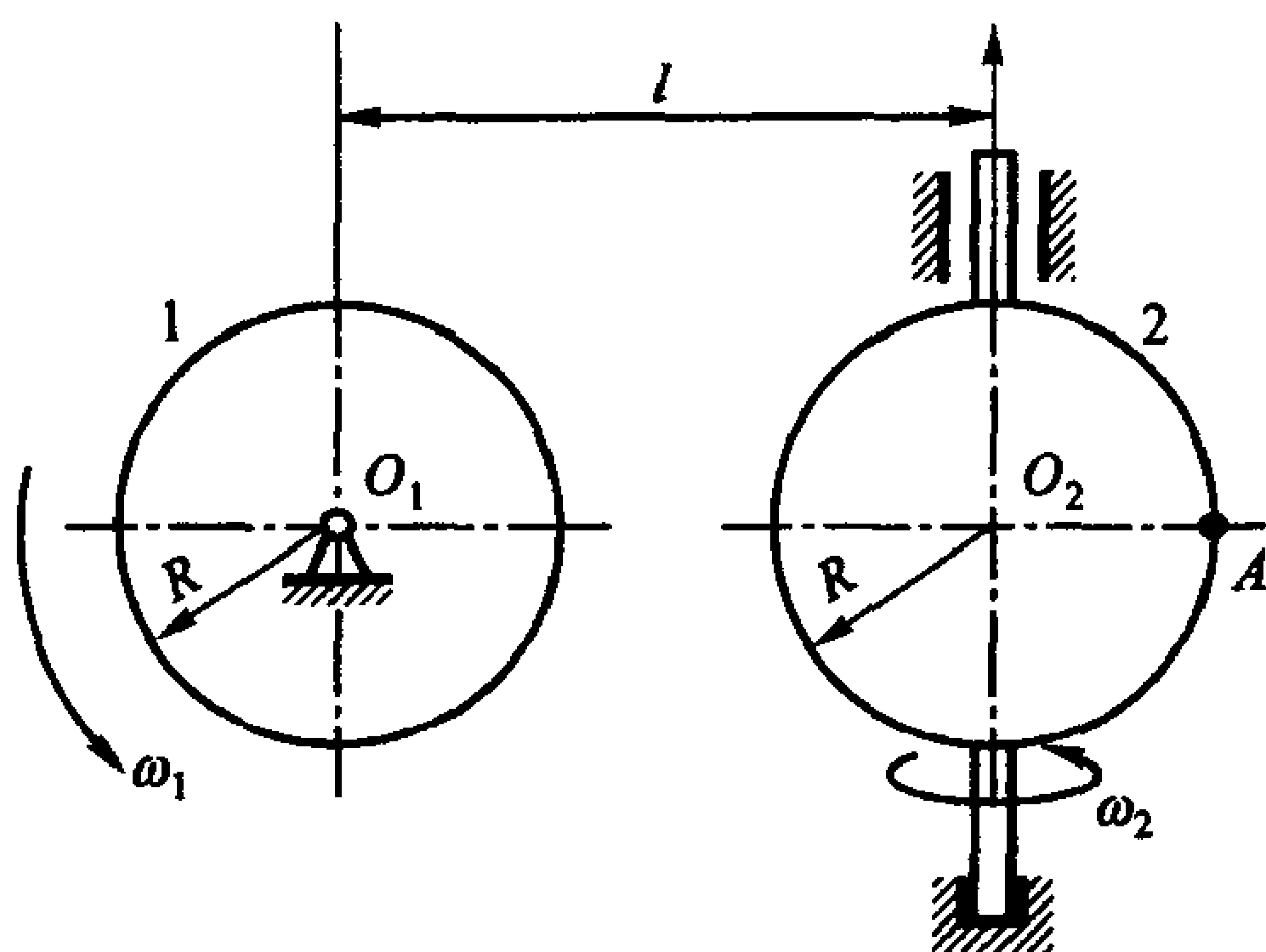
题 8－13 图

8－13　直线 AB 以大小为 v_1 的速度沿垂直于 AB 的方向向上移动；直线 CD 以大小为 v_2 的速度沿垂直于 CD 的方向向左上方移动，如图所示。如两直线间的交角为 θ，求两直线交点 M 的速度。

8－14　图示两盘匀速转动的角速度分别为 $\omega_1=1$ rad/s，$\omega_2=2$ rad/s，两盘半径均为 $R=50$ mm，两盘转轴距离 $l=250$ mm。图示瞬时，两盘位于同一平面内。求此时盘 2 上的点 A 相对于盘 1 的速度和加速度。

8－15　图示公路上行驶的两车速度都恒为 72 km/h。图示瞬时，在 A 车中的观察者看来，车 B 的速度、加速度为多大？

8－16　图示小环 M 沿杆 OA 运动，杆 OA 绕 O 轴转动，从而使小环在 Oxy 平面内具有如下运动方程：

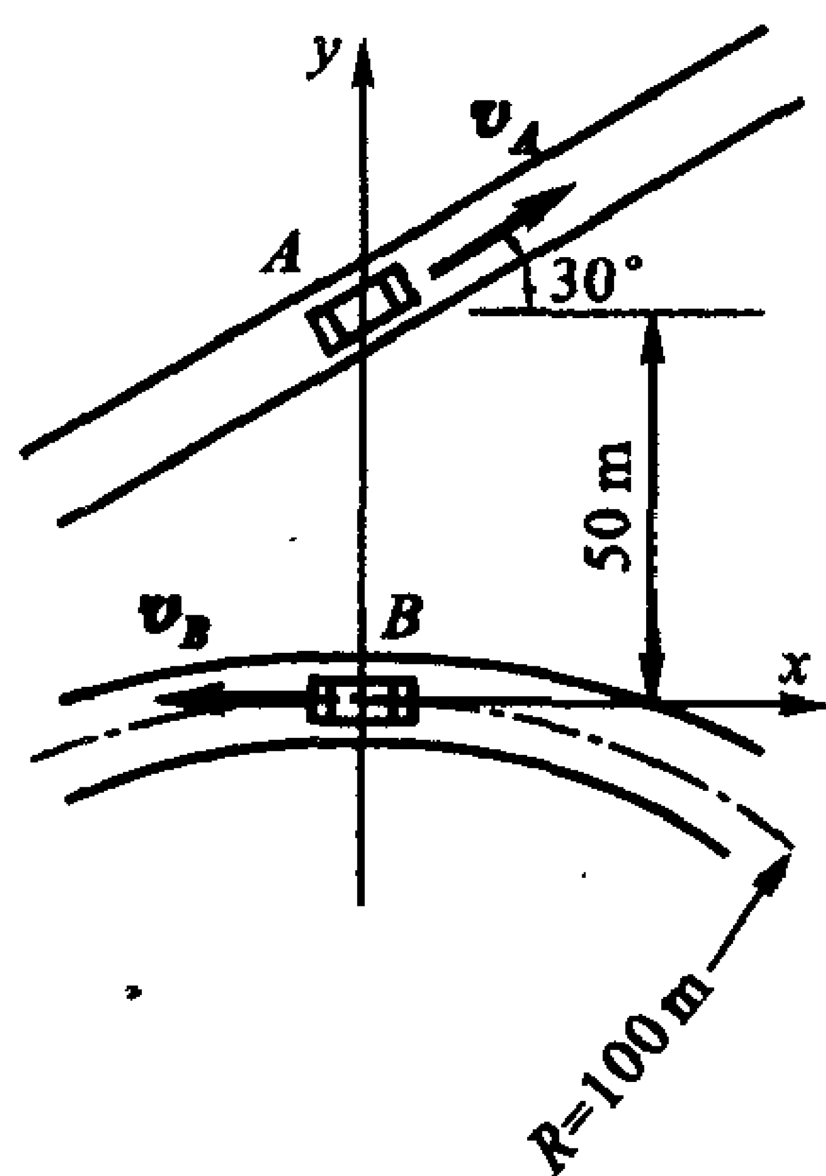


题 8－14 图

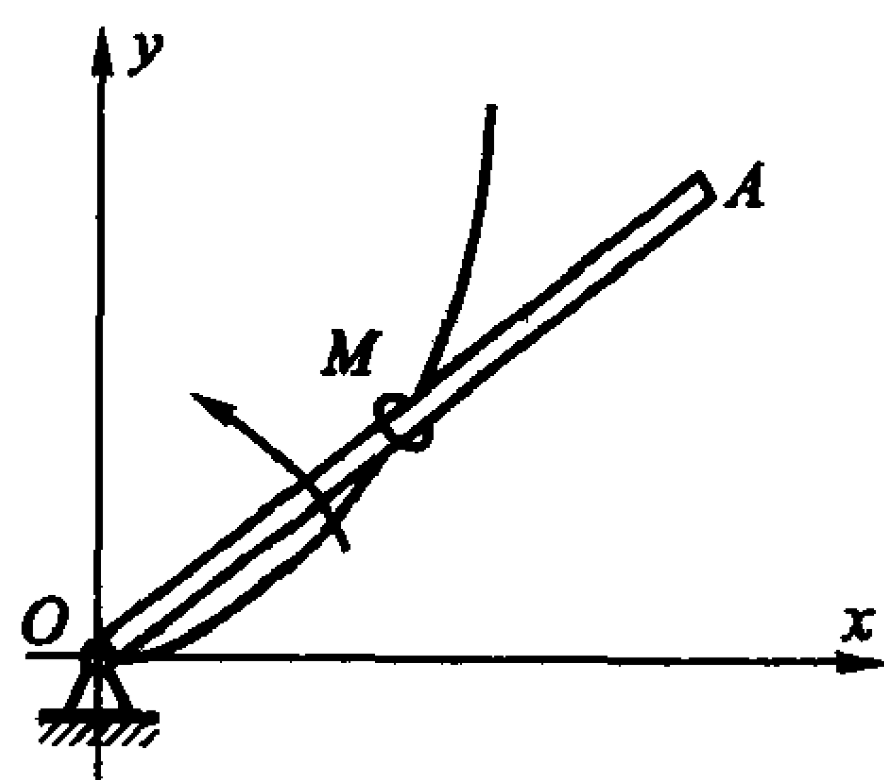
$$x=10\sqrt{3}t\ \text{mm},\quad y=10\sqrt{3}t^2\ \text{mm}$$

其中 t 以 s 计，x，y 以 mm 计。

求 $t=1$ s 时，小环 M 相对于杆 OA 的速度和加速度，杆 OA 转动的角速度及角加速度。



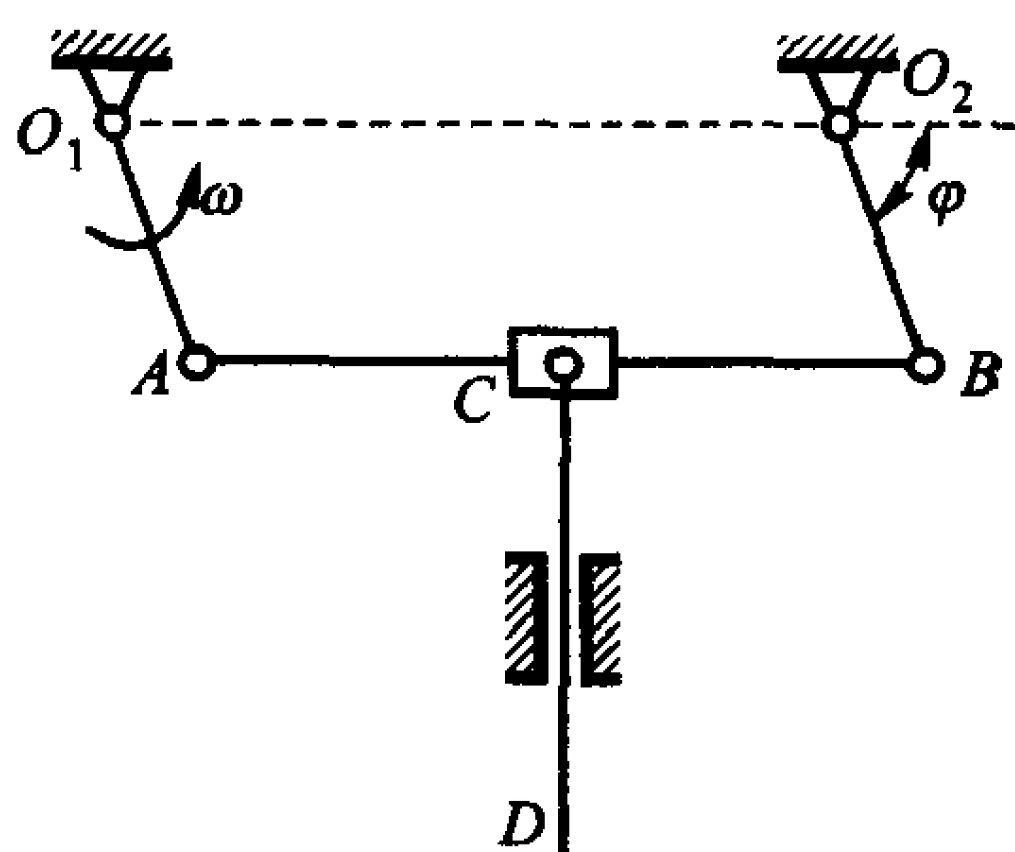
题 8－15 图



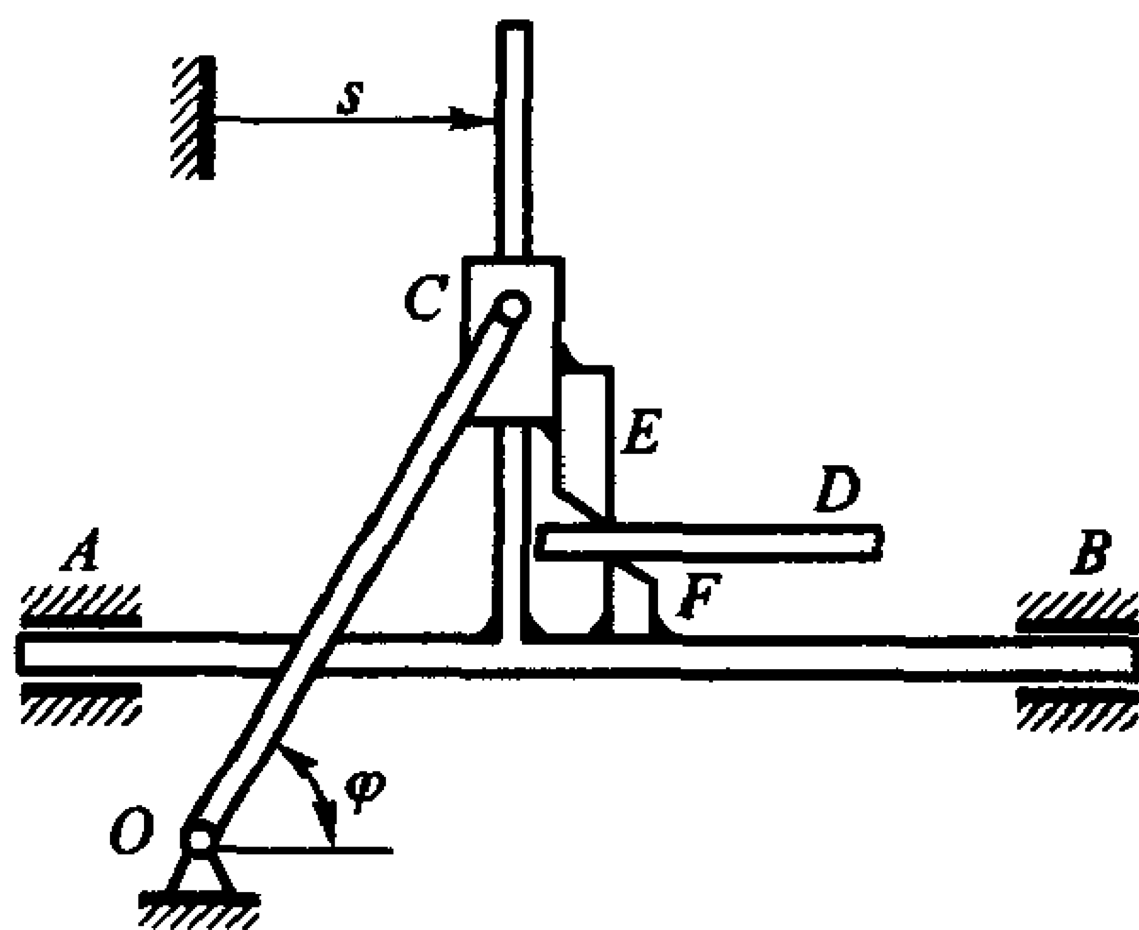
题 8－16 图

8－17　图示铰接四边形机构中，$O_1A=O_2B=100$ mm，又 $O_1O_2=AB$，杆 O_1A 以等角速度 $\omega=2$ rad/s 绕轴 O_1 转动。杆 AB 上有一套筒 C，此套筒与杆 CD 相铰接。机构的各部件都在同一铅直面内。求当 $\varphi=60°$ 时，杆 CD 的速度和加速度。

8－18　剪切金属板的"飞剪机"机构如图。工作台 AB 的移动规律是 $s=0.2\sin\frac{\pi}{6}t$ m，滑块 C 带动上刀片 E 沿导柱运动以切断工件 D，下刀片 F 固定在工作台上。设曲柄 $OC=0.6$ m，$t=1$ s 时，$\varphi=60°$。求该瞬时刀片 E 相对于工作台运动的速度和加速度，并求曲柄 OC 转动的角速度及角加速度。

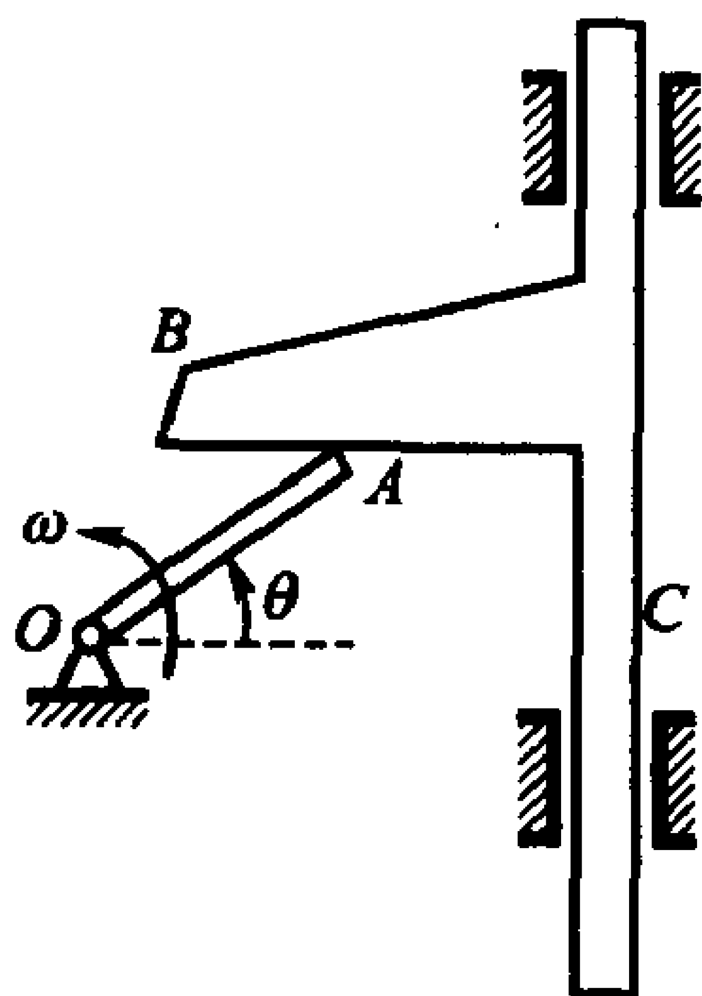


题 8-17 图

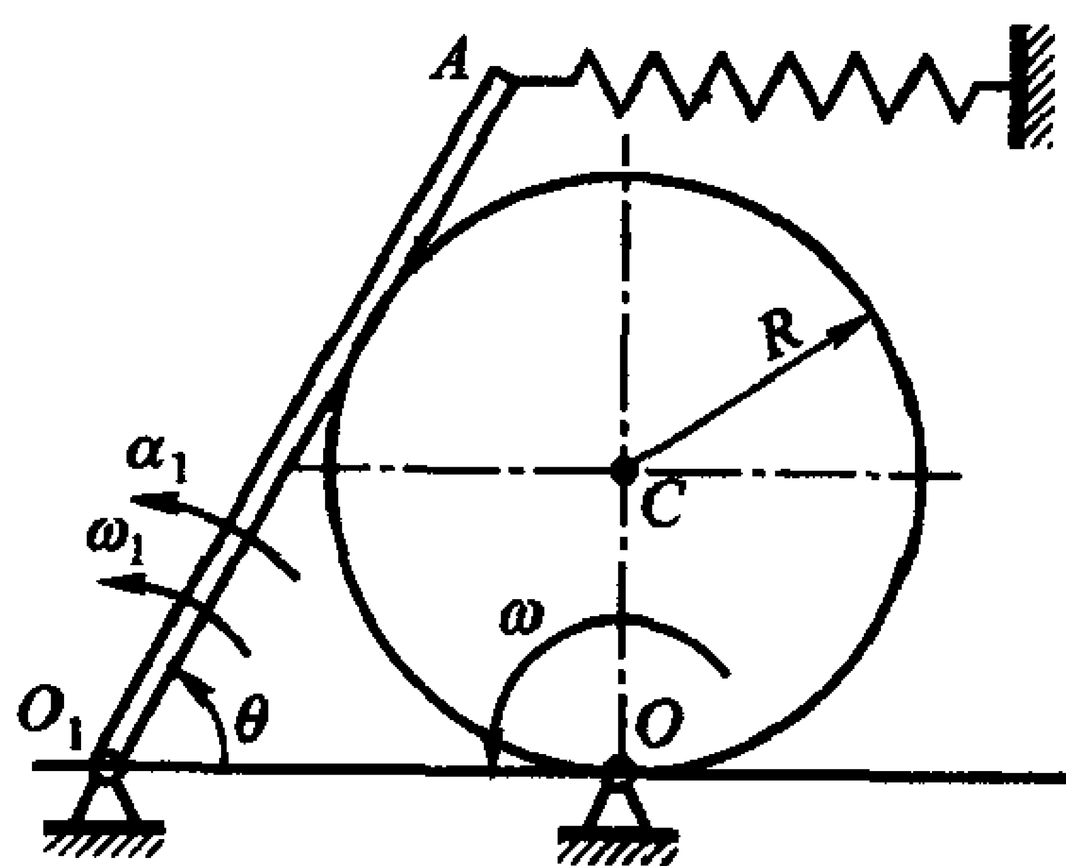


题 8-18 图

8-19 如图所示,曲柄 OA 长 0.4m,以等角速度 $\omega=0.5\ \mathrm{rad/s}$ 绕 O 轴逆时针转向转动。由于曲柄的 A 端推动水平板 B,而使滑杆 C 沿铅直方向上升。求当曲柄与水平线间的夹角 $\theta=30°$时,滑杆 C 的速度和加速度。



题 8-19 图



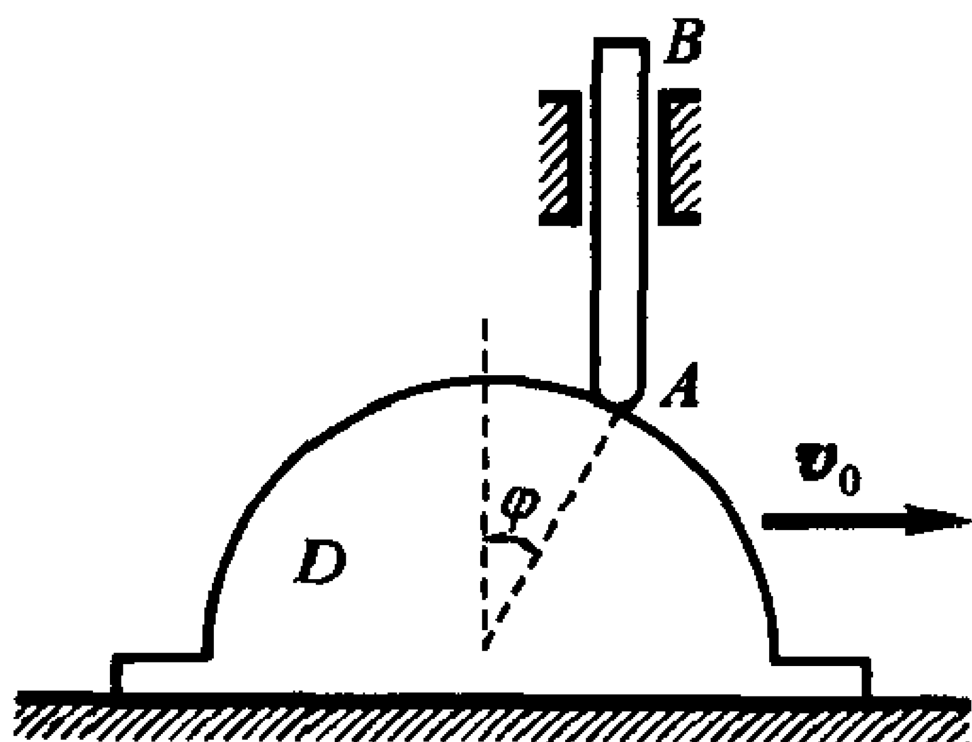
题 8-20 图

8-20 图示偏心轮摇杆机构中,摇杆 O_1A 借助弹簧压在半径为 R 的偏心轮 C 上。偏心轮 C 绕轴 O 往复摆动,从而带动摇杆绕轴 O_1 摆动。设 $OC\perp OO_1$ 时,轮 C 的角速度为 ω,角加速度为零,$\theta=60°$。求此时摇杆 O_1A 的角速度 ω_1 和角加速度 α_1。

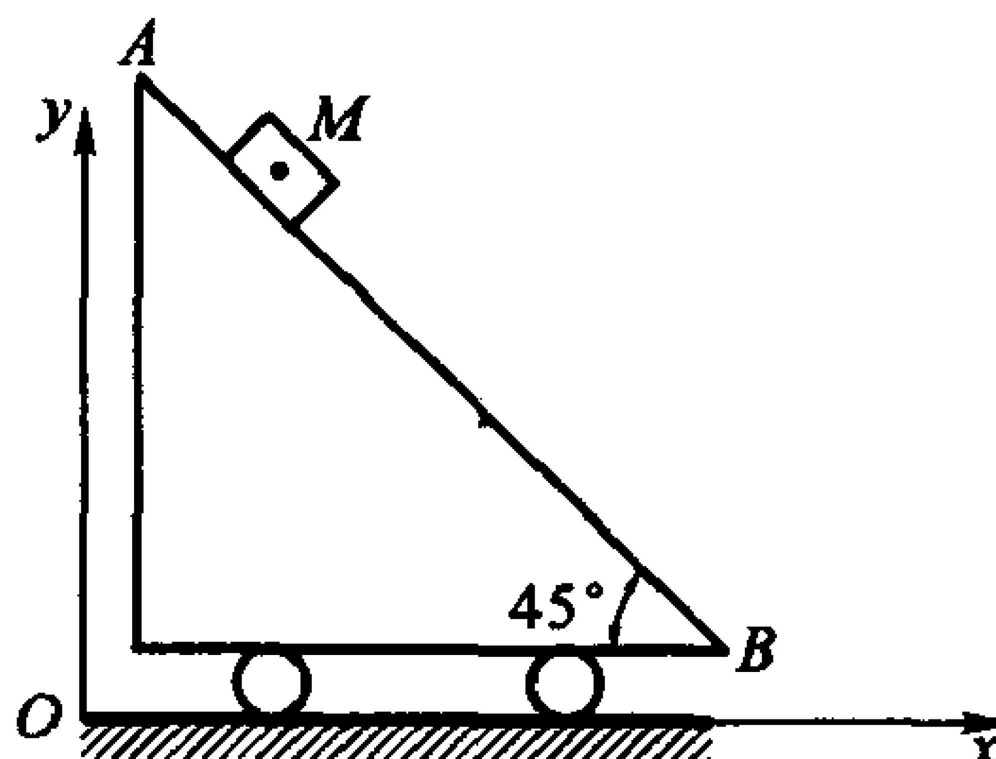
8-21 半径为 R 的半圆形凸轮 D 以等速 v_0 沿水平线向右运动,带动从动杆 AB 沿铅直方向上升,如图所示。求 $\varphi=30°$时杆 AB 相对于凸轮的速度和加速度。

8-22 如图所示,斜面 AB 与水平面间成 45°角,以 0.1 $\mathrm{m/s^2}$ 的加速度沿 Ox 轴向右运动。物块 M 以匀相对加速度 $0.1\sqrt{2}\ \mathrm{m/s^2}$,沿斜面滑下,斜面与物块的初速都是零。物块的初位置为:坐标 $x=0$、$y=h$。求物块的绝对运动方程、运动轨迹、速度和加速度。

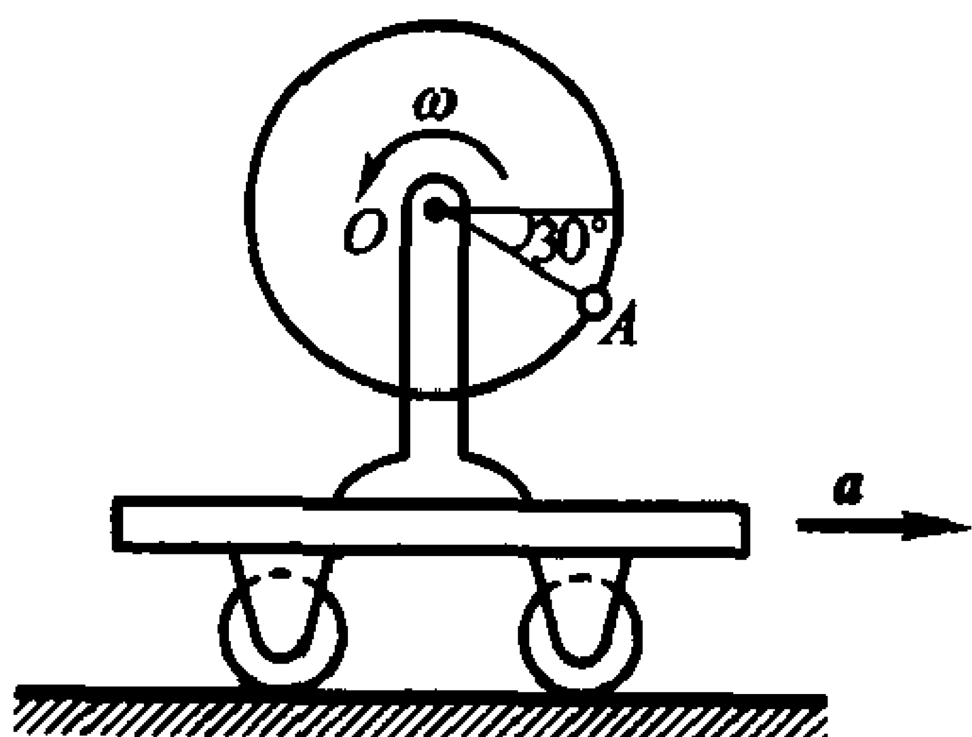
8-23 小车沿水平方向向右作加速运动,其加速度 $a=0.493\ \mathrm{m/s^2}$。在小车上有一轮绕 O 轴转动,转动的规律为 $\varphi=t^2$(t 以 s 计,φ 以 rad 计)。当 $t=1$ s 时,轮缘上点 A 的位置如图所示。如轮的半径 $r=0.2$ m,求此时点 A 的绝对加速度。



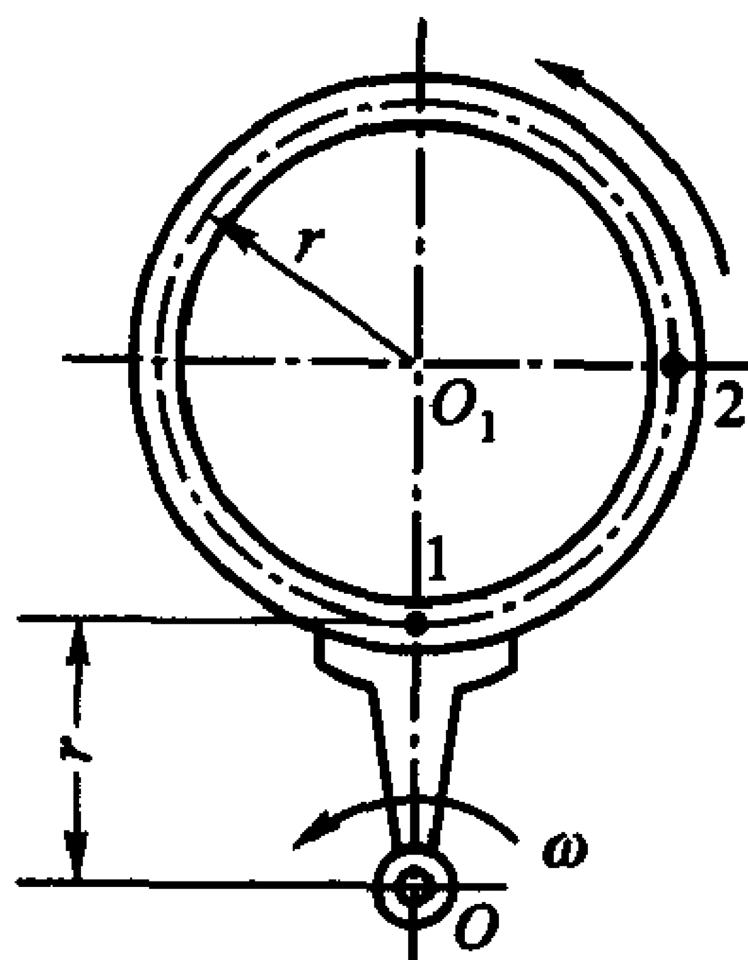
题 8－21 图



题 8－22 图



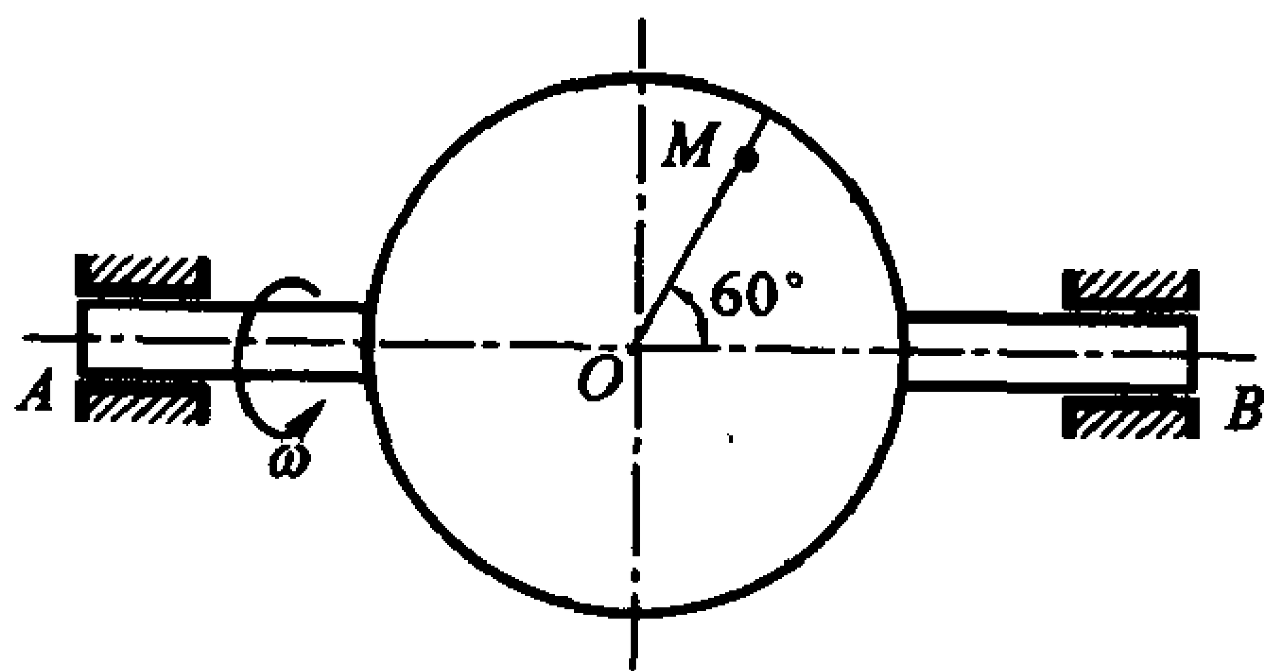
题 8－23 图



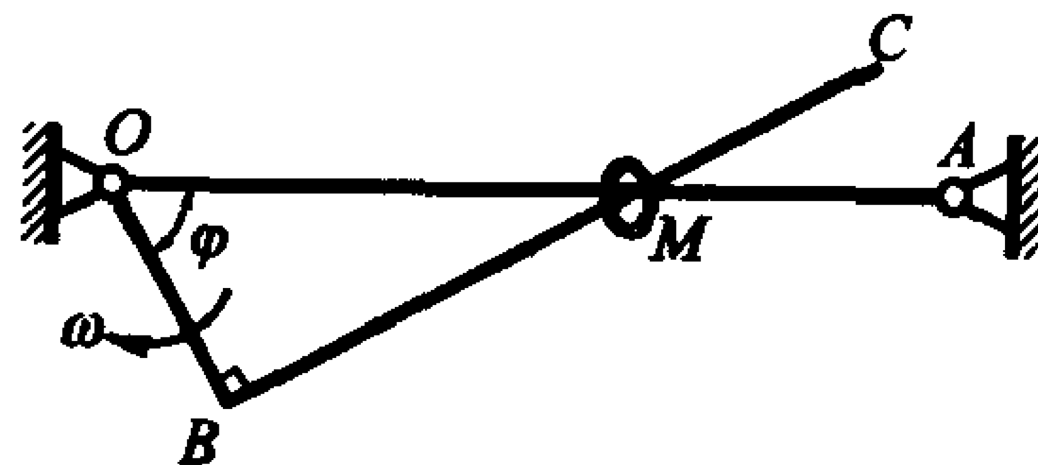
题 8－24 图

8－24 如图所示，半径为 r 的圆环内充满液体，液体按箭头方向以相对速度 v 在环内作匀速运动。如圆环以等角速度 ω 绕 O 轴转动，求在圆环内点 1 和 2 处液体的绝对加速度的大小。

8－25 图示圆盘绕 AB 轴转动，其角速度 $\omega=2t$ rad/s。点 M 沿圆盘直径离开中心向外缘运动，其运动规律为 $OM=40t^2$ mm。半径 OM 与 AB 轴间成 60°角。求当 $t=1$ s 时点 M 的绝对加速度的大小。



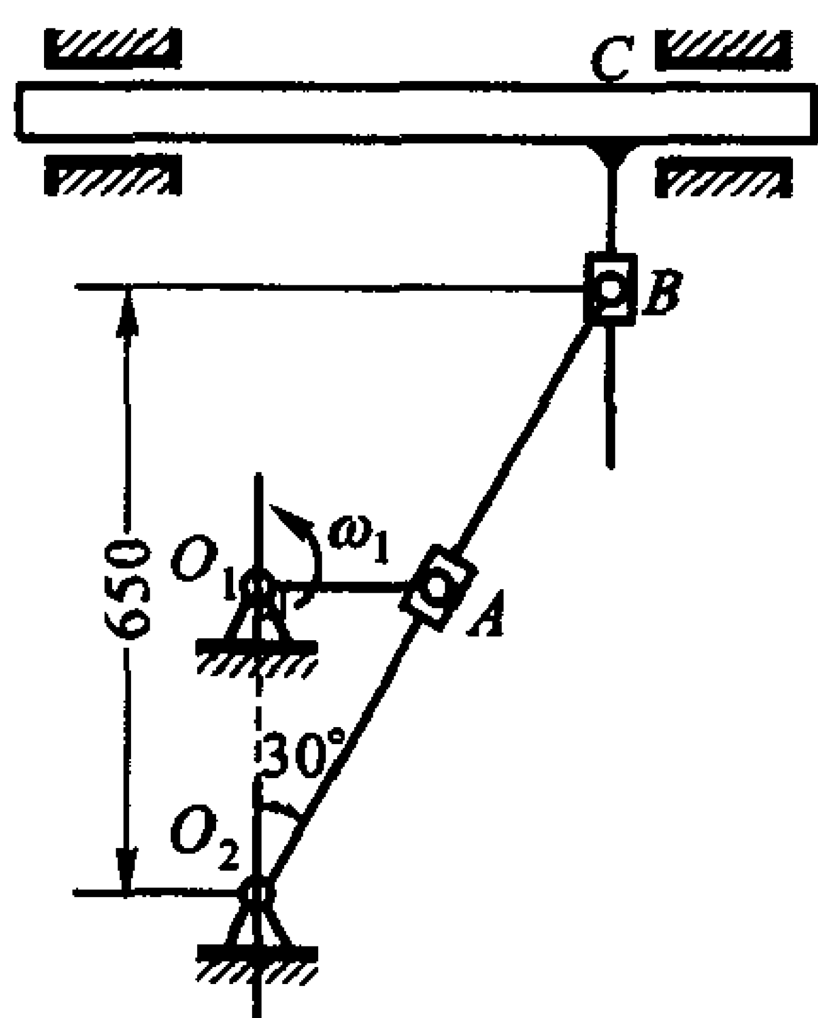
题 8－25 图



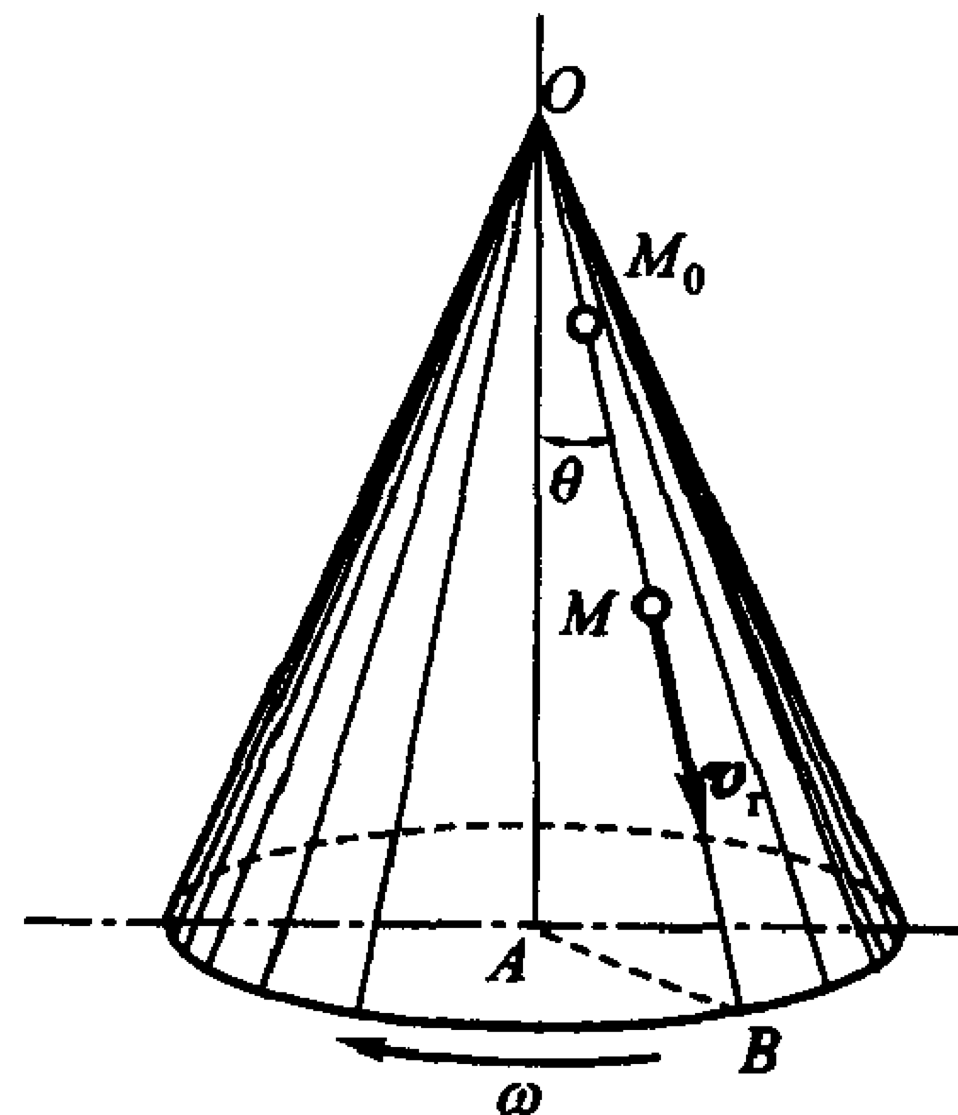
题 8－26 图

8－26 图示直角曲杆 OBC 绕 O 轴转动，使套在其上的小环 M 沿固定直杆 OA 滑动。已知：$OB=0.1$ m，OB 与 BC 垂直，曲杆的角速度 $\omega=0.5$ rad/s，角加速度为零。求当 $\varphi=60°$ 时，小环 M 的速度和加速度。

8-27 牛头刨床机构如图所示。已知 $O_1A=200\ \text{mm}$，与角速度 $\omega_1=2\ \text{rad/s}$，角加速度 $\alpha=0$。求图示位置滑枕 CD 的速度和加速度。



题 8-27 图



题 8-28 图

8-28 如图所示，点 M 以不变的相对速度$\boldsymbol{v}_r$ 沿圆锥体的母线向下运动。此圆锥体以角速度 ω 绕 OA 轴作匀速转动。如$\angle MOA=\theta$，且当 $t=0$ 时点在 M_0 处，此时距离 $OM_0=b$。求在 t 秒时，点 M 的绝对加速度的大小。

第九章　刚体的平面运动

第七章讨论的刚体平移与定轴转动是最常见的、简单的刚体运动。刚体还可以有更复杂的运动形式，其中，刚体的平面运动是工程机械中较为常见的一种刚体运动；它可以看作为平移与转动的合成，也可以看作为绕不断运动的轴的转动。

本章将分析刚体平面运动的分解，平面运动刚体的角速度、角加速度，以及刚体上各点的速度和加速度。

§9-1　刚体平面运动的概述和运动分解

工程中有很多零件的运动，例如行星齿轮机构中动齿轮 A 的运动（图 9-1）、曲柄连杆机构中连杆 AB 的运动（图 9-2），以及沿直线轨道滚动的轮子的运动等，这些刚体的运动既不是平移，又不是绕定轴的转动，但它们有一个共同的特点，即在运动中，刚体上的任意一点与某一固定平面始终保持相等的距离。这种运动称为**平面运动**。平面运动刚体上的各点都在平行于某一固定平面的平面内运动。

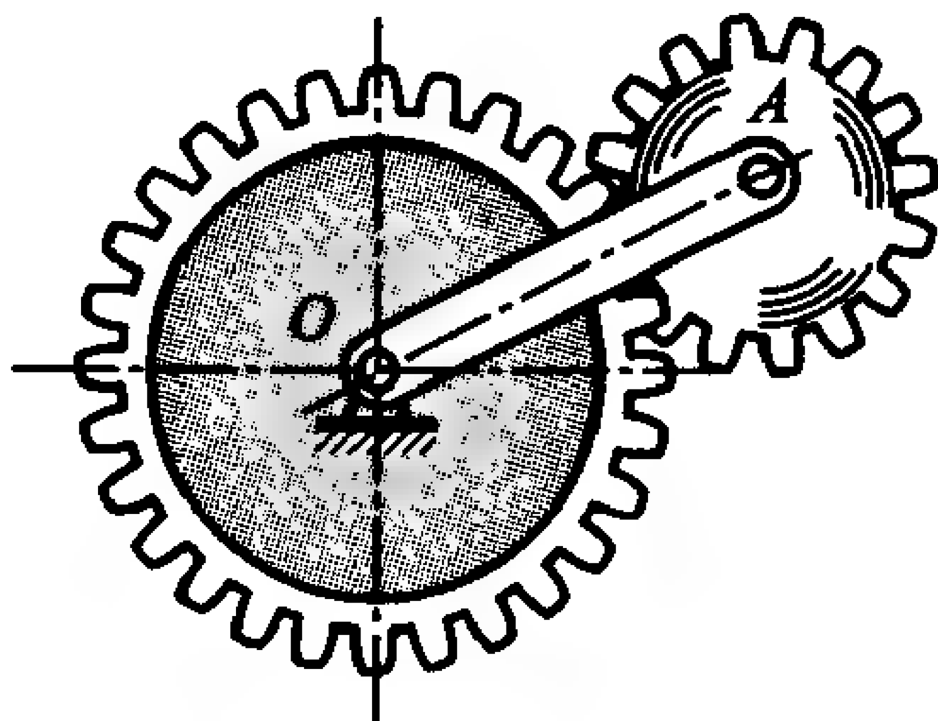


图 9-1

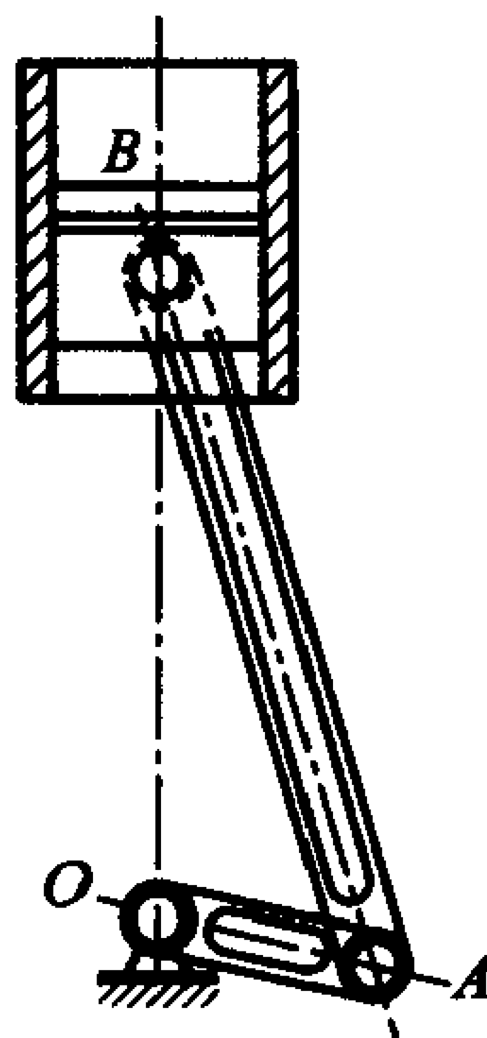


图 9-2

图 9-3a 为一连杆的简图，用一个平行于固定平面的平面截割连杆，得截面 S，它是一个平面图形（图 9-3b）。当连杆运动时，图形内任意一点始终在自身平面内运动。若通过图形上任一点作垂直于图形的直线，则当刚体作平面运动时，该直线作平移，因此平面图形上的这一点与直线上各点的运动完全相同。由

此可知,平面图形上各点的运动可以代表刚体内所有点的运动。因此,刚体的平面运动可简化为平面图形在它自身平面内的运动。

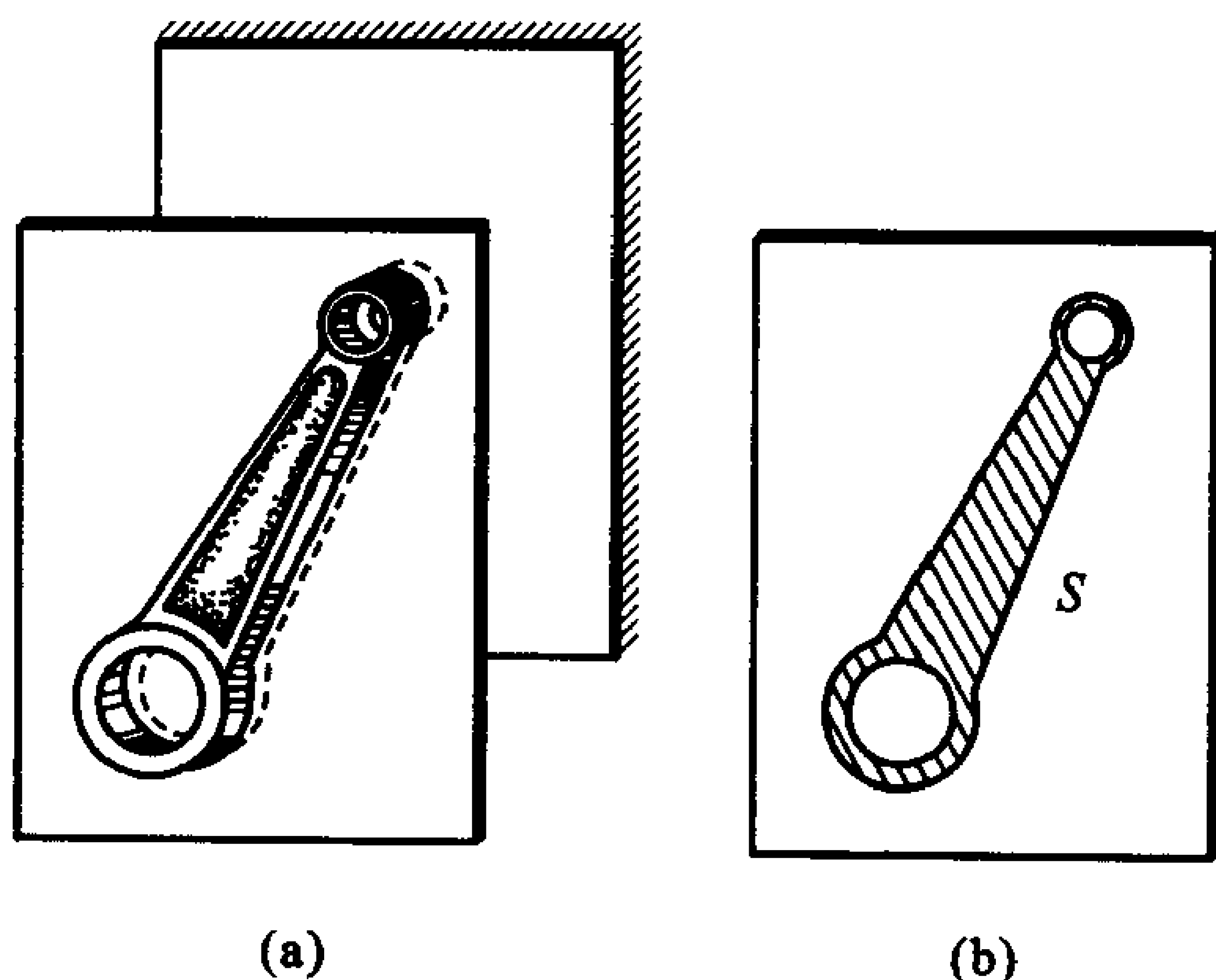


图 9-3

平面图形在其平面上的位置完全可由图形内任意线段 $O'M$ 的位置来确定(图 9-4),而要确定此线段在平面内的位置,只需确定线段上任一点 O' 的位置和线段 $O'M$ 与固定坐标轴 Ox 间的夹角 φ 即可。

点 O' 的坐标和 φ 角都是时间的函数,即

$$x_{O'}=f_1(t),\qquad y_{O'}=f_2(t)\qquad \varphi=f_3(t) \tag{9-1}$$

式(9-1)就是平面图形的运动方程。

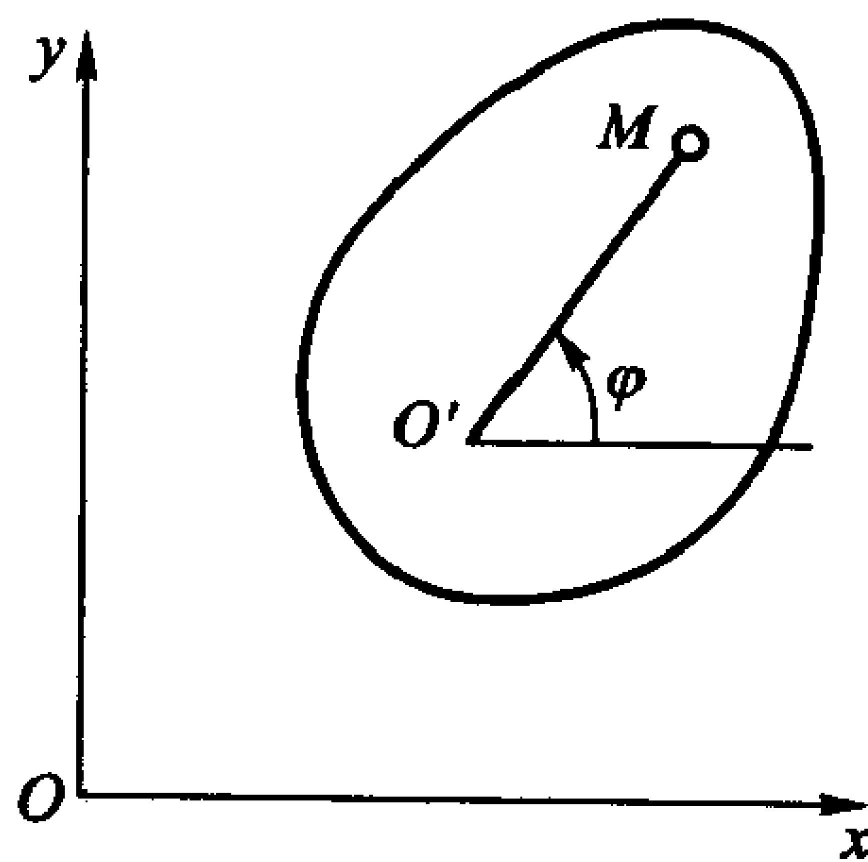


图 9-4

由式(9-1)可见,平面图形的运动方程可由两部分组成:一部分是平面图形按点 O' 的运动方程 $x_{O'}=f_1(t)$、$y_{O'}=f_2(t)$ 的平移,没有转动;另一部分是绕点 O' 转角为 $\varphi=f_3(t)$ 的转动。

平面运动的这种分解也可以按上一章合成运动的观点加以解释。以沿直线轨道滚动的车轮为例(图 9-5a),取车厢为动参考体,以轮心点 O' 为原点取动参考系 $O'x'y'$,则车厢的平移是牵连运动,车轮绕平移参考系原点 O' 的转动是相对运动,二者的合成就是车轮的平面运动(绝对运动)。单独轮子作平面运动时,可以轮心 O' 为原点,建立一个平移参考系 $O'x'y'$(图 9-5b),同样可把轮子这种较为复杂的平面运动分解为平移和转动两种简单的运动。

对于任意的平面运动,可在平面图形上任取一点 O',称为**基点**。在这一点假想地安上一个平移参考系 $O'x'y'$;平面图形运动时,动坐标轴方向始终保持

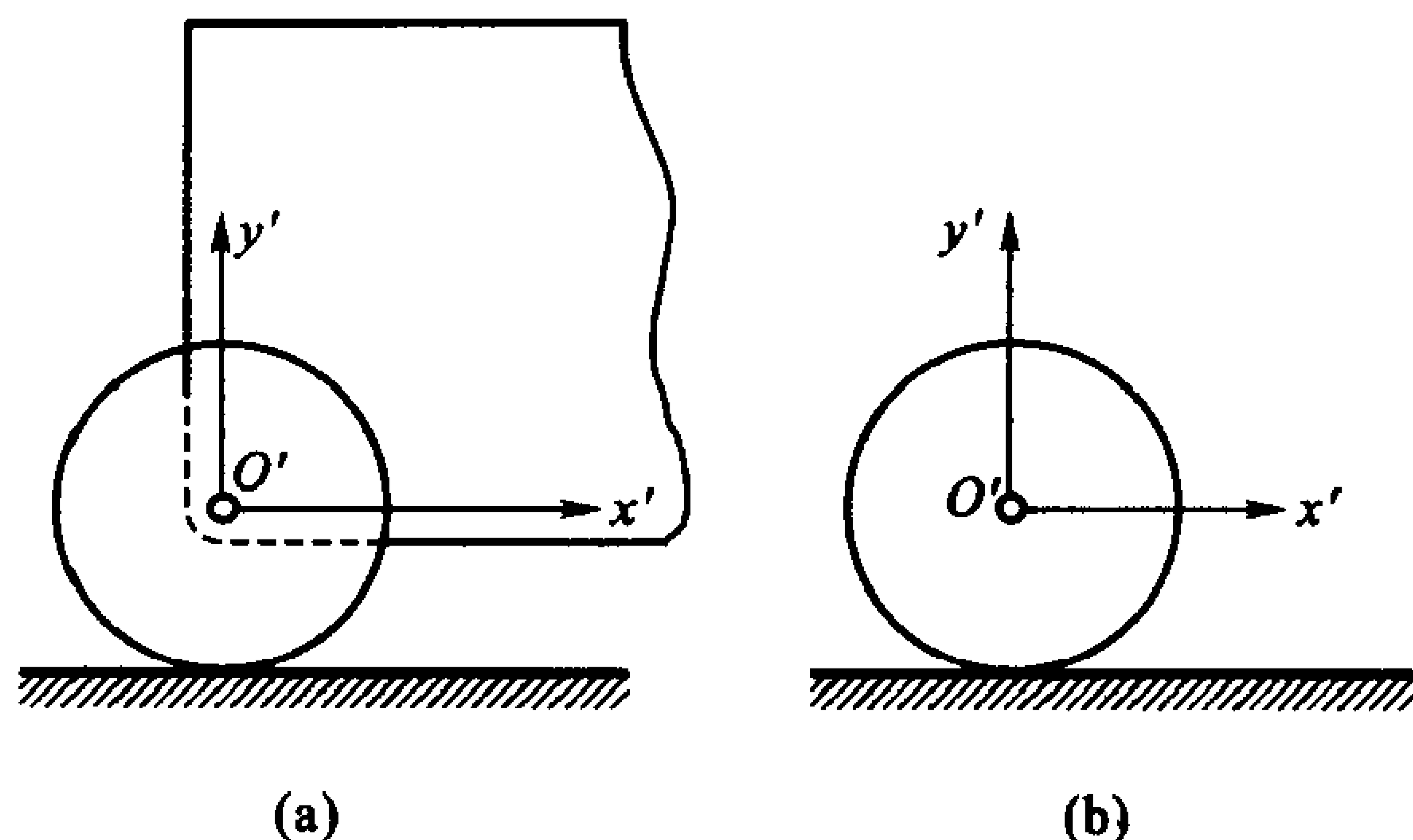


图 9-5

不变,可令其分别平行于定坐标轴 Ox 和 Oy,如图 9-6 所示。于是,平面图形的平面运动可看成为随同基点的平移和绕基点转动这两部分运动的合成。

图 9-7 所示的曲柄连杆机构中,曲柄 OA 为定轴转动,滑块 B 为直线平移,而连杆 AB 则作平面运动。如以 B 为基点,即在滑块 B 上建立一个平移参考系,以 $Bx'y'$ 表示,则杆 AB 的平面运动可分解为随同基点 B 的直线平移和在动系 $Bx'y'$ 内绕基点 B 的转动。同样,还可以 A 为基点,在点 A 安上一个平移参考系 $Ax''y''$,杆 AB 的平面运动又可分解为随同基点 A 的平移和绕基点 A 的转动。

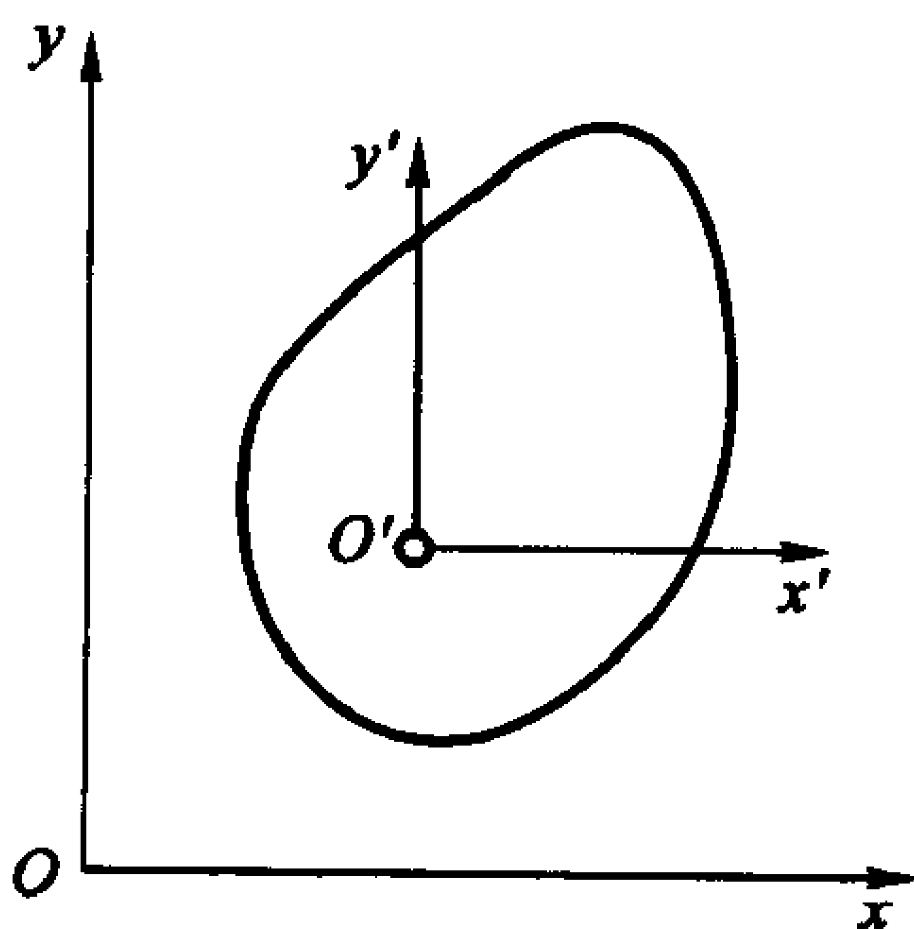


图 9-6

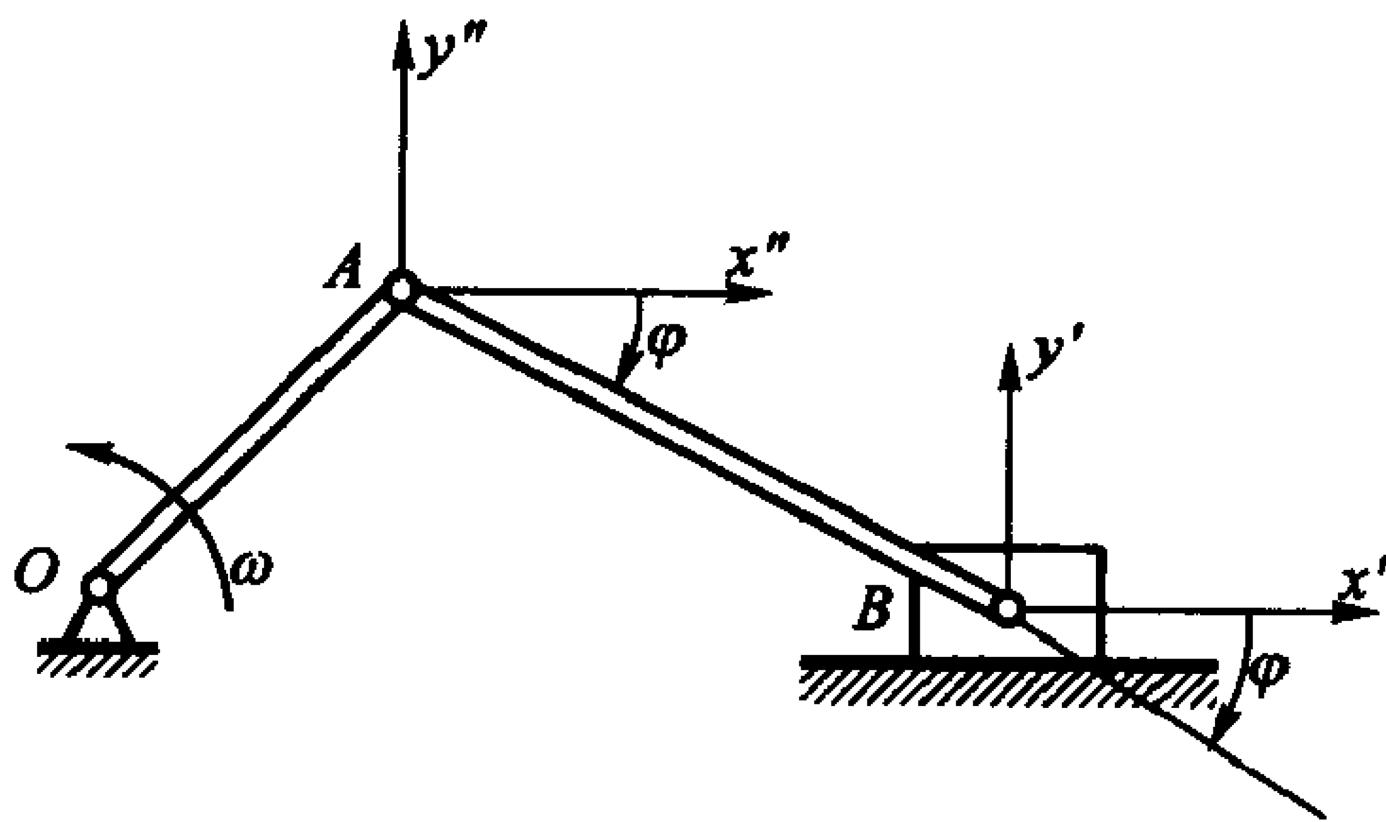


图 9-7

必须指出,上述分解中,总是以选定的基点为原点,建立一个平移的动参考系(实际机构中可以不存在这个平移物体),所谓绕基点的转动,是指相对于这个平移参考系的转动。

研究平面运动时,可以选择不同的点作为基点。一般平面图形上各点的运动情况是不相同的,例如图 9-7 所示连杆上的点 B 作直线运动,点 A 作圆周运

动。因此，在平面图形上选取不同的基点，其动参考系的平移是不一样的，其速度和加速度是不相同的。由图9-7还可以看出：如果运动起始时 OA 和 AB 都位于水平位置，运动中的任一时刻，AB 连线绕点 A 或绕点 B 的转角，相对于各自的平移参考系 $Ax''y''$ 或 $Bx'y'$，都是一样的，都等于相对于固定参考系的转角 φ。由于任一时刻的转角相同，其角速度、角加速度也必然相同。于是可得结论：平面运动可取任意基点而分解为平移和转动，其中平移的速度和加速度与基点的选择有关，而平面图形绕基点转动的角速度和角加速度与基点的选择无关。这里所谓的角速度和角加速度是相对于各基点处的平移参考系而言的。平面图形相对于各平移参考系（包括固定参考系），其转动运动都是一样的，角速度、角加速度都是共同的，无需标明绕哪一点转动或选哪一点为基点。

§9-2 求平面图形内各点速度的基点法

现在讨论平面图形内各点的速度。

由前一节分析可知，任何平面图形的运动可分解为两个运动：(1)牵连运动，即随同基点 O' 的平移；(2)相对运动，即绕基点 O' 的转动。于是，平面图形内任一点 M 的运动也是两个运动的合成，因此可用速度合成定理来求它的速度，这种方法称为**基点法**。

因为牵连运动是平移，所以点 M 的牵连速度等于基点的速度 $\boldsymbol{v}_{O'}$，如图9-8所示。又因为点 M 的相对运动是以点 O' 为圆心的圆周运动，所以点 M 的相对速度就是平面图形绕点 O' 转动时点 M 的速度，以 $\boldsymbol{v}_{MO'}$ 表示，它垂直于 $O'M$ 而朝向图形的转动方向，大小为

$$v_{MO'} = O'M \cdot \omega$$

式中 ω 是平面图形角速度的绝对值（以下同）。以速度 $\boldsymbol{v}_{O'}$ 和 $\boldsymbol{v}_{MO'}$ 为边作平行四边形，于是，点 M 的绝对速度就由这个平行四边形的对角线确定，即

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{v}_{MO'} \qquad (9-2)$$

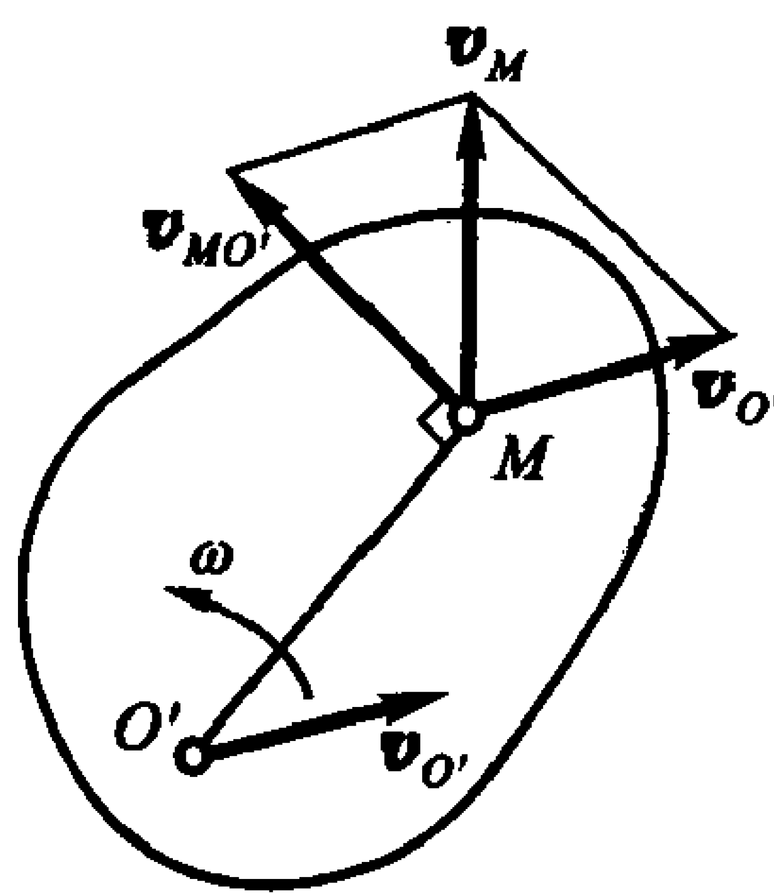


图9-8

上式是平面图形内任意点 M 的速度分解式。根据此式，可作出平面图形内直线 $O'M$ 上各点速度的分布图，如图9-9所示。

于是得结论：平面图形内任一点的速度等于基点的速度与该点随图形绕基点转动速度的矢量和。

根据这个结论，平面图形内任意两点 A 和 B 的速度 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 必存在一定的关系。如果选取点 A 为基点，以 $\boldsymbol{v}_{BA}$ 表示点 B 相对点 A 的相对速度，根据上述结论，得

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{BA} \tag{9-3}$$

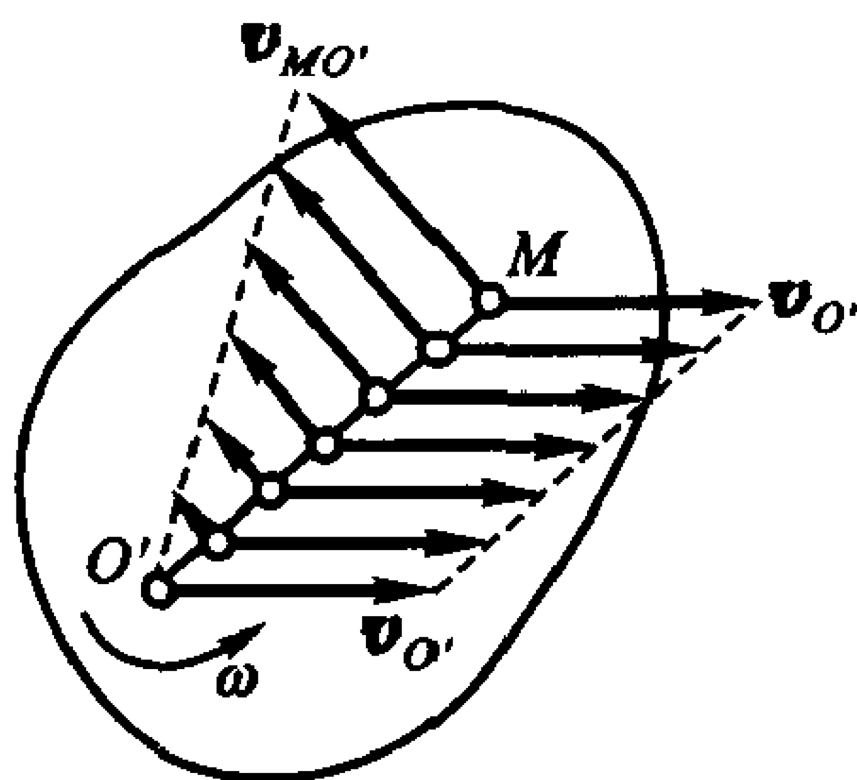


图 9-9

式中相对速度$\boldsymbol{v}_{BA}$的大小为

$$v_{BA}=AB\cdot\omega$$

它的方向垂直于AB，且朝向图形转动的一方。

在解题时，我们常用式(9-3)。与前一章的分析相同，在这里$\boldsymbol{v}_A$，$\boldsymbol{v}_B$和$\boldsymbol{v}_{BA}$各有大小和方向两个要素，共计六个要素，要使问题可解，一般应有四个要素是已知的。在平面图形的运动中，点的相对速度$\boldsymbol{v}_{BA}$的方向总是已知的，它垂直于线段AB。于是，只须知道任何其它三个要素，便可作出速度平行四边形。

例 9-1　椭圆规尺的A端以速度$\boldsymbol{v}_A$沿x轴的负向运动，如图 9-10 所示，$AB=l$。求B端的速度以及尺AB的角速度。

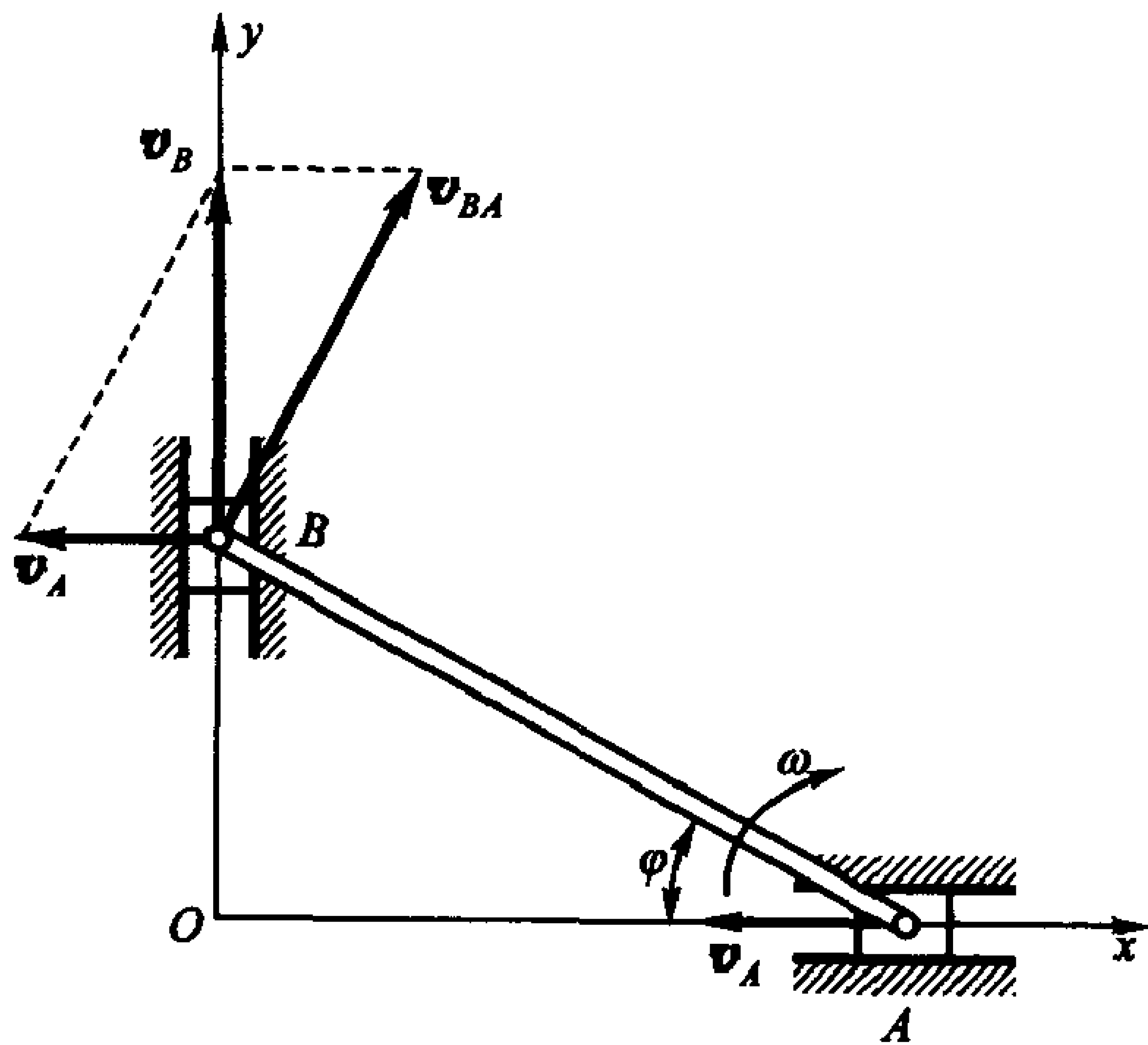


图 9-10

解： 尺AB作平面运动，因而可用公式

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{BA}$$

在本题中$\boldsymbol{v}_A$的大小和方向，以及$\boldsymbol{v}_B$的方向都是已知的(因B端在y轴上作直线运动)。共计有三个要素是已知的，再加上$\boldsymbol{v}_{BA}$的方向垂直于AB这一要素，可以作出速度平行四边形如图 9-10 所示。作图时，应注意使$\boldsymbol{v}_B$位于平行四边形的对角线上。

由图中的几何关系可得

$$v_B=v_A\cot\varphi$$

此外

$$v_{BA}=\frac{v_A}{\sin\varphi}$$

但另一方面，$v_{BA}=AB\cdot\omega$，此处 ω 是尺 AB 的角速度，由此，得

$$\omega=\frac{v_{BA}}{AB}=\frac{v_{BA}}{l}=\frac{v_A}{l\sin\varphi}$$

例 9-2 图 9-11 所示平面机构中，$AB=BD=DE=l=300$ mm。在图示位置时，BD // AE，杆 AB 的角速度为 $\omega=5$ rad/s。求此瞬时杆 DE 的角速度和杆 BD 中点 C 的速度。

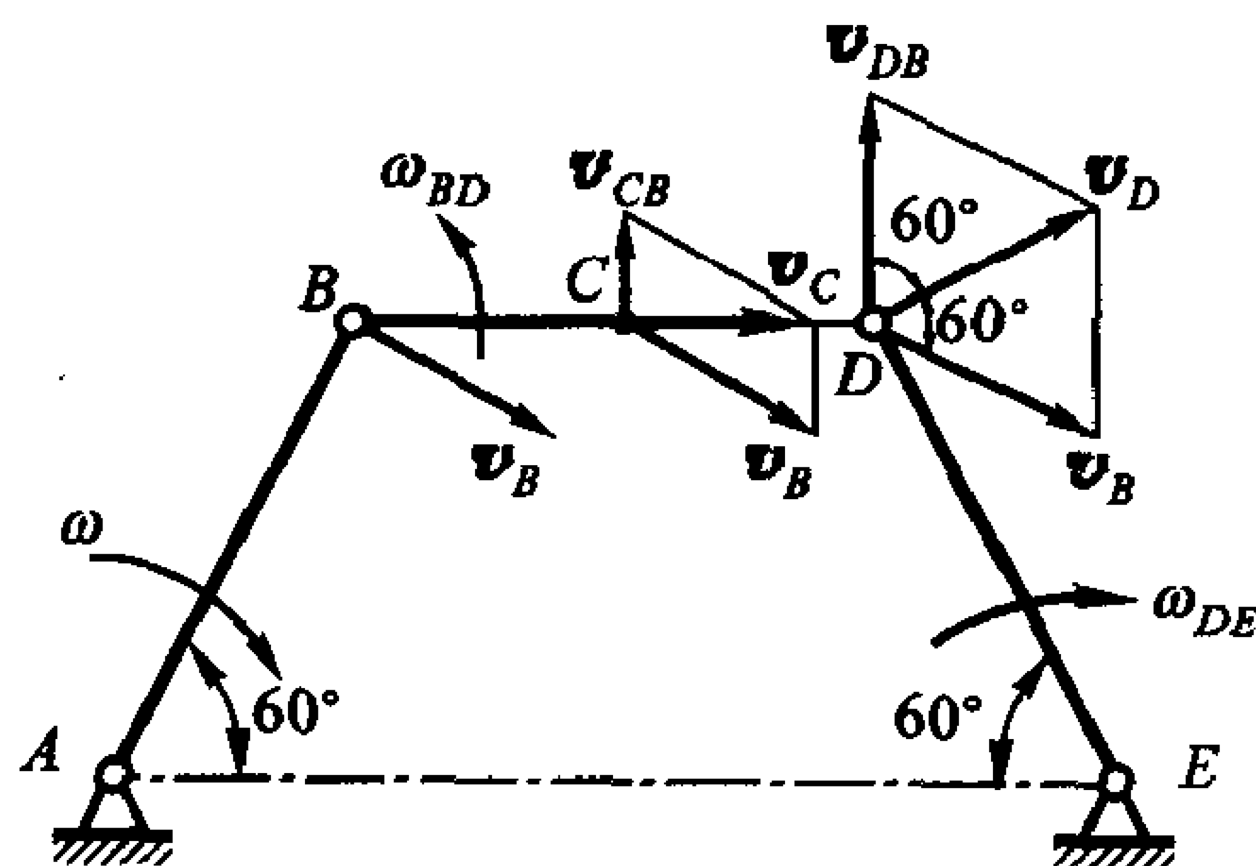


图 9-11

解： 杆 DE 绕点 E 转动，为求其角速度可先求点 D 的速度。杆 BD 作平面运动，而点 B 也是转动刚体 AB 上一点，其速度为

$$v_B=\omega l=300\ \text{mm}\times 5\ \text{rad/s}=1.5\ \text{m/s}$$

方向如图。

对平面运动的杆 BD，可以点 B 为基点，按式(9-3)得

$$\boldsymbol{v}_D=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{v}_{DB}$$

其中 $\boldsymbol{v}_B$ 大小和方向均为已知，相对速度 $\boldsymbol{v}_{DB}$ 的方向与 BD 垂直，点 D 的速度 $\boldsymbol{v}_D$ 与 DE 垂直。由于上式中四个要素是已知的，可以作出其速度平行四边形如图所示，其中 $\boldsymbol{v}_D$ 位于平行四边形的对角线。由此瞬时的几何关系，得知

$$v_D=v_{DB}=v_B=1.5\ \text{m/s}$$

于是解出此瞬时杆 DE 的角速度为

$$\omega_{DE}=v_D/l=\frac{1.5\ \text{m/s}}{0.3\ \text{m}}=5\ \text{rad/s}$$

方向如图。

$\boldsymbol{v}_{DB}$ 为点 D 相对 B 的速度，应有

$$v_{DB}=\omega_{BD}\cdot BD$$

由此可得此瞬时杆 BD 的角速度

$$\omega_{BD}=v_{DB}/l=\frac{1.5\ \text{m/s}}{0.3\ \text{m}}=5\ \text{rad/s}$$

方向如图。在求得杆 BD 角速度的基础上，可以点 B 或 D 为基点，求出杆 BD 上任一点的速度。如仍以点 B 为基点，杆 BD 中点 C 的速度为

$$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{v}_{CB}$$

其中 $\boldsymbol{v}_B$ 的大小和方向均为已知，$\boldsymbol{v}_{CB}$ 方向与杆 BD 垂直，大小为 $v_{CB}=\omega_{BD}\cdot\dfrac{l}{2}=0.75$ m/s。已

知四个要素,可作出上式的速度平行四边形如图。由此瞬时速度矢的几何关系,得出此时 $\boldsymbol{v}_C$ 的方向恰好沿杆 BD,大小为

$$v_C=\sqrt{v_B^2-v_{CB}^2}\approx 1.299\ \mathrm{m/s}$$

例 9-3 曲柄连杆机构如图 9-12a 所示,$OA=r$,$AB=\sqrt{3}r$。如曲柄 OA 以匀角速度 ω 转动,求当 $\varphi=60°$,$0°$和 $90°$时点 B 的速度。

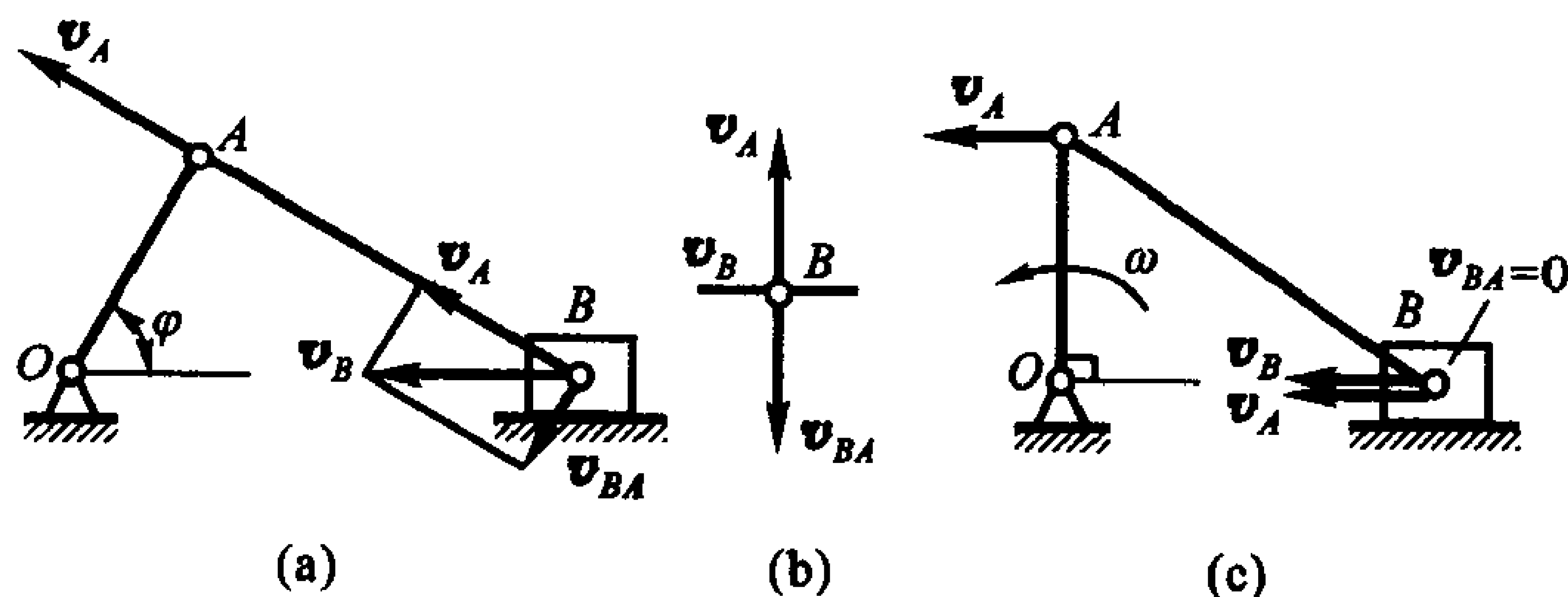


图 9-12

解: 连杆 AB 作平面运动,以点 A 为基点,点 B 的速度为

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{BA}$$

其中 $v_A=\omega r$,方向与 OA 垂直,$\boldsymbol{v}_B$ 沿 OB 方向,$\boldsymbol{v}_{BA}$ 与 AB 垂直。上式中四个要素是已知的,可以作出其速度平行四边形。

当 $\varphi=60°$时,由于 $AB=\sqrt{3}OA$,OA 恰与 AB 垂直,其速度平行四边形如图 9-12a 所示,解出

$$v_B=v_A/\cos 30°=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ \omega r$$

当 $\varphi=0°$时,$\boldsymbol{v}_A$ 与$\boldsymbol{v}_{BA}$均垂直于 OB,也垂直于$\boldsymbol{v}_B$,按速度平行四边形合成法则,应有 $v_B=0$(图 9-12b)。

当 $\varphi=90°$时,$\boldsymbol{v}_A$ 与$\boldsymbol{v}_B$ 方向一致,而$\boldsymbol{v}_{BA}$又垂直于 AB,其速度平行四边形应为一直线段,如图 9-12c 所示,显然有

$$v_B=v_A=\omega r$$

而 $v_{BA}=0$。此时杆 AB 的角速度为零,A,B 两点的速度大小与方向都相同,连杆 AB 具有平移刚体的特征。但杆 AB 只在此瞬时有$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A$,其他时刻则不然,因而称此时的连杆作瞬时平移。

例 9-4 图 9-13 所示的行星轮系中,大齿轮 Ⅰ 固定,半径为 r_1;行星齿轮 Ⅱ 沿轮 Ⅰ 只滚而不滑动,半径为 r_2。系杆 OA 角速度为 ω_O。求轮 Ⅱ 的角速度 $\omega_{\text{Ⅱ}}$ 及其上 B,C 两点的速度。

解: 行星轮 Ⅱ 作平面运动,其上点 A 的速度可由系杆 OA 的转动求得

$$v_A=\omega_O\cdot OA=\omega_O(r_1+r_2)$$

方向如图。

以 A 为基点,轮 Ⅱ 上与轮 Ⅰ 接触的点 D 的速度应为

$$\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{DA}$$

由于齿轮Ⅰ固定不动，接触点 D 不滑动，显然 $v_D = 0$，因而有 $v_{DA} = v_A = \omega_O(r_1 + r_2)$，方向与 $\boldsymbol{v}_A$ 相反，如图。$\boldsymbol{v}_{DA}$为点 D 相对基点 A 的速度，应有 $v_{DA} = \omega_{\text{II}} \cdot DA$。由此可得

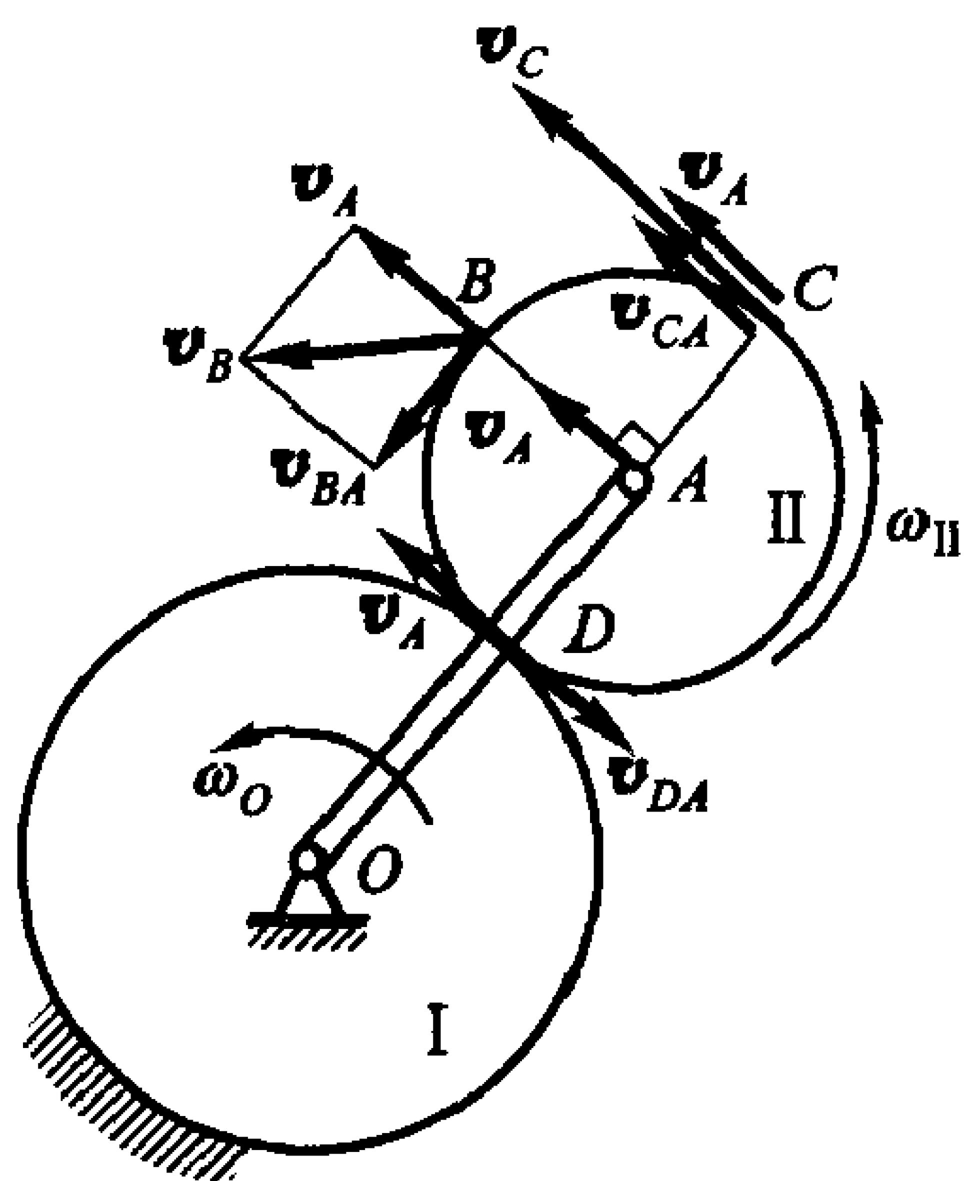


图 9-13

$$\omega_{\text{II}} = \frac{v_{DA}}{DA} = \frac{\omega_O(r_1 + r_2)}{r_2}$$

为逆时针转向，如图。

以 A 为基点，点 B 的速度为

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

而 $v_{BA} = \omega_{\text{II}} \cdot BA = \omega_O(r_1 + r_2) = v_A$，方向与 $\boldsymbol{v}_A$ 垂直，如图所示。因此，$\boldsymbol{v}_B$ 与 $\boldsymbol{v}_A$ 的夹角为 45°，指向如图，大小为

$$v_B = \sqrt{2}\, v_A = \sqrt{2}\, \omega_O(r_1 + r_2)$$

以 A 为基点，点 C 的速度为

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA}$$

而 $v_{CA} = \omega_{\text{II}} \cdot AC = \omega_O(r_1 + r_2) = v_A$，方向与 $\boldsymbol{v}_A$ 一致，由此

$$v_C = v_A + v_{CA} = 2\omega_O(r_1 + r_2)$$

总结以上各例的解题步骤如下：

(1) 分析题中各物体的运动，哪些物体作平移，哪些物体作转动，哪些物体作平面运动。

(2) 研究作平面运动的物体上哪一点的速度大小和方向是已知的，哪一点的速度的某一要素（一般是速度方向）是已知的。

(3) 选定基点（设为 A），而另一点（设为 B）可应用公式 $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$，作速度平行四边形。必须注意，作图时要使 $\boldsymbol{v}_B$ 成为平行四边形的对角线。

(4) 利用几何关系，求解平行四边形中的未知量。

(5) 如果需要再研究另一个作平面运动的物体，可按上述步骤继续进行。

根据式(9-3)容易导出**速度投影定理**：同一平面图形上任意两点的速度在这两点连线上的投影相等。

证明：在图形上任取两点 A 和 B，它们的速度分别为 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$，如图 9-14 所示，则两点的速度必须符合如下关系：

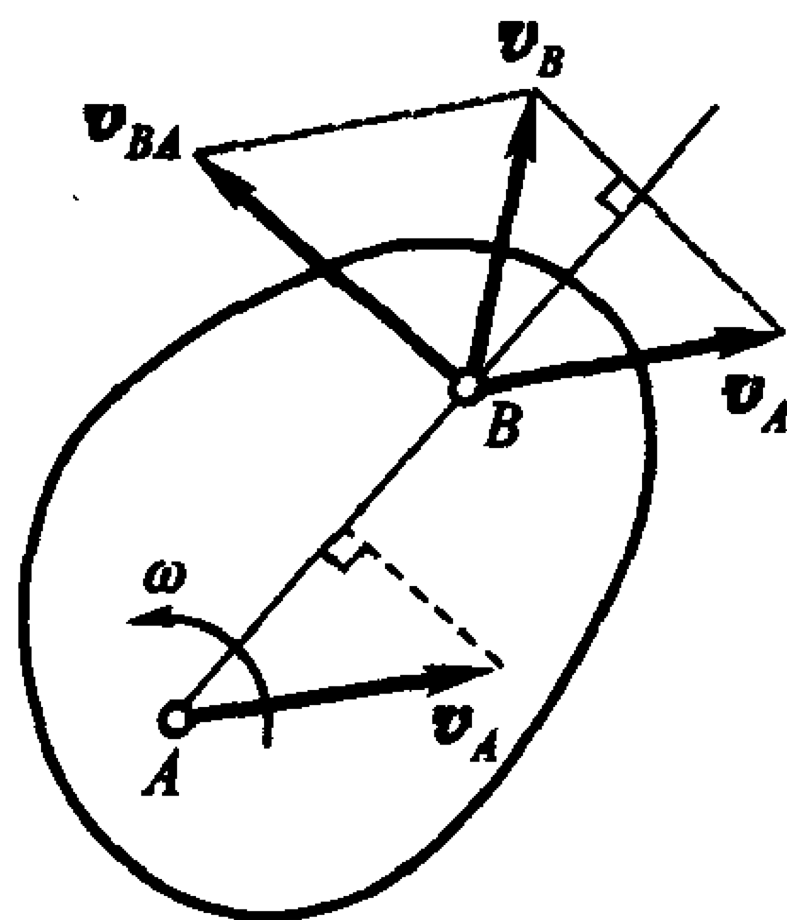


图 9-14

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

将上式两端投影到直线 AB 上，并分别用 $(\boldsymbol{v}_B)_{AB}$，$(\boldsymbol{v}_A)_{AB}$，$(\boldsymbol{v}_{BA})_{AB}$ 表示 $\boldsymbol{v}_B$，$\boldsymbol{v}_A$，$\boldsymbol{v}_{BA}$ 在线段 AB 上的投影，则

$$(\boldsymbol{v}_B)_{AB}=(\boldsymbol{v}_A)_{AB}+(\boldsymbol{v}_{BA})_{AB}$$

由于$\boldsymbol{v}_{BA}$垂直于线段AB,因此$(\boldsymbol{v}_{BA})_{AB}=0$。于是得到

$$(\boldsymbol{v}_B)_{AB}=(\boldsymbol{v}_A)_{AB} \tag{9-4}$$

这就证明了上述定理。

这个定理也可以由下面的理由来说明:因为 A 和 B 是刚体上的两点,它们之间的距离应保持不变,所以两点的速度在 AB 方向的分量必须相同。否则,线段 AB 不是伸长,便要缩短。因此,这定理不仅适用于刚体作平面运动,也适合于刚体作其他任意的运动。

例 9-5 图 9-15 所示的平面机构中,曲柄 OA 长 100 mm,以角速度 $\omega=2$ rad/s 转动。连杆 AB 带动摇杆 CD,并拖动轮 E 沿水平面滚动。已知 $CD=3CB$,图示位置时 A,B,E 三点恰在一水平线上,且 $CD\perp ED$。求此瞬时点 E 的速度。

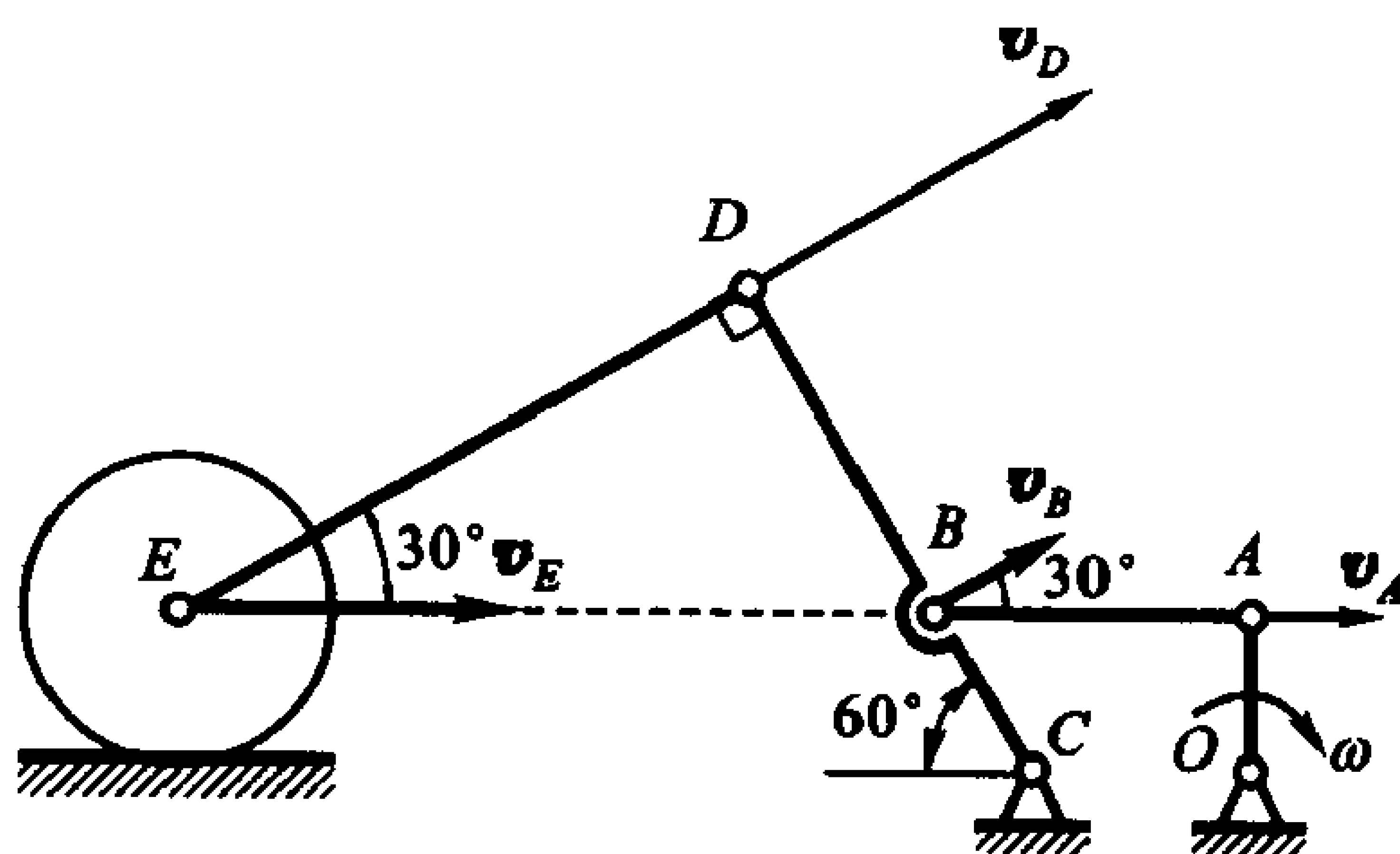


图 9-15

解:
$$v_A=\omega\cdot OA=2\text{ rad/s}\times100\text{ mm}=0.2\text{ m/s}$$

由速度投影定理,杆 AB 上点 A,B 的速度在 AB 线上投影相等,即

$$v_B\cos30^\circ=v_A$$

解出

$$v_B=0.230\,9\text{ m/s}$$

摇杆 CD 绕点 C 转动,有

$$v_D=\frac{v_B}{CB}\cdot CD=3v_B=0.692\,8\text{ m/s}$$

轮 E 沿水平面滚动,轮心 E 的速度方向为水平,由速度投影定理,D,E 两点的速度关系为

$$v_E\cos30^\circ=v_D$$

解出

$$v_E=0.8\text{ m/s}$$

§ 9 - 3　求平面图形内各点速度的瞬心法

研究平面图形上各点的速度,还可以采用瞬心法。求解问题时,瞬心法形象性更好,有时更为方便。

1. 定理

一般情况,在每一瞬时,平面图形上都唯一地存在一个速度为零的点。

证明:设有一个平面图形 S,如图 9 - 16 所示。取图形上的点 A 为基点,它的速度为 $\boldsymbol{v}_A$,图形的角速度的绝对值为 ω,转向如图所示。图形上任一点 M 的速度可按下式计算:

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{MA}$$

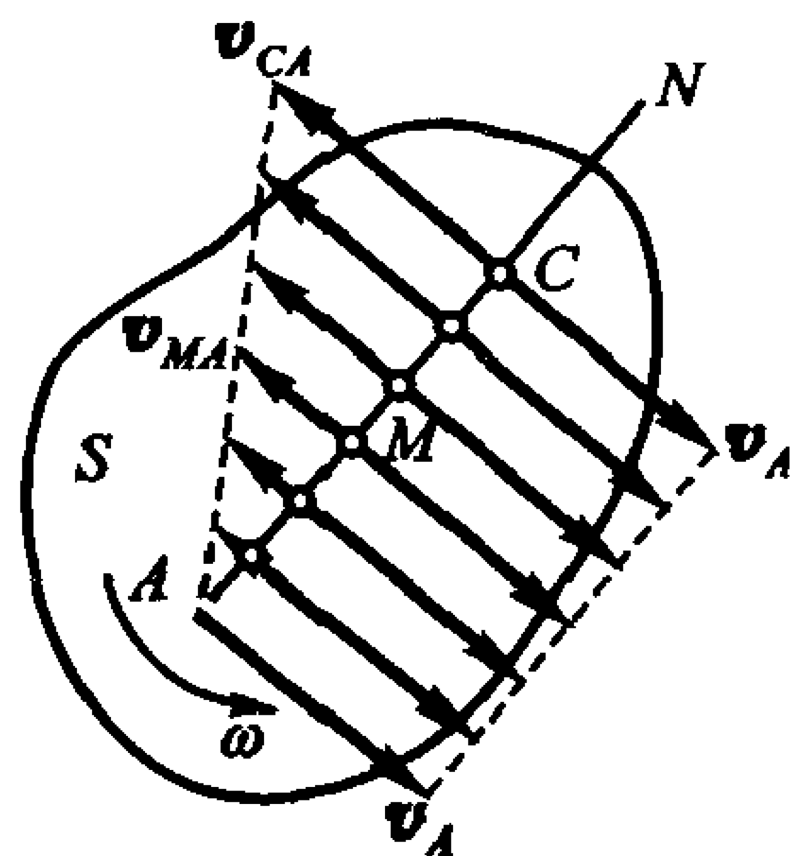


图 9 - 16

如果点 M 在 $\boldsymbol{v}_A$ 的垂线 AN 上(由 $\boldsymbol{v}_A$ 到 AN 的转向与图形的转向一致),由图中看出,$\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_{MA}$ 在同一直线上,而方向相反,故 $\boldsymbol{v}_M$ 的大小为

$$v_M = v_A - \omega \cdot AM$$

由上式可知,随着点 M 在垂线 AN 上的位置不同,$\boldsymbol{v}_M$ 的大小也不同,因此总可以找到一点 C,这点的瞬时速度等于零。如令

$$AC = \frac{v_A}{\omega}$$

则

$$v_C = v_A - AC \cdot \omega = 0$$

于是定理得到证明。在某一瞬时,平面图形内速度等于零的点称为瞬时速度中心,或简称为**速度瞬心**。

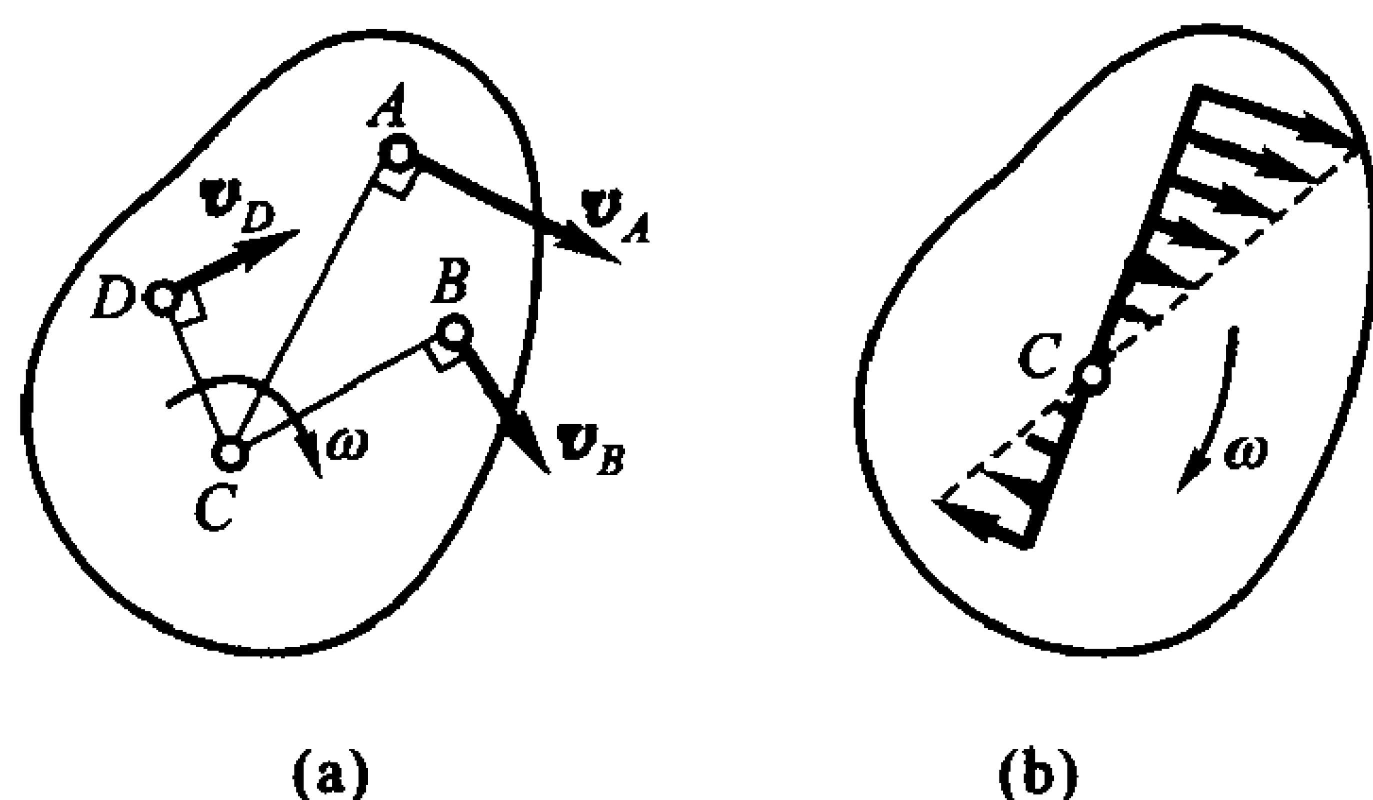
2. 平面图形内各点的速度及其分布

根据上述定理,每一瞬时在图形内都存在速度等于零的一点 C,即 $v_C = 0$。选取点 C 作为基点,图 9 - 17a 中 A,B,D 等各点的速度为

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{AC} = \boldsymbol{v}_{AC}$$
$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{BC} = \boldsymbol{v}_{BC}$$
$$\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{DC} = \boldsymbol{v}_{DC}$$

由此得结论:平面图形内任一点的速度等于该点随图形绕瞬时速度中心转动的速度。

由于平面图形绕任意点转动的角速度都相等(参看 § 9 - 1),因此图形绕速度瞬心 C 转动的角速度等于图形绕任一基点转动的角速度,以 ω 表示这个角速度,于是有



(a) (b)

图 9-17

$$v_A = v_{AC} = \omega \cdot AC \quad v_B = v_{BC} = \omega \cdot BC \quad v_D = v_{DC} = \omega \cdot DC$$

由此可见，图形内各点速度的大小与该点到速度瞬心的距离成正比。速度的方向垂直于该点到速度瞬心的连线，指向图形转动的一方，如图 9-17a 所示。这样求出的速度的分布情况，可使我们得到一个简单而清晰的概念。

平面图形上各点速度在某瞬时的分布情况，与图形绕定轴转动时各点速度的分布情况相类似(图 9-17b)。于是，平面图形的运动可看成为绕速度瞬心的瞬时转动。

应该强调指出，刚体作平面运动时，一般情况下在每一瞬时，图形内必有一点成为速度瞬心；但是，在不同的瞬时，速度瞬心在图形内的位置是不同的。

综上所述可知，如果已知平面图形在某一瞬时的速度瞬心位置和角速度，则在该瞬时，图形内任一点的速度可以完全确定。在解题时，根据机构的几何条件，确定速度瞬心位置的方法有下列几种：

(1) 平面图形沿一固定表面作无滑动的滚动，如图 9-18 所示。图形与固定面的接触点 C 就是图形的速度瞬心，因为在这一瞬时，点 C 相对于固定面的速度为零，所以它的绝对速度等于零。车轮滚动的过程中，轮缘上的各点相继与地面接触而成为车轮在不同时刻的速度瞬心。

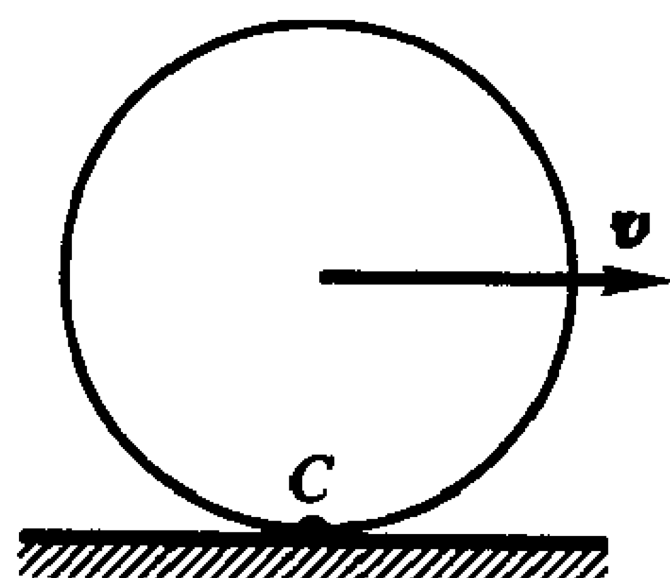


图 9-18

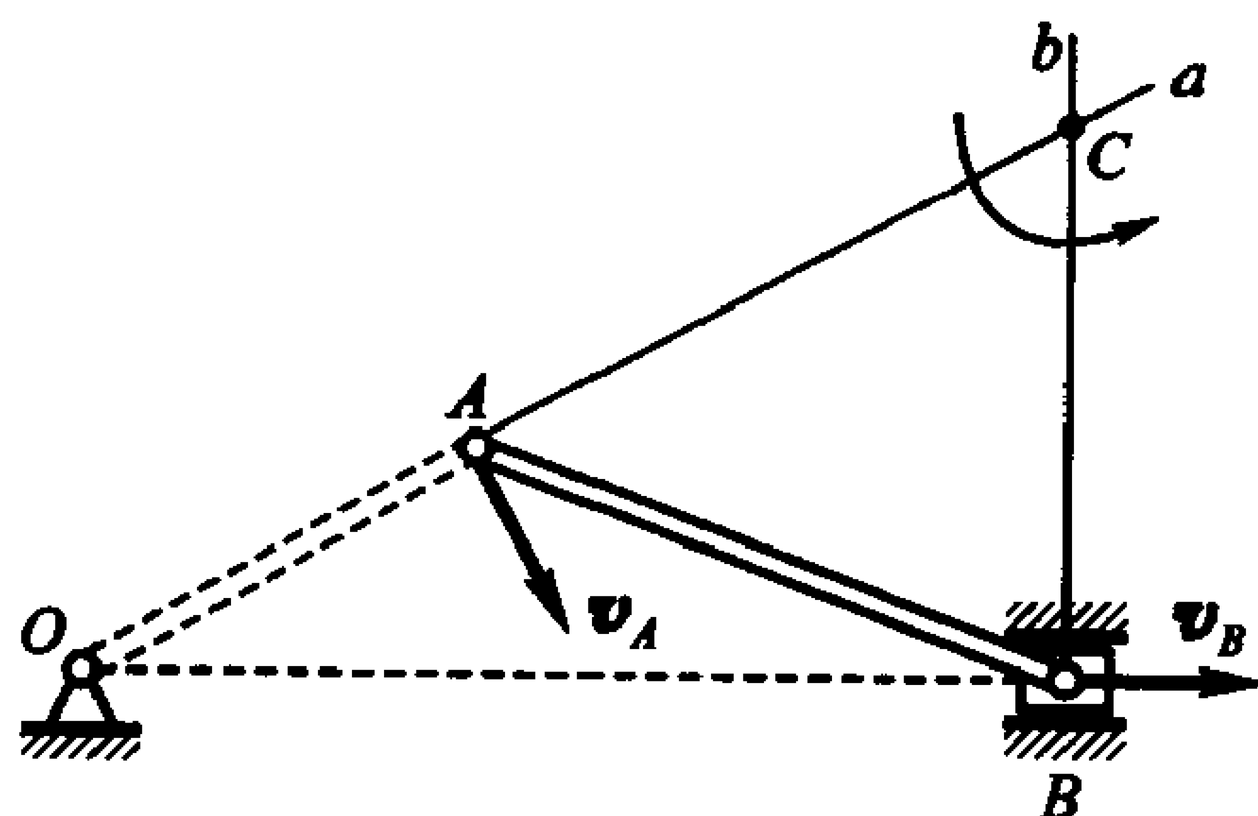


图 9-19

(2) 已知图形内任意两点 A 和 B 的速度的方向，如图 9-19 所示，速度瞬

心 C 的位置必在每一点速度的垂线上。因此在图 9-19 中，通过点 A，作垂直于 $\boldsymbol{v}_A$ 方向的直线 Aa；再通过点 B，作垂直于 $\boldsymbol{v}_B$ 方向的直线 Bb，设两条直线交于点 C，则点 C 就是平面图形的速度瞬心。

（3）已知图形上两点 A 和 B 的速度相互平行，并且速度的方向垂直于两点的连线 AB，如图 9-20 所示，则速度瞬心必定在连线 AB 与速度矢 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 端点连线的交点 C 上（参看图 9-17b）。因此，欲确定图 9-20 所示齿轮的速度瞬心 C 的位置，不仅需要知道 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 的方向，而且还需要知道它们的大小。

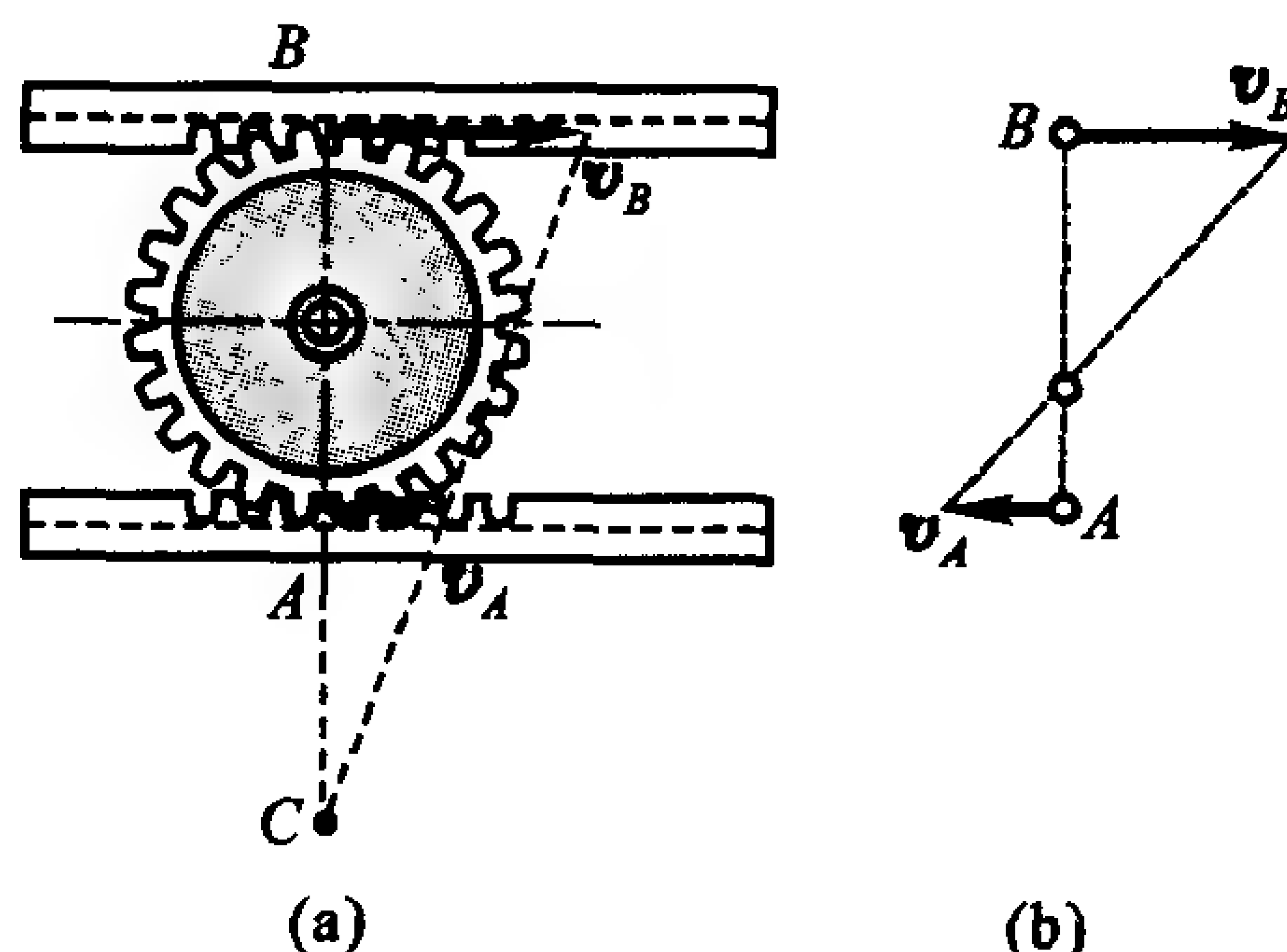


图 9-20

当 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 同向时，图形的速度瞬心在 AB 的延长线上（图 9-20a）；当 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 反向时，图形的速度瞬心 C 在 A,B 两点之间（图 9-20b）。

（4）某一瞬时，图形上 A,B 两点的速度相等，即 $\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{v}_B$ 时，如图 9-21 所示，图形的速度瞬心在无限远处。在该瞬时，图形上各点的速度分布如同图形作平移的情形一样，故称**瞬时平移**。必须注意，此瞬时各点的速度虽然相同，但加速度不同。

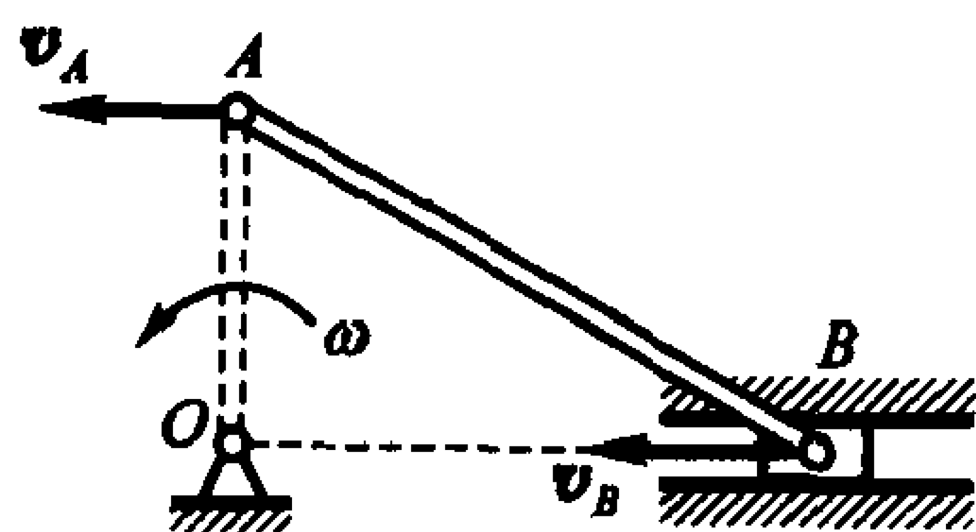


图 9-21

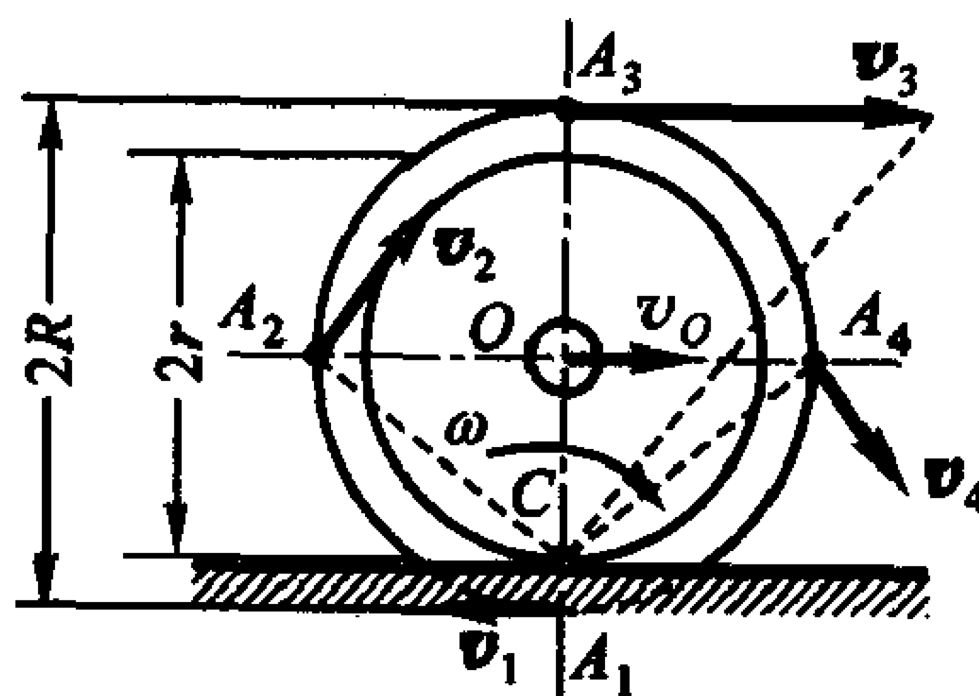


图 9-22

例 9-6　车厢的轮子沿直线轨道滚动而无滑动，如图 9-22 所示。已知车轮中心 O 的速度为 v_O。如半径 R 和 r 都是已知的，求轮上 A_1,A_2,A_3,A_4 各点的速度，其中 A_2,O,A_4 三点在同一水平线上，A_1,O,A_3 三点在同一铅直线上。

解： 因为车轮只滚动无滑动，故车轮与轨道的接触点 C 就是车轮的速度瞬心。令 ω 为车轮绕速度瞬心转动的角速度，因 $v_O = r\omega$，从而求得车轮的角速度的转向如图，大小为

$$\omega = \frac{v_O}{r}$$

图 9－22 中各点的速度分别计算如下：

$$v_1 = A_1C \cdot \omega = \frac{R-r}{r}v_O, \qquad v_2 = A_2C \cdot \omega = \frac{\sqrt{R^2+r^2}}{r}v_O$$

$$v_3 = A_3C \cdot \omega = \frac{R+r}{r}v_O, \qquad v_4 = A_4C \cdot \omega = \sqrt{\frac{R^2+r^2}{r}}v_O$$

这些速度的方向分别垂直于 A_1C，A_2C，A_3C 和 A_4C，指向如图示。

例 9－7 用瞬心法解例 9－1。

解： 分别作 A 和 B 两点速度的垂线，两条直线的交点 C 就是图形 AB 的速度瞬心，如图 9－23 所示。于是图形的角速度为

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_A}{l\sin\varphi}$$

点 B 的速度为

$$v_B = BC \cdot \omega = \frac{BC}{AC}v_A = v_A \cot\varphi$$

以上结果与例 9－1 求得的完全一样。

用瞬心法也可以求图形内任一点的速度。例如杆 AB 中点 D 的速度为

$$v_D = DC \cdot \omega = \frac{l}{2} \cdot \frac{v_A}{l\sin\varphi} = \frac{v_A}{2\sin\varphi}$$

它的方向垂直于 DC，且朝向图形转动的一方。

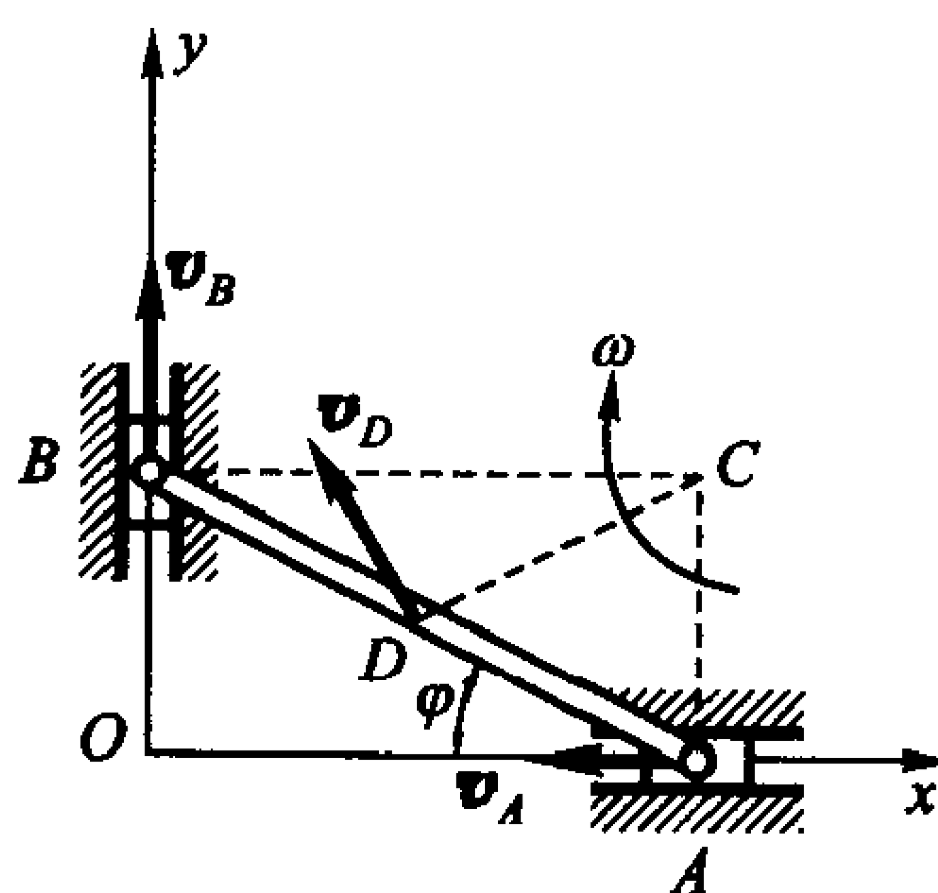


图 9－23

由以上各例可以看出，用瞬心法解题，其步骤与基点法类似。前两步完全相同，只是第三步要根据已知条件，求出图形的速度瞬心的位置和平面图形转动的角速度，最后求出各点的速度。

如果需要研究由几个图形组成的平面机构，则可依次对每一图形按上述步骤进行，直到求出所需的全部未知量为止。应该注意，每一个平面图形有它自己的速度瞬心和角速度，因此，每求出一个瞬心和角速度，应明确标出它是哪一个图形的瞬心和角速度，决不可混淆。

例 9－8 矿石轧碎机的活动夹板 AB 长 600 mm，由曲柄 OE 借连杆组带动，使它绕 A 轴摆动，如图 9－24 所示。曲柄 OE 长 100 mm，角速度为 10 rad/s。连杆组由杆 BG，GD 和 GE 组成，杆 BG 和 GD 各长 500 mm。求当机构在图示位置时，夹板 AB 的角速度。

解： 此机构由五个刚体组成：杆 OE，GD 和 AB 绕固定轴转动，杆 GE 和 BG 作平面运动。

欲求杆 AB 的角速度 ω_{AB}，必须先求出点 B 的速度大小，因为 $\omega_{AB} = \frac{v_B}{AB}$；而欲求 v_B，则应先求点 G 的速度。

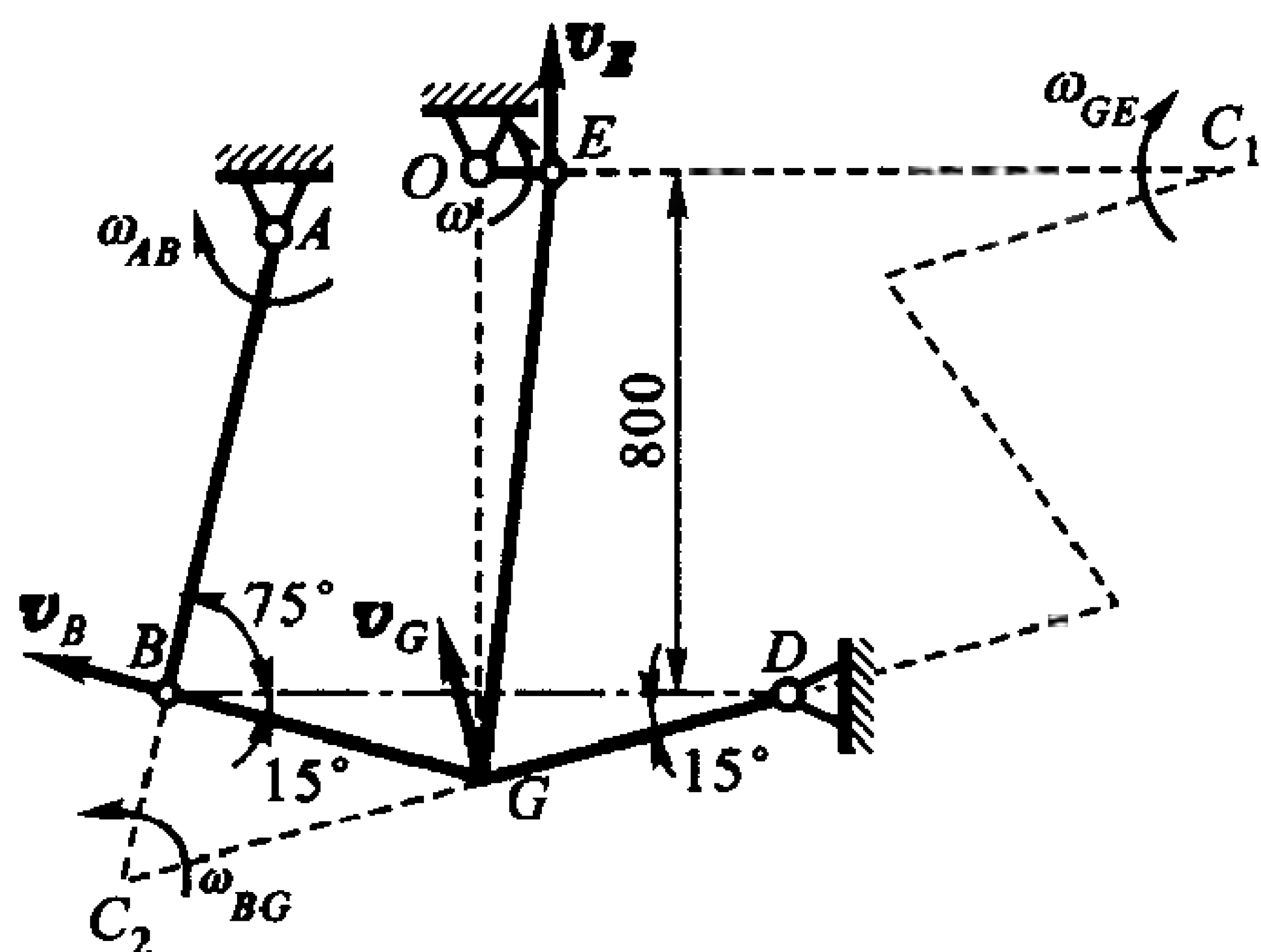


图 9-24

杆 GE 作平面运动，点 E 的速度方向垂直于 OE，点 G 在以 D 为圆心的圆弧上运动，因此速度方向垂直于 GD。作 G,E 两点速度矢量的垂线，得交点 C_1，这就是在图示瞬时杆 GE 的速度瞬心。

由图中几何关系知

$$OG = 800\ \text{mm} + 500\ \text{mm} \sin 15^\circ = 929.4\ \text{mm}$$

$$EC_1 = OC_1 - OE = OG \cdot \cot 15^\circ - OE = 3\ 369\ \text{mm}$$

$$GC_1 = \frac{OG}{\sin 15^\circ} = 3\ 591\ \text{mm}$$

于是，杆 GE 的角速度为

$$\omega_{GE} = \frac{v_E}{EC_1} = \frac{\omega \cdot OE}{EC_1} = 0.296\ 8\ \text{rad/s}$$

点 G 的速度为

$$v_G = \omega_{GE} \cdot GC_1 = 1.066\ \text{m/s}$$

杆 BG 也作平面运动，已知点 G 的速度大小和方向，并知点 B 的速度必垂直于 AB，作两速度矢量的垂线交于点 C_2，这点就是杆 BG 在图示瞬时的速度瞬心。按照上面的计算方法可求得

$$\omega_{BG} = \frac{v_G}{GC_2}$$

$$v_B = \omega_{BG} \cdot BC_2 = v_G \frac{BC_2}{GC_2} = v_G \cos 60^\circ$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{AB} = \frac{v_G \cos 60^\circ}{AB} = 0.888\ \text{rad/s}$$

由此可以看出

(1) 机构的运动都是通过各部件的连接点来传递的；

(2) 在每一瞬时，机构中作平面运动的各刚体有各自的速度瞬心和角速度。

§ 9-4 用基点法求平面图形内各点的加速度

现在讨论平面图形内各点的加速度。

根据§9－1所述，如图9－25所示平面图形S的运动可分解为两部分：(1)随同基点A的平移(牵连运动)；(2)绕基点A的转动(相对运动)。于是，平面图形内任一点B的运动也由两个运动合成，它的加速度可以用加速度合成定理求出。因为牵连运动为平移，点B的绝对加速度等于牵连加速度与相对加速度的矢量和。

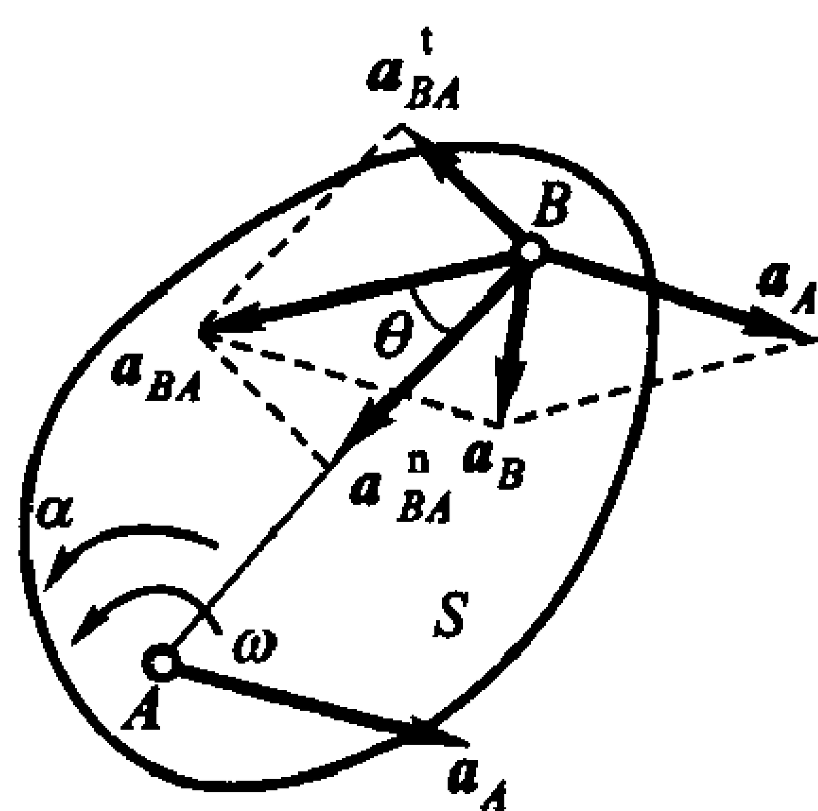


图9－25

由于牵连运动为平移，点B的牵连加速度等于基点A的加速度$\boldsymbol{a}_A$；点B的相对加速度$\boldsymbol{a}_{BA}$是该点随图形绕基点A转动的加速度，可分为切向加速度与法向加速度两部分。于是用基点法求点的加速度合成公式为

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^t + \boldsymbol{a}_{BA}^n \tag{9-5}$$

即：平面图形内任一点的加速度等于基点的加速度与该点随图形绕基点转动的切向加速度和法向加速度的矢量和。

式(9－5)中，$\boldsymbol{a}_{BA}^t$为点B绕基点A转动的切向加速度，方向与AB垂直，大小为

$$a_{BA}^t = AB \cdot \alpha$$

α为平面图形的角加速度。$\boldsymbol{a}_{BA}^n$为点B绕基点A转动的法向加速度，指向基点A，大小为

$$a_{BA}^n = AB \cdot \omega^2$$

ω为平面图形的角速度。

式(9－5)为平面内的矢量等式，通常可向两个相交的坐标轴投影，得到两个代数方程，用以求解两个未知量。

例9－9 如图9－26所示，在外啮合行星齿轮机构中，系杆$O_1O=l$，以匀角速度ω_1绕O_1转动。大齿轮Ⅱ固定，行星轮Ⅰ半径为r，在轮Ⅱ上只滚不滑。设A和B是轮缘上的两点，点A在O_1O的延长线上，而点B则在垂直于O_1O的半径上。求点A和B的加速度。

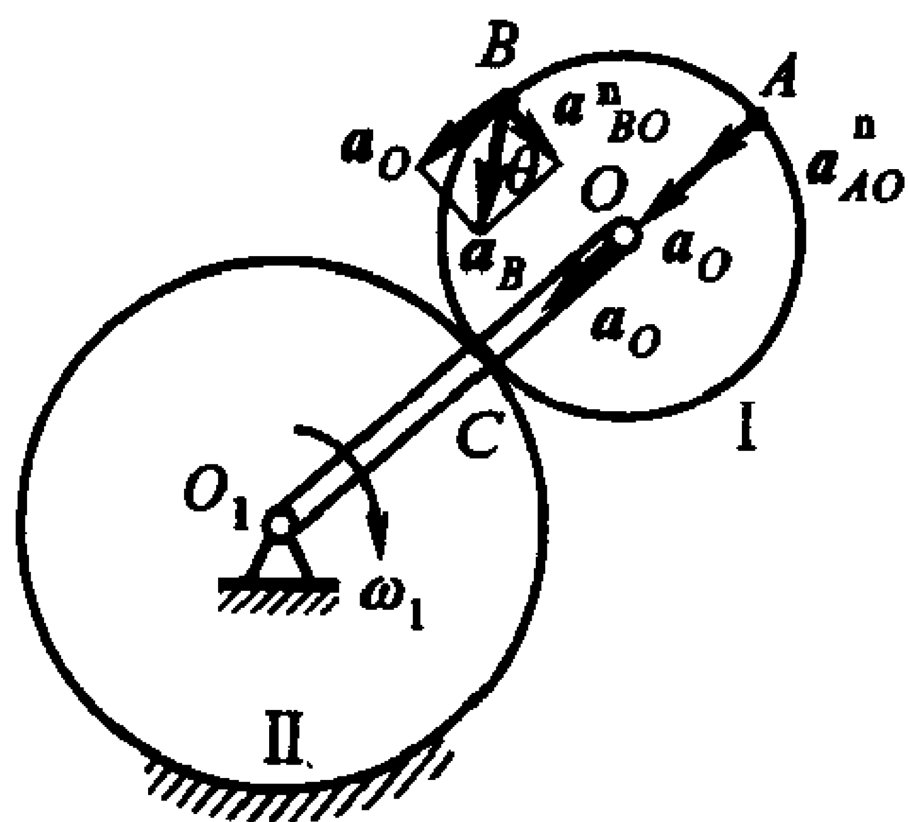


图9－26

解： 轮Ⅰ作平面运动，其中心O的速度和加速度分别为

$$v_O = l\omega_1 \qquad a_O = l\omega_1^2$$

选点O作为基点。由题意知，轮Ⅰ的瞬心在两轮的接触点C处。设轮Ⅰ的角速度为ω，有

$$\omega = \frac{v_O}{r} = \frac{l}{r}\omega_1$$

因为ω_1为不变的恒量，所以ω也是恒量，则轮Ⅰ的角加速度等于零，于是有

$$a_{AO}^{t} = a_{BO}^{t} = 0$$

A,B 两点相对于基点 O 的法向加速度分别沿半径 OA 和 OB,指向中心 O,它们的大小为

$$a_{AO}^{n} = a_{BO}^{n} = r\omega^2 = \frac{l^2}{r}\omega_1^2$$

按照式(9-5)将这些加速度与 $\boldsymbol{a}_O$ 合成,得点 A 的加速度的方向沿 OA,指向中心 O,它的大小为

$$a_A = a_O + a_{AO}^{n} = l\omega_1^2 + \frac{l^2}{r}\omega_1^2 = l\omega_1^2\left(1 + \frac{l}{r}\right)$$

点 B 的加速度大小为

$$a_B = \sqrt{a_O^2 + (a_{BO}^{n})^2} = l\omega_1^2\sqrt{1 + \left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

它与半径 OB 间的夹角为

$$\theta = \arctan\frac{a_O}{a_{BO}^{n}} = \arctan\frac{l\omega_1^2}{\frac{l^2}{r}\omega_1^2} = \arctan\frac{r}{l}$$

例 9-10 如图 9-27 所示,在椭圆规的机构中,曲柄 OD 以匀角速度 ω 绕 O 轴转动,$OD = AD = BD = l$。求当 $\varphi = 60°$时,尺 AB 的角加速度和点 A 的加速度。

解: 先分析机构各部分的运动:曲柄 OD 绕 O 轴转动,尺 AB 作平面运动。

取尺 AB 上的点 D 为基点,其加速度

$$a_D = l\omega^2$$

它的方向沿 OD 指向点 O。

点 A 的加速度为

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}_{AD}^{t} + \boldsymbol{a}_{AD}^{n}$$

其中 $\boldsymbol{a}_D$ 的大小和方向以及 $\boldsymbol{a}_{AD}^{n}$ 的大小和方向都是已知的。因为点 A 作直线运动,可设 $\boldsymbol{a}_A$ 的方向如图所示;$\boldsymbol{a}_{AD}^{t}$ 垂直于 AD,其方向暂设如图。$\boldsymbol{a}_{AD}^{n}$ 沿 AD 指向点 D,它的大小为

$$a_{AD}^{n} = \omega_{AB}^2 \cdot AD$$

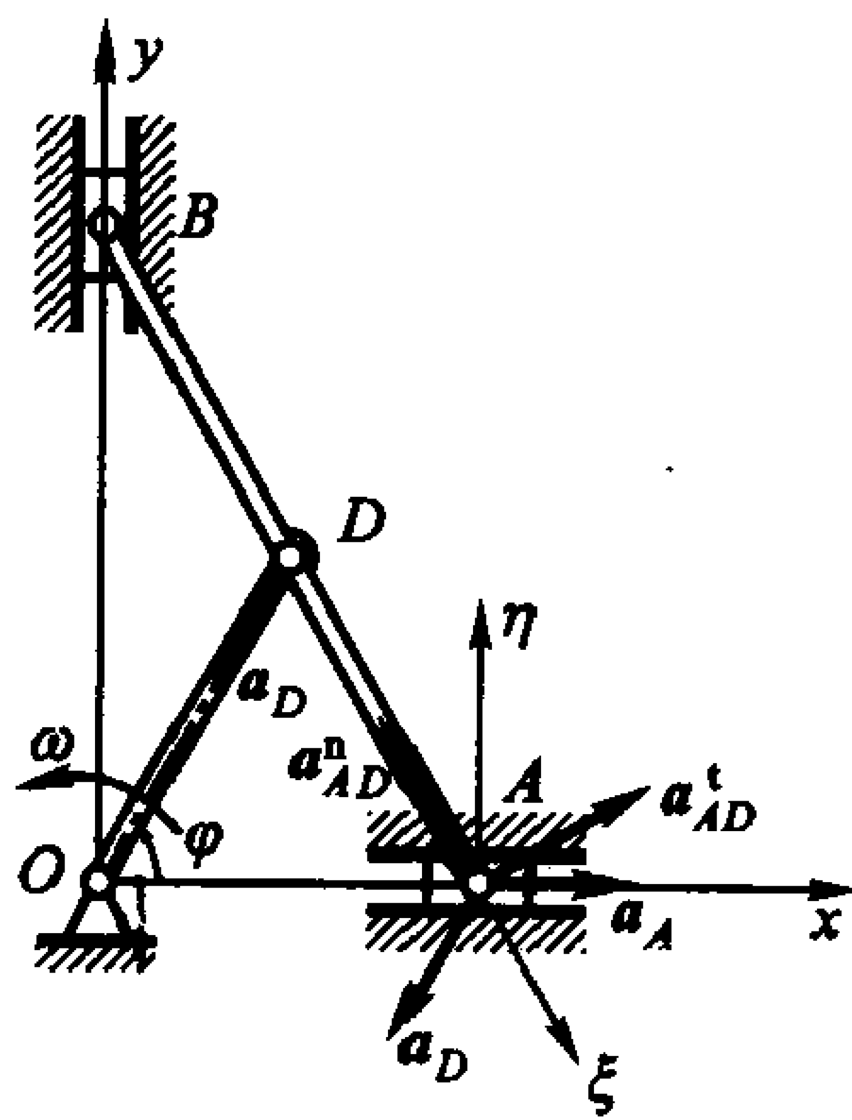


图 9-27

其中 ω_{AB} 为尺 AB 的角速度,可用基点法或瞬心法求得

$$\omega_{AB} = \omega$$

则

$$a_{AD}^{n} = \omega^2 \cdot AD = l\omega^2$$

现在求两个未知量:a_A 和 a_{AD}^{t} 的大小。取 ξ 轴垂直于 $\boldsymbol{a}_{AD}^{t}$,取 η 轴垂直于 $\boldsymbol{a}_A$,η 和 ξ 的正方向如图所示。将 $\boldsymbol{a}_A$ 的矢量合成式分别在 ξ 和 η 轴上投影,得

$$a_A\cos\varphi = a_D\cos(\pi - 2\varphi) - a_{AD}^{n}$$

$$0 = -a_D\sin\varphi + a_{AD}^{t}\cos\varphi + a_{AD}^{n}\sin\varphi$$

解得

$$a_A = \frac{a_D \cos(\pi - 2\varphi) - a_{AD}^{n}}{\cos \varphi} = \frac{\omega^2 l \cos 60^\circ - \omega^2 l}{\cos 60^\circ} = -l\omega^2$$

$$a_{AD}^{t} = \frac{a_D \sin \varphi - a_{AD}^{n} \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{(\omega^2 l - \omega^2 l)\sin \varphi}{\cos \varphi} = 0$$

于是有

$$\alpha_{AB} = \frac{a_{AD}^{t}}{AD} = 0$$

由于 a_A 为负值,故 $\boldsymbol{a}_A$ 的实际方向与原假设的方向相反。

例 9-11 车轮沿直线滚动。已知车轮半径为 R,中心 O 的速度为$\boldsymbol{v}_O$,加速度为 $\boldsymbol{a}_O$。设车轮与地面接触无相对滑动。求车轮上速度瞬心的加速度。

解: 只滚不滑时,车轮的角速度可按下式计算:

$$\omega = \frac{v_O}{R}$$

车轮的角加速度 α 等于角速度对时间的一阶导数。上式对任何瞬时均成立,故可对时间求导,得

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v_O}{R}\right)$$

因为 R 是常量,于是有

$$\alpha = \frac{1}{R}\,\frac{\mathrm{d}v_O}{\mathrm{d}t}$$

因为轮心 O 作直线运动,所以它的速度 v_O 对时间的一阶导数等于这一点的加速度 a_O。于是

$$\alpha = \frac{a_O}{R}$$

车轮作平面运动。取中心 O 为基点,按照式(9-5)求点 C 的加速度

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{CO}^{t} + \boldsymbol{a}_{CO}^{n}$$

式中

$$a_{CO}^{t} = R\alpha = a_O \qquad a_{CO}^{n} = R\omega^2 = \frac{v_O^2}{R}$$

它们的方向如图 9-28b 所示。

由于 $\boldsymbol{a}_O$ 与 $\boldsymbol{a}_{CO}^{t}$ 的大小相等,方向相反,于是有

$$a_C = a_{CO}^{n}$$

由此可知,速度瞬心 C 的加速度不等于零。当车轮在地面上只滚不滑时,速度瞬心 C 的加速度指向轮心 O,如图 9-28c 所示。

由以上各例可见,用基点法求平面图形上点的加速度的步骤与用基点法求点的速度的步骤相同。但由于在公式

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{t} + \boldsymbol{a}_{BA}^{n}$$

中有八个要素,所以必须已知其中六个,问题才是可解的。

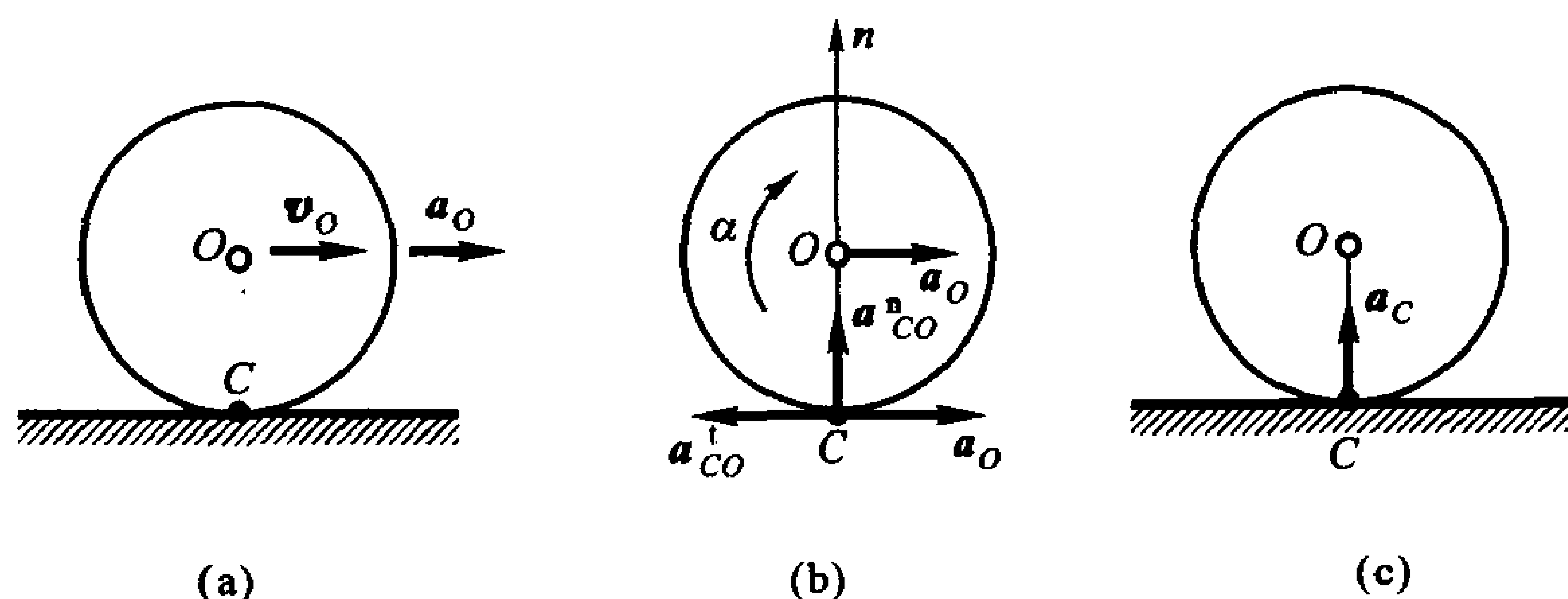


图 9-28

§9-5 运动学综合应用举例

工程中的机构都是由数个物体组成的,各物体间通过联接点而传递运动。为分析机构的运动,首先要分清各物体都作什么运动,要计算有关联接点的速度和加速度。

为分析某点的运动,如能找出其位置与时间的函数关系,则可直接建立运动方程,用解析方法求其运动全过程的速度和加速度。当难以建立点的运动方程或只对机构某些瞬时位置的运动参数感兴趣时,可根据刚体各种不同运动的形式,确定此刚体的运动与其上一点运动的关系,并常用合成运动或平面运动的理论来分析相关的两个点在某瞬时的速度和加速度的联系。

平面运动理论用来分析同一平面运动刚体上两个不同点间的速度和加速度联系。当两个刚体相接触而有相对滑动时,则需用合成运动的理论分析这两个不同刚体上相重合一点的速度和加速度联系。两物体间有相互运动,虽不接触,其重合点的运动也符合合成运动的关系。

复杂的机构中,可能同时有平面运动和点的合成运动问题,应注意分别分析、综合应用有关理论。有时同一问题可用不同的方法分析,则应经过分析、比较后,选用较简便的方法求解。

下面通过几个例题说明这些方法的综合应用。

例 9-12 图 9-29 所示平面机构,滑块 B 可沿杆 OA 滑动。杆 BE 与 BD 分别与滑块 B 铰接,BD 杆可沿水平导轨运动。滑块 E 以匀速 $\boldsymbol{v}$ 沿铅直导轨向上运动,杆 BE 长为 $\sqrt{2}l$。图示瞬时杆 OA 铅直,且与杆 BE 夹角为 45°。求该瞬时杆 OA 的角速度与角加速度。

解: BE 杆作平面运动,可先求出点 B 的速度和加速度。点 B 连同滑块在 OA 杆上滑动,并带动杆 OA 转动,可按合成运动方法求解杆 OA 的角速度和角加速度。

BE 杆作平面运动,在图 9-29 中,由 $\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{v}_B$ 方向可知此瞬时点 O 为 BE 的速度瞬心,因此

$$\omega_{BE}=\frac{v}{OE}=\frac{v}{l}\qquad v_B=\omega_{BE}\cdot OB=v$$

以 E 为基点，点 B 的加速度为

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_E+\boldsymbol{a}_{BE}^{t}+\boldsymbol{a}_{BE}^{n}\tag{a}$$

式中各矢量方向如图 9－29 所示。由于点 E 作匀速直线运动，故 $a_E=0$。$\boldsymbol{a}_{BE}^{n}$ 的大小为

$$a_{BE}^{n}=\omega_{BE}^{2}\cdot BE=\frac{\sqrt{2}v^2}{l}$$

将式(a)投影到沿 BE 方向的轴上，得

$$a_B\cos 45^\circ=a_{BE}^{n}$$

因此

$$a_B=\frac{a_{BE}^{n}}{\cos 45^\circ}=\frac{2v^2}{l}$$

上面用刚体平面运动方法求得了滑块 B 的速度和加速度。由于滑块 B 可以沿杆 OA 滑动，因此应利用点的合成运动方法求杆 OA 的角速度及角加速度。

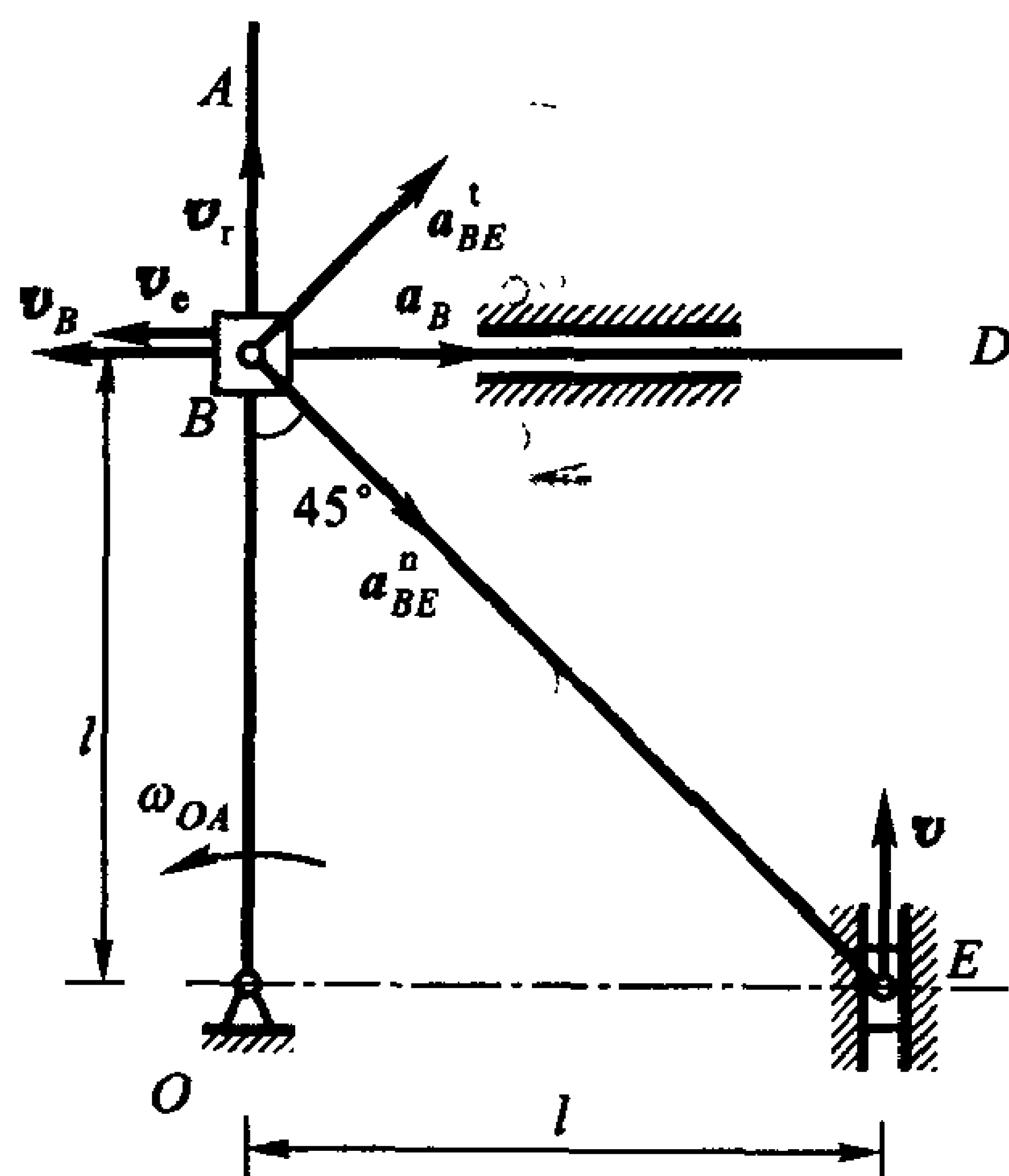


图 9－29

取滑块 B 为动点，动系固结在杆 OA 上，点的速度合成定理为

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

式中 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_B$；牵连速度 $\boldsymbol{v}_e$ 是 OA 杆上与滑块 B 重合那一点的速度，其方向垂直于 OA，因此与 $\boldsymbol{v}_a$ 同向；相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 沿 OA 杆，即垂直于 $\boldsymbol{v}_a$。显然有

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e,\quad v_r=0$$

即

$$v_e=v_B=v$$

于是得杆 OA 的角速度

$$\omega_{OA}=\frac{v_e}{OB}=\frac{v}{l}$$

其转向如图 9－29 所示。

滑块 B 的绝对加速度 $\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_B$，其牵连加速度有法向及切向两项，其法向部分

$$a_e^n=\omega_{OA}^2\cdot OB=\frac{v^2}{l}$$

由于滑块 B 的相对运动是沿 OA 杆的直线运动，因此其相对加速度 $\boldsymbol{a}_r$ 也沿 OA 方向。这样，有

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e^t+\boldsymbol{a}_e^n+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C\tag{b}$$

因为此瞬时 $v_r=0$，故 $a_C=0$。在此矢量式中，各矢量方向已知，如图9－30所示；未知量为 $\boldsymbol{a}_r$ 及 $\boldsymbol{a}_e^t$ 的大小，共两个。将式(b)投影到与 $\boldsymbol{a}_r$ 垂直的 BD 线上，得

$$a_a=a_e^t$$

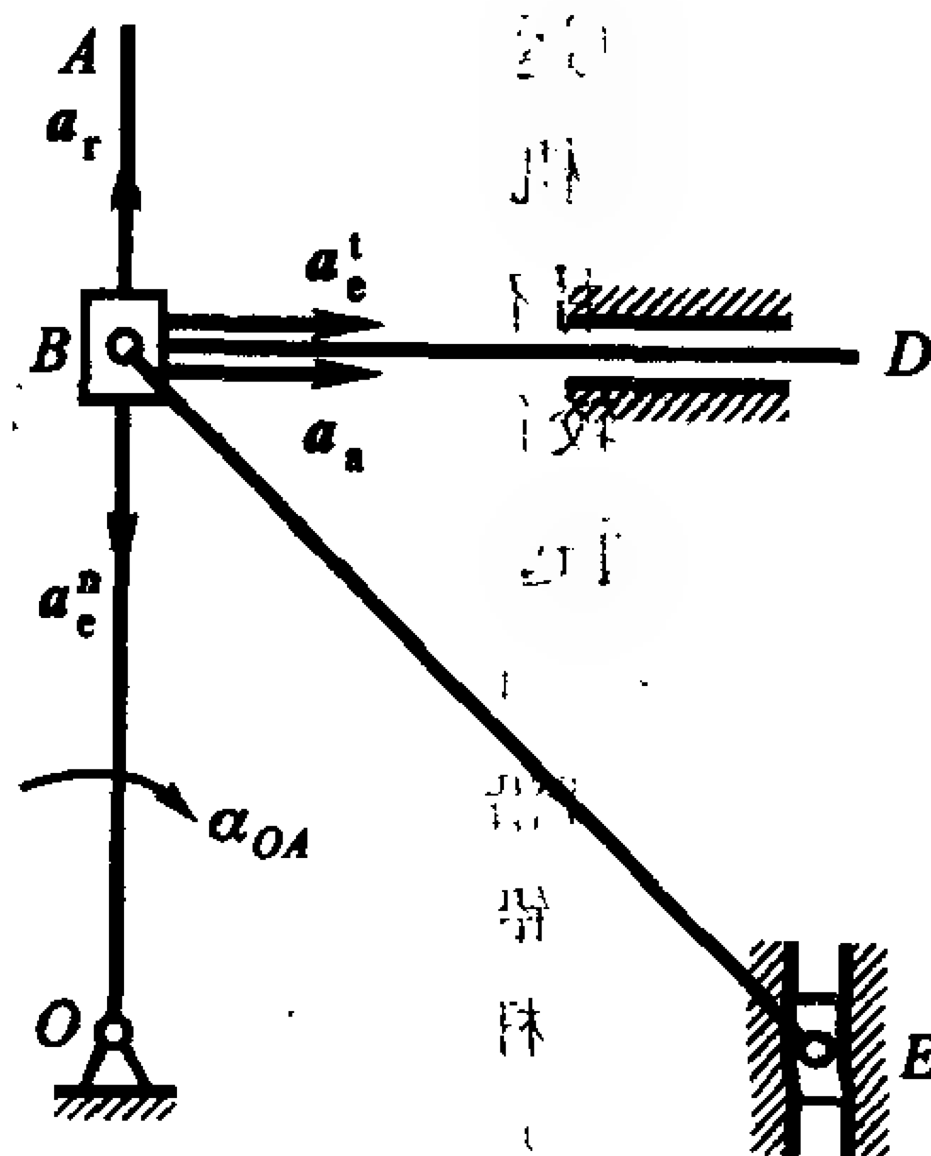


图 9－30

因此

$$a_e^t = a_B = \frac{2v^2}{l}$$

杆 OA 的角加速度为

$$\alpha_{OA} = \frac{a_e^t}{OB} = \frac{2v^2}{l^2}$$

角加速度方向如图 9-30 所示。

上面的求解方法是依次应用刚体平面运动及点的合成运动方法求解，这是机构运动分析中较常用的方法之一。

例 9-13　在图 9-31a 所示平面机构中，杆 AC 在导轨中以匀速 $\boldsymbol{v}$ 平移，通过铰链 A 带动杆 AB 沿导套 O 运动，导套 O 与杆 AC 距离为 l。图示瞬时杆 AB 与杆 AC 夹角为 $\varphi=60°$，求此瞬时杆 AB 的角速度及角加速度。

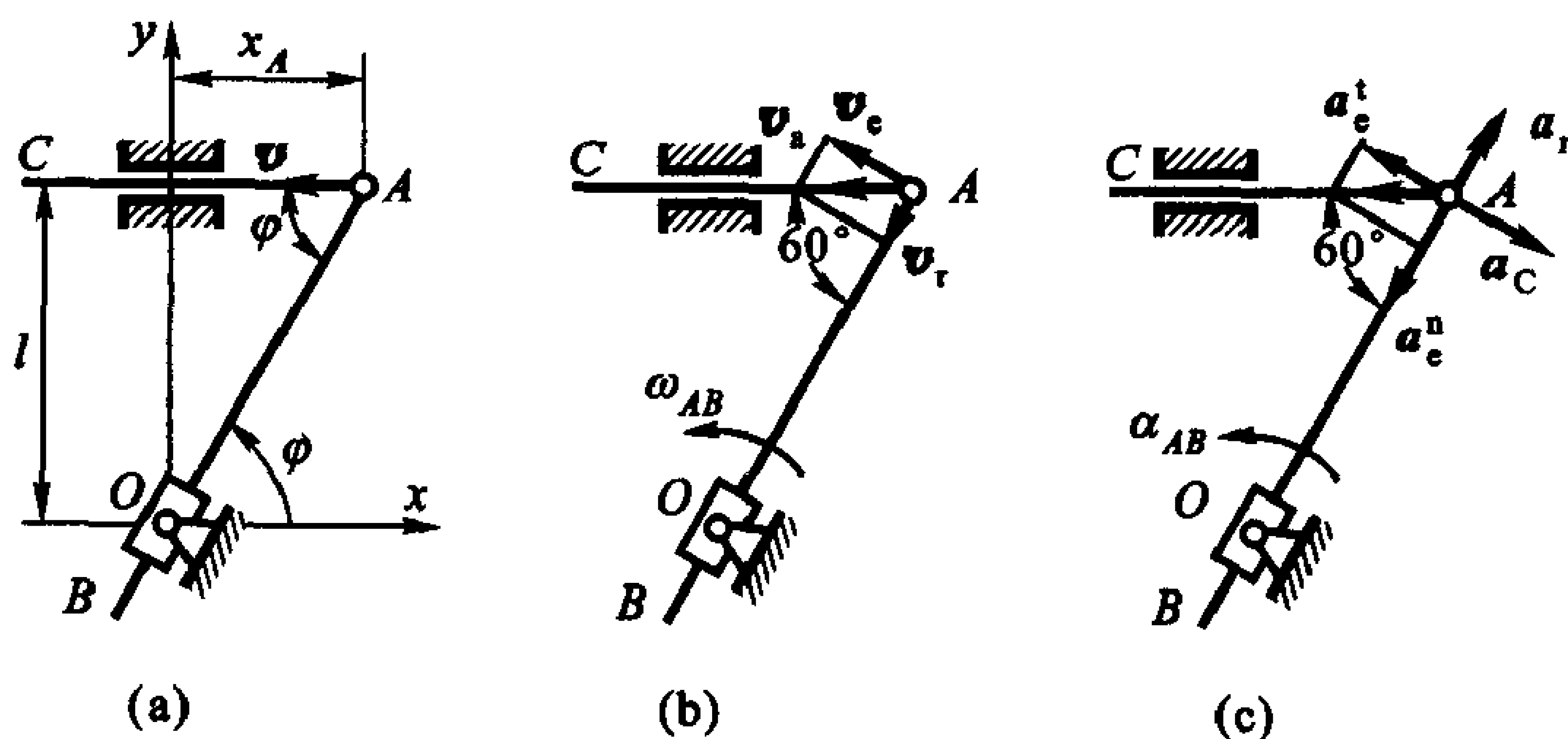


图 9-31

解：　本题可以用几种方法求解。

方法 1：

以 A 为动点，动系固结在导套 O 上，牵连运动为绕 O 的转动。点 A 的绝对运动为以匀速 $\boldsymbol{v}$ 沿 AC 方向的运动，相对运动是点 A 沿导套 O 的运动，各速度矢如图 9-31b 所示。由

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}$$

可得

$$v_e = v_a \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}v \qquad v_r = v_a \cos 60° = \frac{v}{2}$$

由于杆 AB 在导套 O 中滑动，因此杆 AB 与导套 O 具有相同的角速度及角加速度。其角速度

$$\omega_{AB} = \frac{v_e}{AO} = \frac{3v}{4l}$$

由于点 A 为匀速直线运动，故绝对加速度为零。点 A 的相对运动为沿导套 O 的直线运动，因此 $\boldsymbol{a}_r$ 沿杆 AB 方向，故有

$$0 = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C \tag{a}$$

式中 $\boldsymbol{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{v}_r$，其方向如图 9-31c 所示，大小为

$$a_C = 2\omega_e v_r = \frac{3v^2}{4l}$$

$\boldsymbol{a}_e^t$，$\boldsymbol{a}_e^n$ 及 $\boldsymbol{a}_r$ 的方向如图 9－31c 所示。将矢量方程式(a)投影到 $\boldsymbol{a}_e^t$ 方向，得

$$a_e^t = a_C = \frac{3v^2}{4l}$$

杆 AB 的角加速度方向如图，大小为

$$\alpha_{AB} = \frac{a_e^t}{AO} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{8l^2}$$

方法 2：

以点 O 为坐标原点，建立如图 9－31a 所示的直角坐标系。由图可知

$$x_A = l\cot\varphi$$

将其两端对时间求导，并注意到 $\dot{x}_A = -v$，得

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{l}\sin^2\varphi \tag{b}$$

将其再对时间求导，得

$$\ddot{\varphi} = \frac{v\dot{\varphi}}{l}\sin 2\varphi = \frac{v^2}{l^2}\sin^2\varphi\sin 2\varphi \tag{c}$$

式(b)及(c)为杆 AB 的角速度 $\dot{\varphi}$ 及角加速度 $\ddot{\varphi}$ 与角 φ 之间的关系式。当 $\varphi = 60°$ 时，得

$$\omega_{AB} = \dot{\varphi} = \frac{3v}{4l},\quad \alpha_{AB} = \ddot{\varphi} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{8l^2}$$

两种解法结果相同。

此题中，杆 AB 作平面运动，AB 上与 O 相重合一点的速度应沿杆 AB 方向。因此，也可应用瞬心法求解杆 AB 的角速度。然而，再用平面运动基点法求解杆 AB 的角加速度就不如前两种方法方便了。

例 9－14　图 9－32a 所示平面机构，AB 长为 l，滑块 A 可沿摇杆 OC 的长槽滑动。摇杆 OC 以匀角速度 ω 绕轴 O 转动，滑块 B 以匀速 $v = l\omega$ 沿水平导轨滑动。图示瞬时 OC 铅直，AB 与水平线 OB 夹角为 30°。求此瞬时 AB 杆的角速度及角加速度。

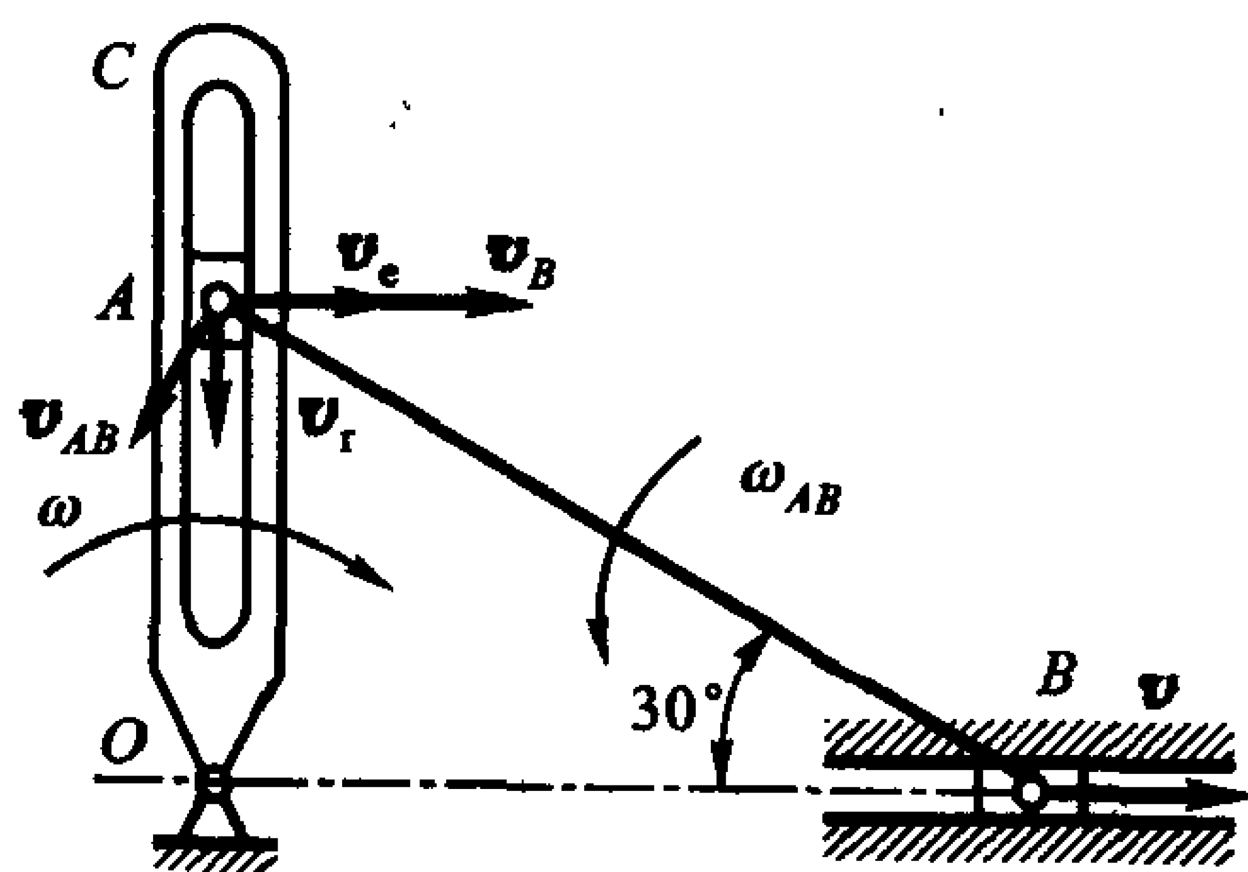


图 9－32

解：　杆 AB 作平面运动，点 A 又在摇杆 OC 内有相对运动，这是一种应用平面运动和合成运动理论联合求解的问题，而且是一种含两个运动输入量 ω 和 $\boldsymbol{v}$ 的较复杂的机构运动问题。

杆 AB 作平面运动，以 B 为基点，有

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{AB} \tag{a}$$

点 A 在杆 OC 内滑动，因此需用点的合成运动方法。取点 A 为动点，动系固结在 OC 上，有

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r \tag{b}$$

其中绝对速度 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_A$，而牵连速度 $v_e = OA\cdot\omega = \frac{l\omega}{2}$，相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 大小未知，各速度矢方向如图 9－32 所示。

由式(a)和式(b),得

$$\boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{AB} = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r \tag{c}$$

其中$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}$ 为已知,$\boldsymbol{v}_e$ 已求得,且$\boldsymbol{v}_{AB}$ 和$\boldsymbol{v}_r$ 方向已知,仅有$\boldsymbol{v}_{AB}$ 及$\boldsymbol{v}_r$ 两个量的大小未知,故可解。将此矢量方程沿$\boldsymbol{v}_B$ 方向投影,得

$$v_B - v_{AB}\sin 30° = v_e$$

故

$$v_{AB} = 2(v_B - v_e) = l\omega$$

AB 杆的角速度方向如图,大小为

$$\omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{AB} = \omega$$

将式(c)沿$\boldsymbol{v}_r$ 方向投影,得

$$v_{AB}\cos 30° = v_r$$

故

$$v_r = \frac{\sqrt{3}}{2} l\omega$$

以 B 为基点,则点 A 的加速度为

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}_{AB}^t + \boldsymbol{a}_{AB}^n \tag{d}$$

由于$\boldsymbol{v}_B$ 为常量,所以 $a_B = 0$,而

$$a_{AB}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = l\omega^2$$

仍以点 A 为动点,动系固结于 OC 上,则有

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C \tag{e}$$

式中

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_A$$

$$a_e^t = 0, \quad a_e^n = \omega^2 \cdot OA = \frac{l\omega^2}{2}, \quad a_C = 2\omega v_r = \sqrt{3} l\omega^2$$

由(d)、(e)两式,得

$$\boldsymbol{a}_{AB}^t + \boldsymbol{a}_{AB}^n = \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C \tag{f}$$

其中各矢量方向已知,如图 9-33 所示,仅有二未知量 $\boldsymbol{a}_r$ 及 $\boldsymbol{a}_{AB}^t$ 的大小待求。取投影轴垂直于 $\boldsymbol{a}_r$,沿 $\boldsymbol{a}_C$ 方向,将矢量方程式(f)在此轴上投影,得

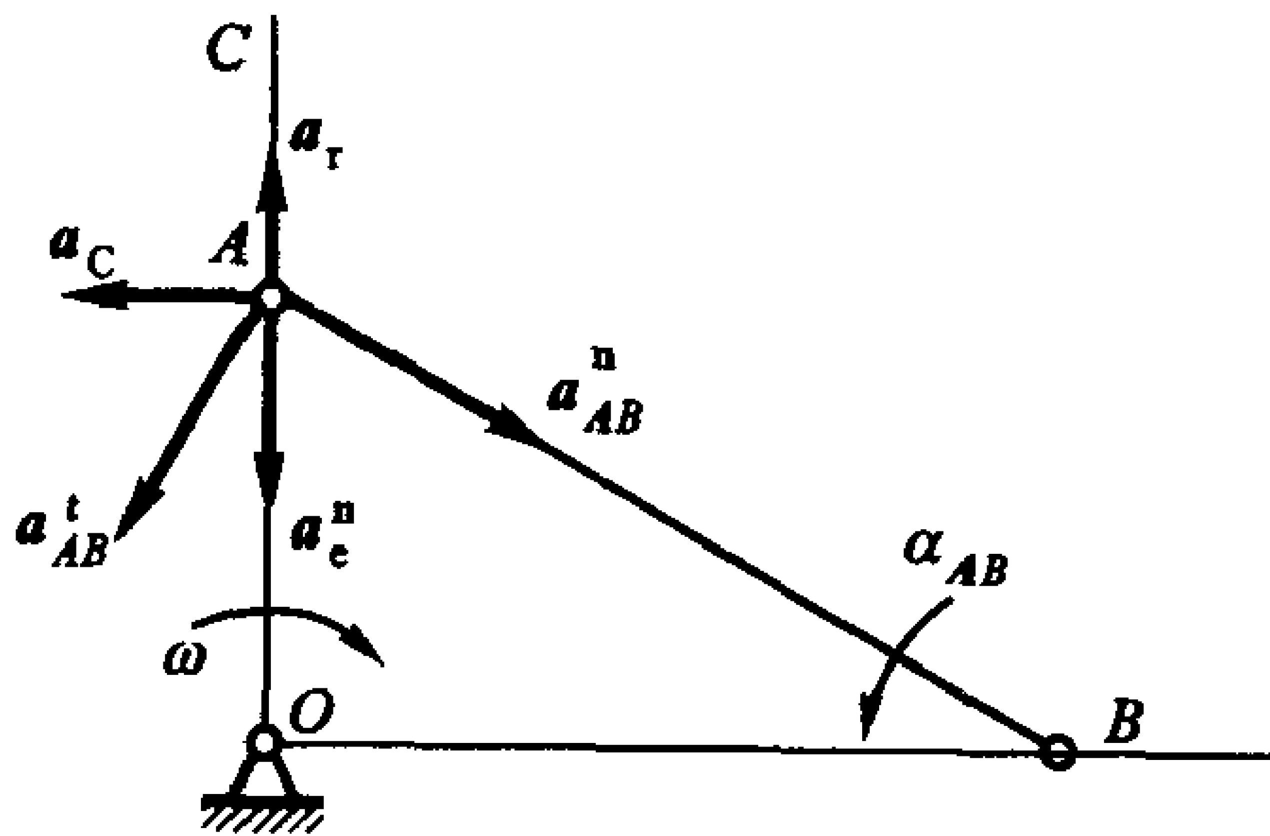


图 9-33

$$a_{AB}^{t}\sin 30^{\circ}-a_{AB}^{n}\cos 30^{\circ}=a_{C}$$

因此

$$a_{AB}^{t}=3\sqrt{3}l\omega^{2}$$

由此得 AB 杆的角加速度为

$$\alpha_{AB}=\frac{a_{AB}^{t}}{AB}=3\sqrt{3}\omega^{2}$$

方向如图 9-33 所示。

例 9-15　在图 9-34 所示平面机构中，杆 AC 铅直运动，杆 BD 水平运动，A 为铰链，滑块 B 可沿槽杆 AE 中的直槽滑动。图示瞬时 $AB=60$ mm，$\theta=30^{\circ}$，$v_A=10\sqrt{3}$ mm/s，$a_A=10\sqrt{3}$ mm/s^2，$v_B=50$ mm/s，$a_B=10$ mm/s^2。求该瞬时槽杆 AE 的角速度、角加速度及滑块 B 相对 AE 的加速度。

解： 以滑块 B 为动点，动系固结在槽杆 AE 上，有

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r \tag{a}$$

式中 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_B$；$\boldsymbol{v}_r$ 方向沿 AE，大小未知；$\boldsymbol{v}_e$ 为槽杆 AE 上与滑块 B 重合的 B' 点的速度，$\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{v}_{B'}$，其大小和方向均未知。可见，式(a)中有三个待求量，无法作出速度平行四边形。

槽杆 AE 作平面运动，以 A 为基点，B' 点的速度为

$$\boldsymbol{v}_{B'}=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{B'A} \tag{b}$$

其中 $\boldsymbol{v}_A$ 已知；$\boldsymbol{v}_{B'A}$ 方向垂直于 AE，大小未知；$\boldsymbol{v}_{B'}$ 大小、方向均未知。显然，仅用式(b)也无法求解。由于 $\boldsymbol{v}_{B'}=\boldsymbol{v}_e$，因此将(a)、(b)两式联立即可求解。将式(b)代入式(a)，得

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{B'A}+\boldsymbol{v}_r \tag{c}$$

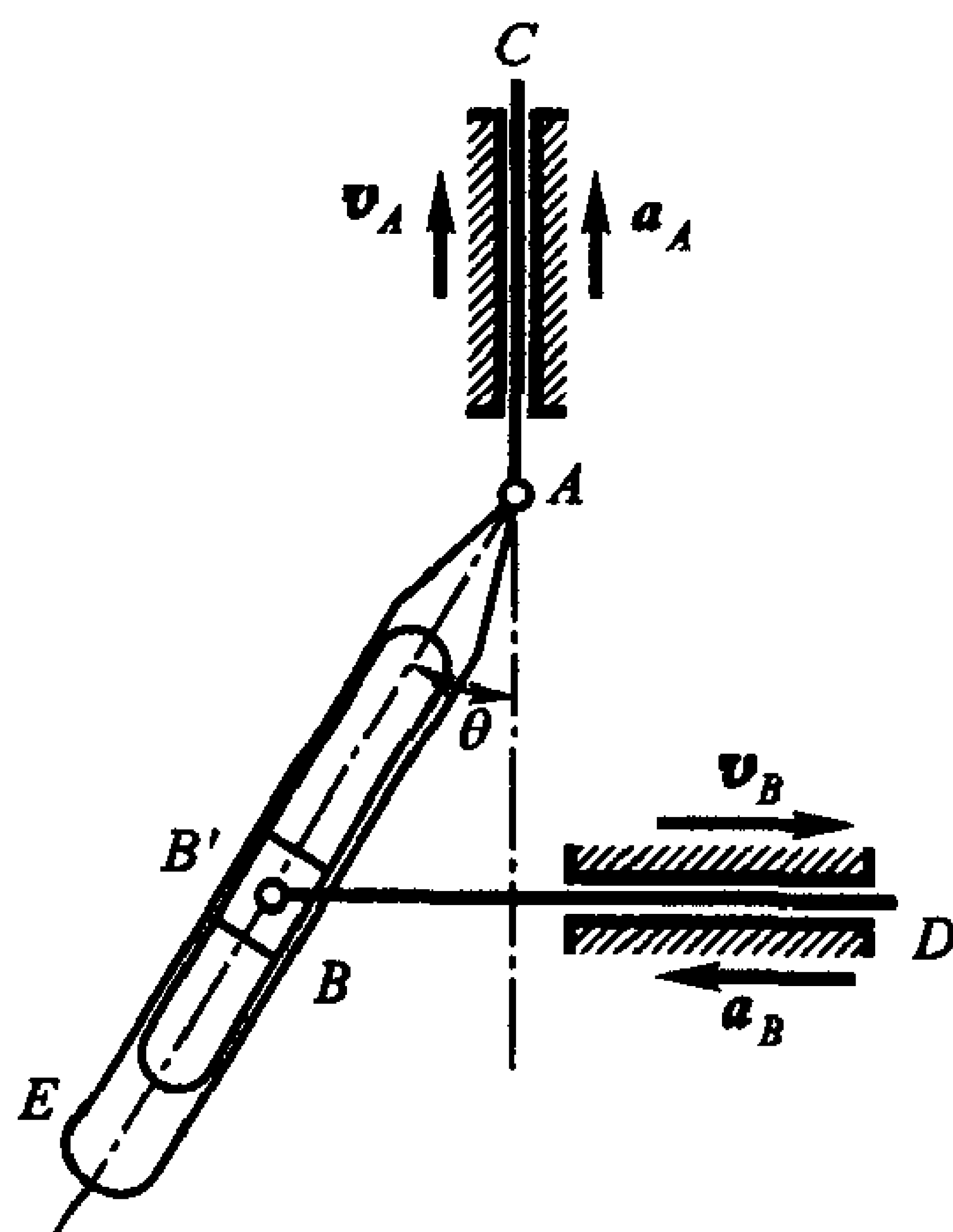


图 9-34

其中只有 $v_{B'A}$ 及 v_r 两个量的大小未知，可解。各速度矢如图 9-35a 所示。将式(c)分别投影到图中 $\boldsymbol{v}_{B'A}$ 及 $\boldsymbol{v}_r$ 方向，得

$$v_B\cos 30^{\circ}=-v_A\cos 60^{\circ}+v_{B'A}$$
$$v_B\sin 30^{\circ}=v_A\sin 60^{\circ}+v_r$$

解得

$$v_{B'A}=30\sqrt{3}\text{ mm/s},\qquad v_r=10\text{ mm/s}$$

从而得槽杆 AE 的角速度

$$\omega_{AE}=\frac{v_{B'A}}{AB}=\frac{30\sqrt{3}\text{ mm/s}}{60\text{ mm}}=0.866\text{ rad/s}$$

其方向如图 9-35a 所示。

选用与上面相同的动点、动系，由点的合成运动加速度合成定理，有

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C \tag{d}$$

其中 $\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_B$；$\boldsymbol{a}_e$ 为槽杆 AE 上与滑块 B 重合的 B' 点的加速度，$\boldsymbol{a}_e=\boldsymbol{a}_{B'}$，其大小和方向均未

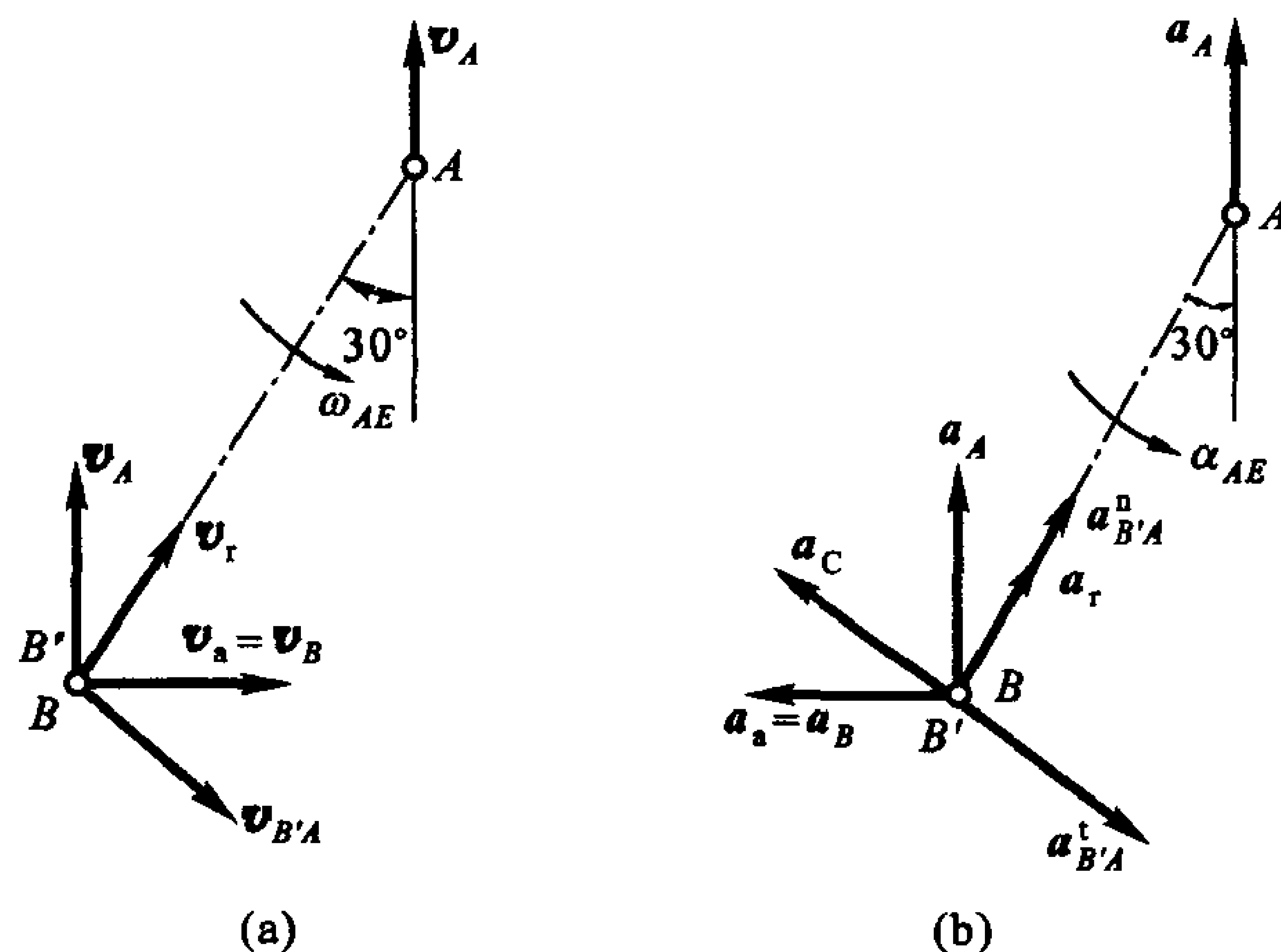


图 9-35

知；a_r 方向沿 AE，大小未知；$a_C=2\omega_e\times v_r$，方向如图 9-35b，大小为

$$a_C=2\omega_{AE}v_r=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\text{rad/s}\times 10\ \text{mm/s}=17.32\ \text{mm/s}^2$$

可见式(d)有三个待求量，不能求解。

槽杆 AE 作平面运动，以 A 为基点，有

$$a_{B'}=a_A+a^t_{B'A}+a^n_{B'A} \tag{e}$$

式中
$$a^n_{B'A}=\omega^2_{AE}\cdot AB=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\text{rad/s}\right)^2\times 60\ \text{mm}=45\ \text{mm/s}^2$$

由于 $a_{B'}=a_e$，将式(e)代入式(d)得

$$a_B=a_A+a^t_{B'A}+a^n_{B'A}+a_r+a_C \tag{f}$$

各加速度矢量如图 9-35b 所示。式(f)中只有 $a^t_{B'A}$ 及 a_r 两个加速度的大小未知，可求。将式(f)分别投影到 $a^t_{B'A}$ 及 a_r 两个方向上，得

$$-a_B\cos 30^\circ=-a_A\sin 30^\circ+a^t_{B'A}-a_C$$
$$-a_B\sin 30^\circ=a_A\cos 30^\circ+a^n_{B'A}+a_r$$

由此得

$$a^t_{B'A}=17.32\ \text{mm/s}^2,\ a_r=-65\ \text{mm/s}^2$$

槽杆 AE 的角加速度为

$$\alpha_{AE}=\frac{a^t_{B'A}}{AB}=0.288\ 7\ \text{rad/s}^2$$

其方向如图 9-35b 所示。

从上面的例题可以看出：某些问题可以用多种方法求解，某些问题又必须同时采用几种方法联合求解。解题时应该注意，只有已知条件适用于运动全过程时，才能建立点的运动方程，进行微积分运算，用解析法求解。在例 9-13 中杆 AC 以匀速 v 平移是适用于运动全过程的条件，因此可以用点的运动学方法，通过运动方程及微分运算求解。在例 9-15 中，所给

已知条件是图示瞬时的，不是全过程的条件，因此无法用运动方程及微积分方法求解。例9-14所给条件也适用于全过程，因此也可以用点的运动学方法求解，读者可自行求解。

小 结

1. 刚体内任意一点在运动过程中始终与某一固定平面保持不变的距离，这种运动称为刚体的平面运动。平行于固定平面所截出的任何平面图形都可代表此刚体的运动。

2. 基点法

(1) 平面图形的运动可分解为随基点的平移和绕基点的转动。平移为牵连运动，它与基点的选择有关；转动为相对于平移参考系的运动，它与基点的选择无关。

(2) 平面图形上任意两点 A 和 B 的速度、加速度的关系为：

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}, \ (\boldsymbol{v}_B)_{AB} = (\boldsymbol{v}_A)_{AB}$$

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^{\mathrm{t}}_{BA} + \boldsymbol{a}^{\mathrm{n}}_{BA}$$

3. 瞬心法

此方法仅用来求解平面图形上点的速度问题。

(1) 平面图形内某一瞬时绝对速度等于零的点称为该瞬时的瞬时速度中心，简称速度瞬心。

(2) 平面图形的运动可看成为绕速度瞬心作瞬时转动。

(3) 平面图形上任一点 M 的速度大小为

$$v_M = \omega \cdot CM$$

其中 CM 为点 M 到速度瞬心 C 的距离。$\boldsymbol{v}_M$ 垂直于 M 与 C 两点的连线，指向图形转动的方向。

(4) 平面图形绕速度瞬心转动的角速度等于绕任意基点转动的角速度。

思 考 题

9-1 如图9-36所示，平面图形上两点 A,B 的速度方向可能是这样的吗？为什么？

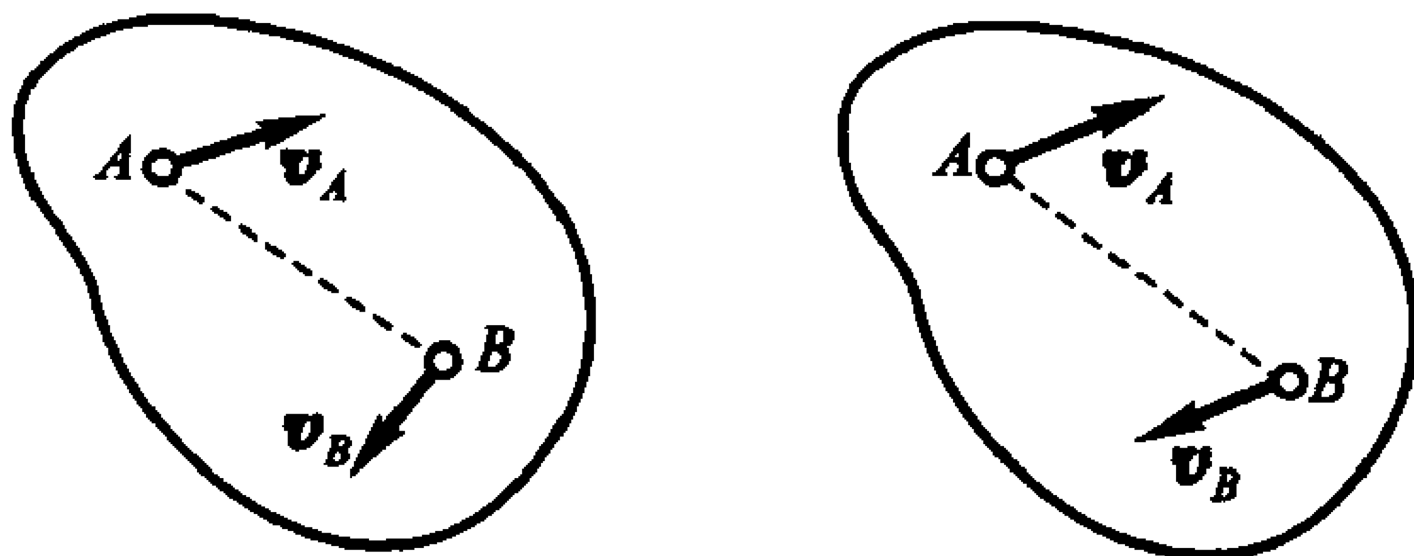


图9-36

9-2　如图 9-37 所示已知 $v_A=\omega_1\cdot O_1A$，方向如图；$\boldsymbol{v}_D$ 垂直于 O_2D。于是可确定速度瞬心 C 的位置，求得：

$$v_D=\frac{v_A}{AC}\cdot CD,\ \omega_2=\frac{v_D}{O_2D}=\frac{v_A}{AC}\cdot\frac{CD}{O_2D}$$

这样做对吗？为什么？

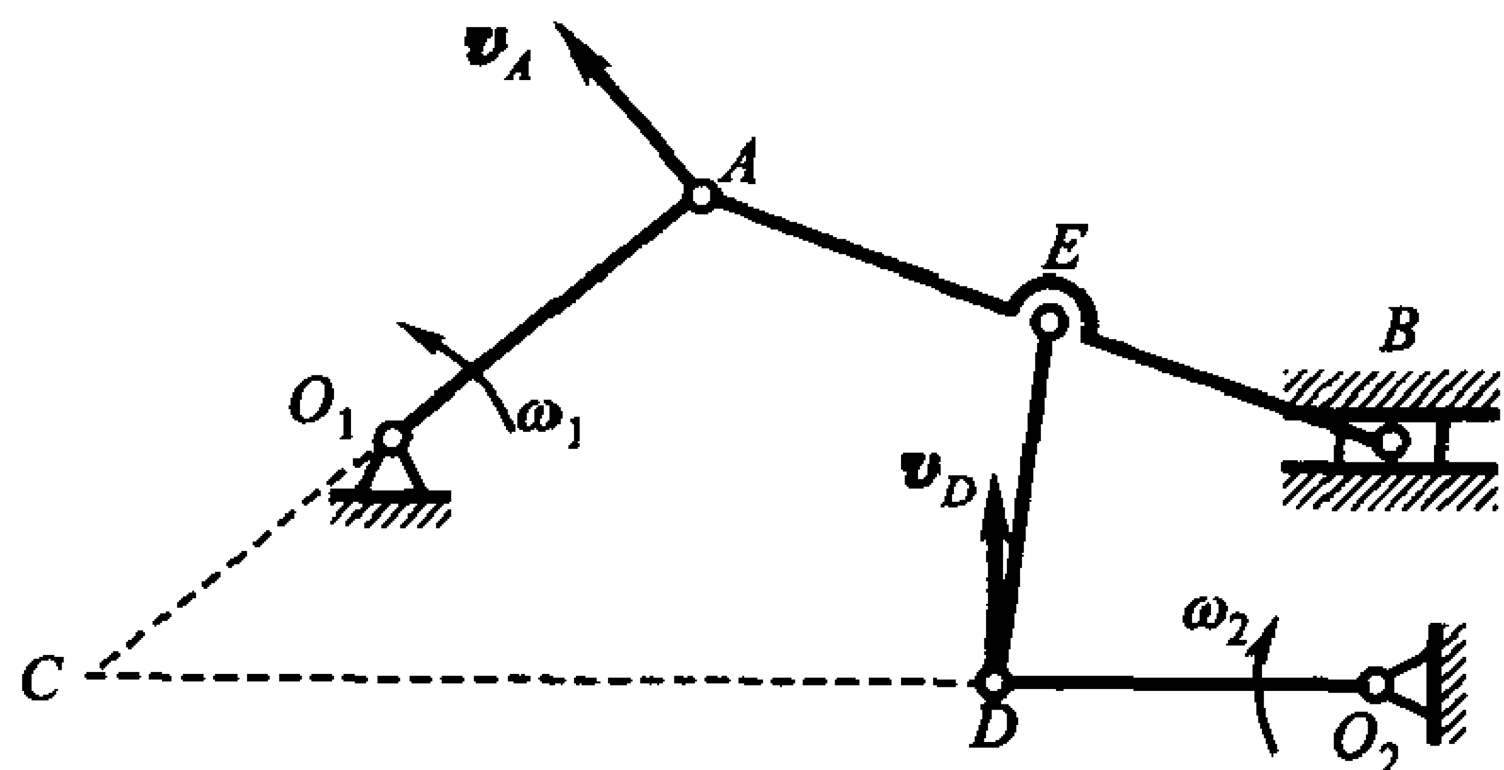


图 9-37

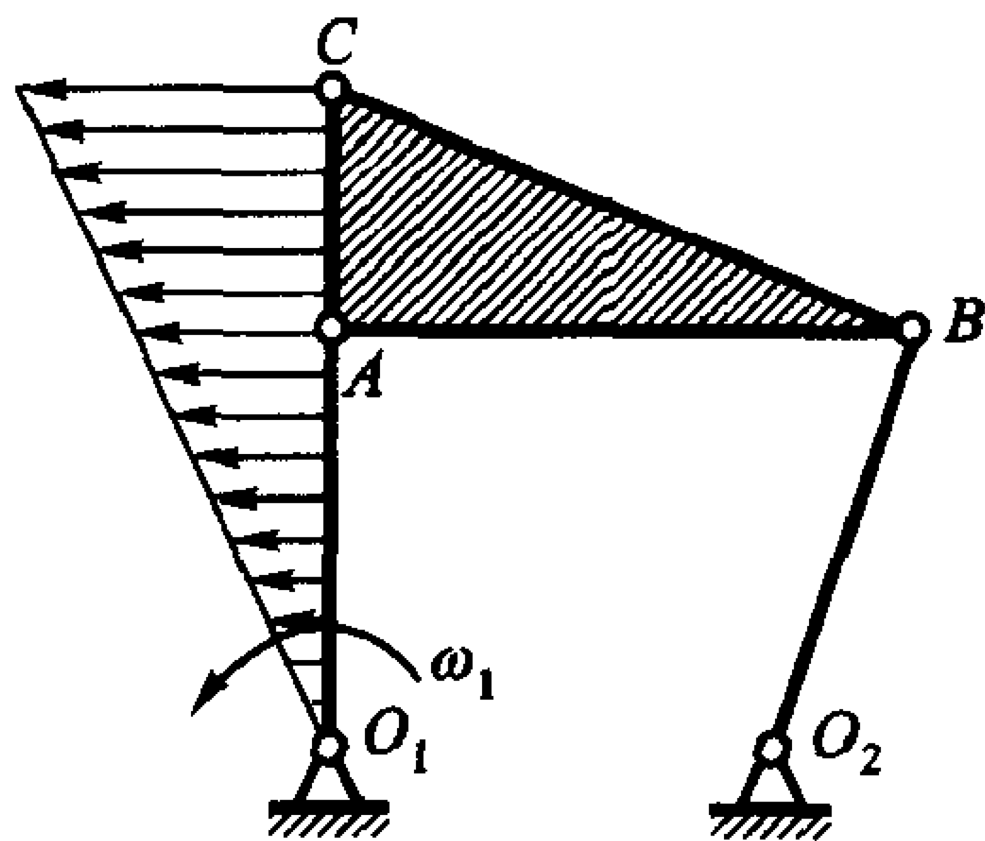


图 9-38

9-3　如图 9-38 所示 O_1A 的角速度为 ω_1，板 ABC 和杆 O_1A 铰接。问图中 O_1A 和 AC 上各点的速度分布规律对不对？

9-4　平面图形在其平面内运动，某瞬时其上有两点的加速度矢相同。试判断下述说法是否正确：

(1) 其上各点速度在该瞬时一定都相等。

(2) 其上各点加速度在该瞬时一定都相等。

9-5　在图 9-39 所示瞬时，已知 $O_1A \underline{\underline{/\!/}} O_2B$，问 ω_1 与 ω_2，α_1 与 α_2 是否相等？

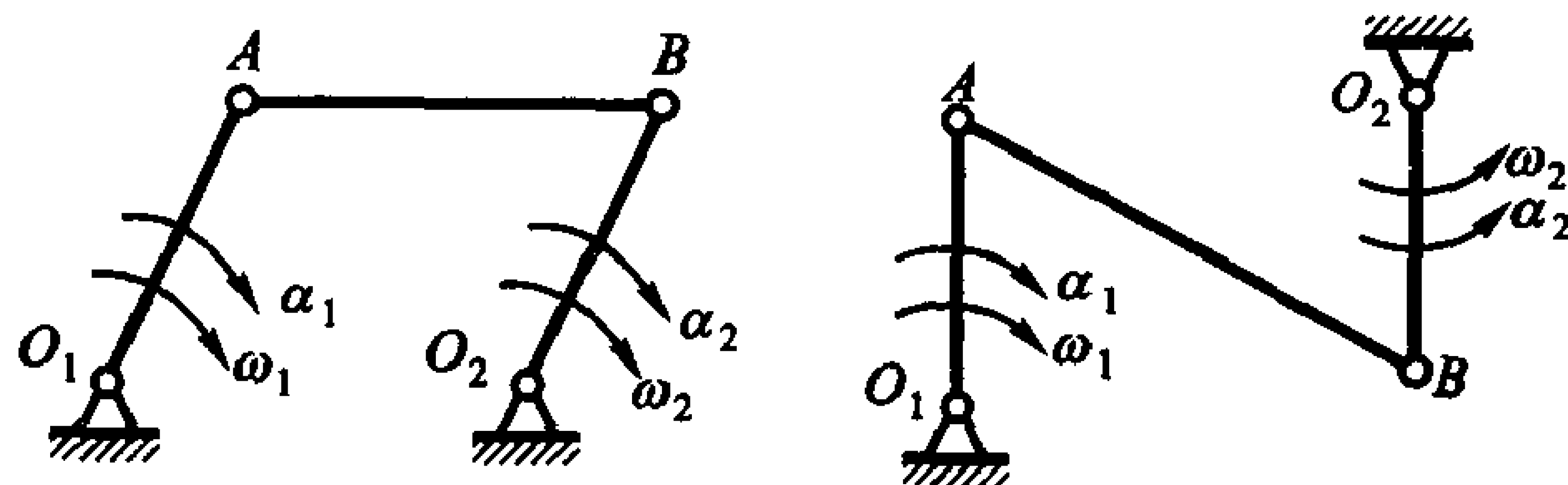


图 9-39

9-6　如图 9-40 所示，车轮沿曲面滚动。已知轮心 O 在某一瞬时的速度 $\boldsymbol{v}_O$ 和加速度 $\boldsymbol{a}_O$。问车轮的角加速度是否等于 $a_O\cos\beta/R$？速度瞬心 C 的加速度大小和方向如何确定？

9-7　试证：当 $\omega=0$ 时，平面图形上两点的加速度在此两点连线上的投影相等。

***9-8**　如图 9-41 所示各平面图形均作平面运动，问图示各种运动状态是否可能？

图 a 中，$\boldsymbol{a}_A$ 与 $\boldsymbol{a}_B$ 平行，且 $\boldsymbol{a}_A=-\boldsymbol{a}_B$。

图 b 中，$\boldsymbol{a}_A$ 与 $\boldsymbol{a}_B$ 都与 A，B 连线垂直，且 $\boldsymbol{a}_A$，$\boldsymbol{a}_B$ 反向。

图 c 中，$\boldsymbol{a}_A$ 沿 AB 连线，$\boldsymbol{a}_B$ 与 AB 连线垂直。

图 d 中，$\boldsymbol{a}_A$，$\boldsymbol{a}_B$ 都沿 A，B 连线，且 $a_B > a_A$。

图 e 中，$\boldsymbol{a}_A$，$\boldsymbol{a}_B$ 都沿 A，B 连线，且 $a_A > a_B$。

图 f 中，$\boldsymbol{a}_A$ 沿 A，B 连线方向。

图 g 中，$\boldsymbol{a}_A$，$\boldsymbol{a}_B$ 都与 AC 连线垂直，且 $a_B > a_A$。

图 h 中，$AB \perp AC$，$\boldsymbol{a}_A$ 沿 AB 线，$\boldsymbol{a}_B$ 在 AB 线上的投影与 a_A 相等。

图 i 中，$\boldsymbol{a}_A$ 与 $\boldsymbol{a}_B$ 平行且相等，即 $\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_B$。

图 j 中，$\boldsymbol{a}_A$，$\boldsymbol{a}_B$ 都与 AB 垂直，且 $\boldsymbol{v}_A$，$\boldsymbol{v}_B$ 在 AB 连线上的投影相等。

图 k 中，$\boldsymbol{v}_A$ 与 $\boldsymbol{v}_B$ 平行且相等，$\boldsymbol{a}_B$ 与 AB 垂直，$\boldsymbol{a}_A$ 与 $\boldsymbol{v}_A$ 共线。

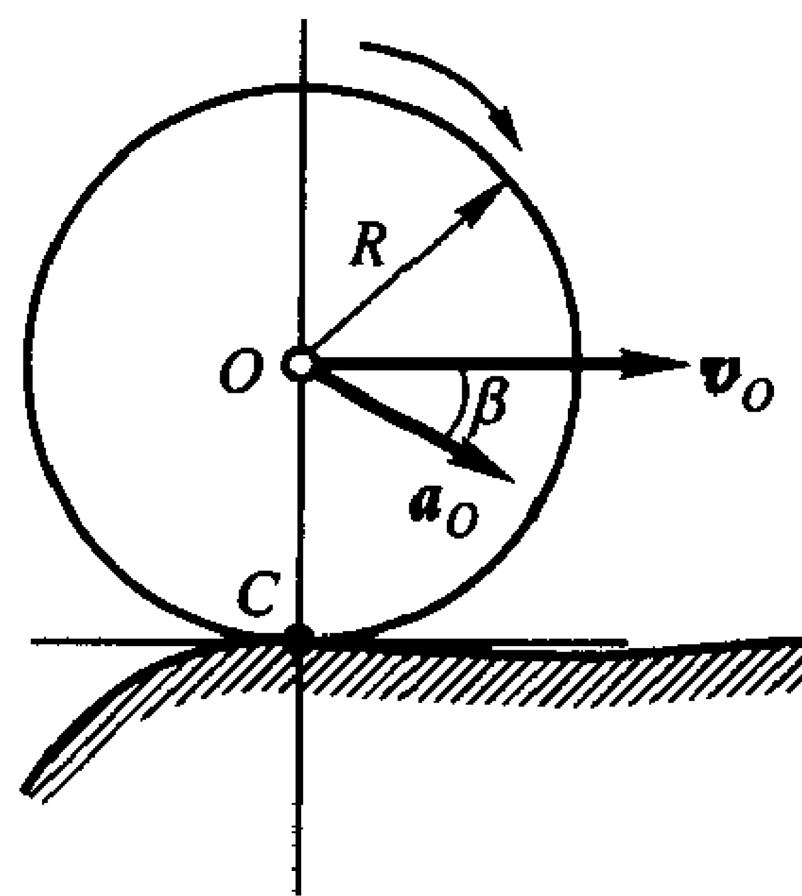


图 9－40

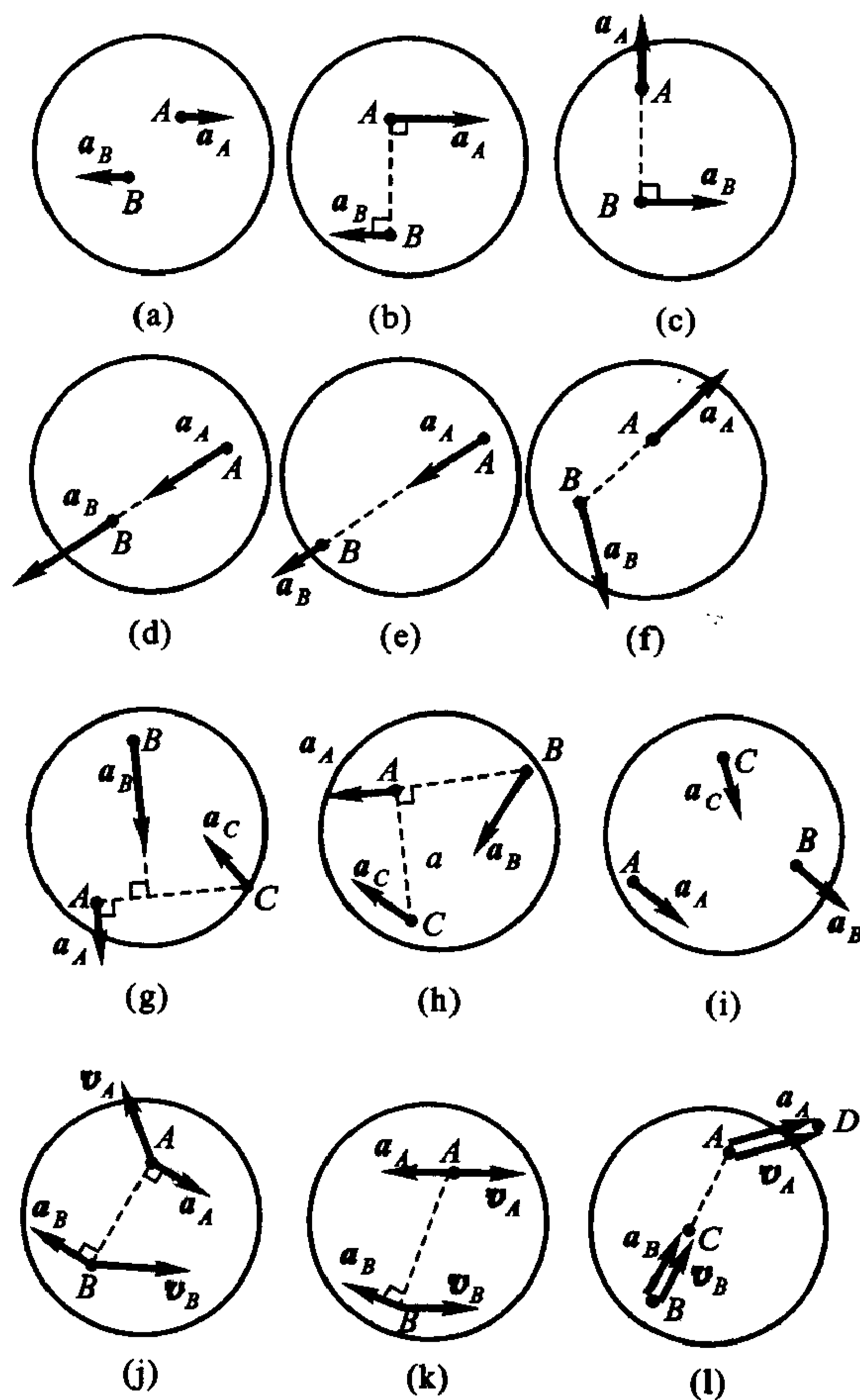


图 9－41

图1中，矢量$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{AD}$在AB线上的投影相等，$\overrightarrow{BC}$在AB线上。$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{v}_B=\overrightarrow{BC}$，$\boldsymbol{a}_A=\boldsymbol{v}_A=\overrightarrow{AD}$。

***9－9**　图9－42所示各平面机构中，各部分尺寸及图示瞬时的位置已知。凡图上标出的角速度或速度皆为已知，且皆为常量。欲求出各图中点C的速度和加速度，你将采用什么方法？说出解题的步骤及所用公式。

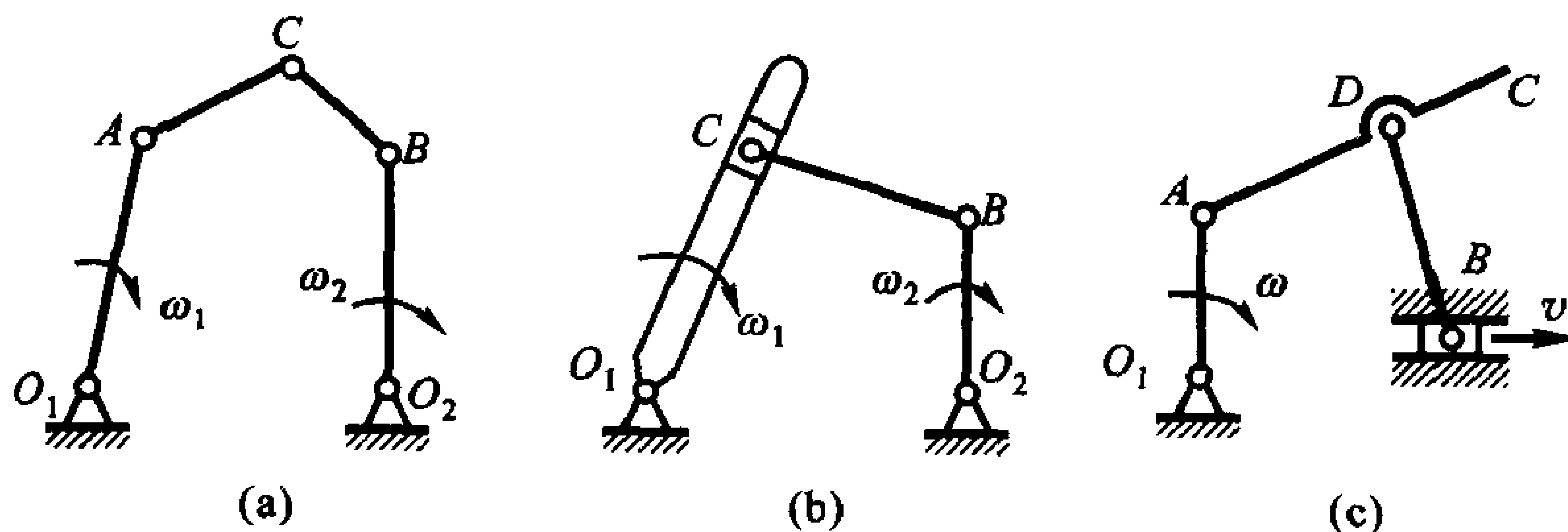


图9－42

***9－10**　杆AB作平面运动，图示瞬时A，B两点速度$\boldsymbol{v}_A$，$\boldsymbol{v}_B$的大小、方向均为已知，C，D两点分别是$\boldsymbol{v}_A$，$\boldsymbol{v}_B$的矢端，如图9－43所示。试问

(1) 杆AB上各点速度矢的端点是否都在直线CD上？

(2) 对杆AB上任意一点E，设其速度矢端为H，那么点H在什么位置？

(3) 设杆AB为无限长，它与CD的延长线交于点P。试判断下述说法是否正确。

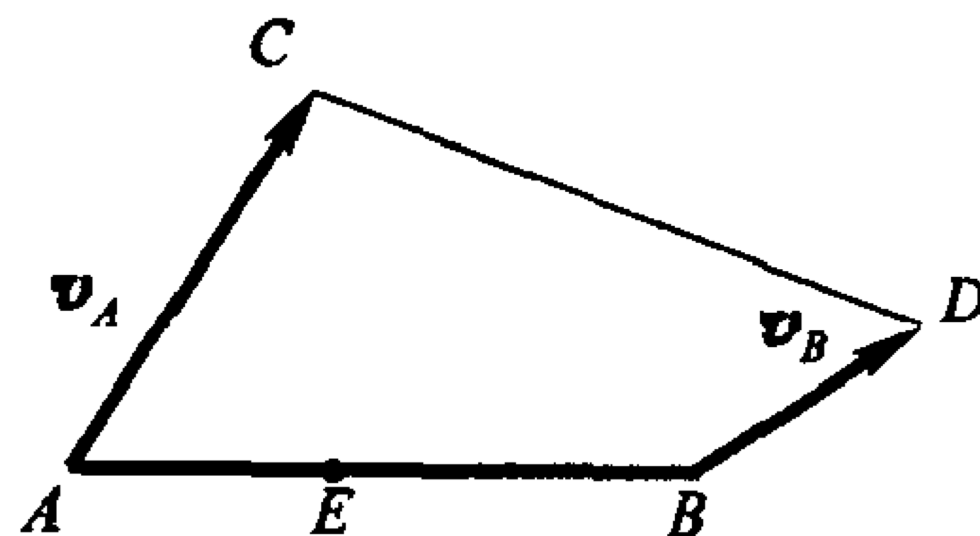


图9－43

A．点P的瞬时速度为零。

B．点P的瞬时速度必不为零，其速度矢端必在直线AB上。

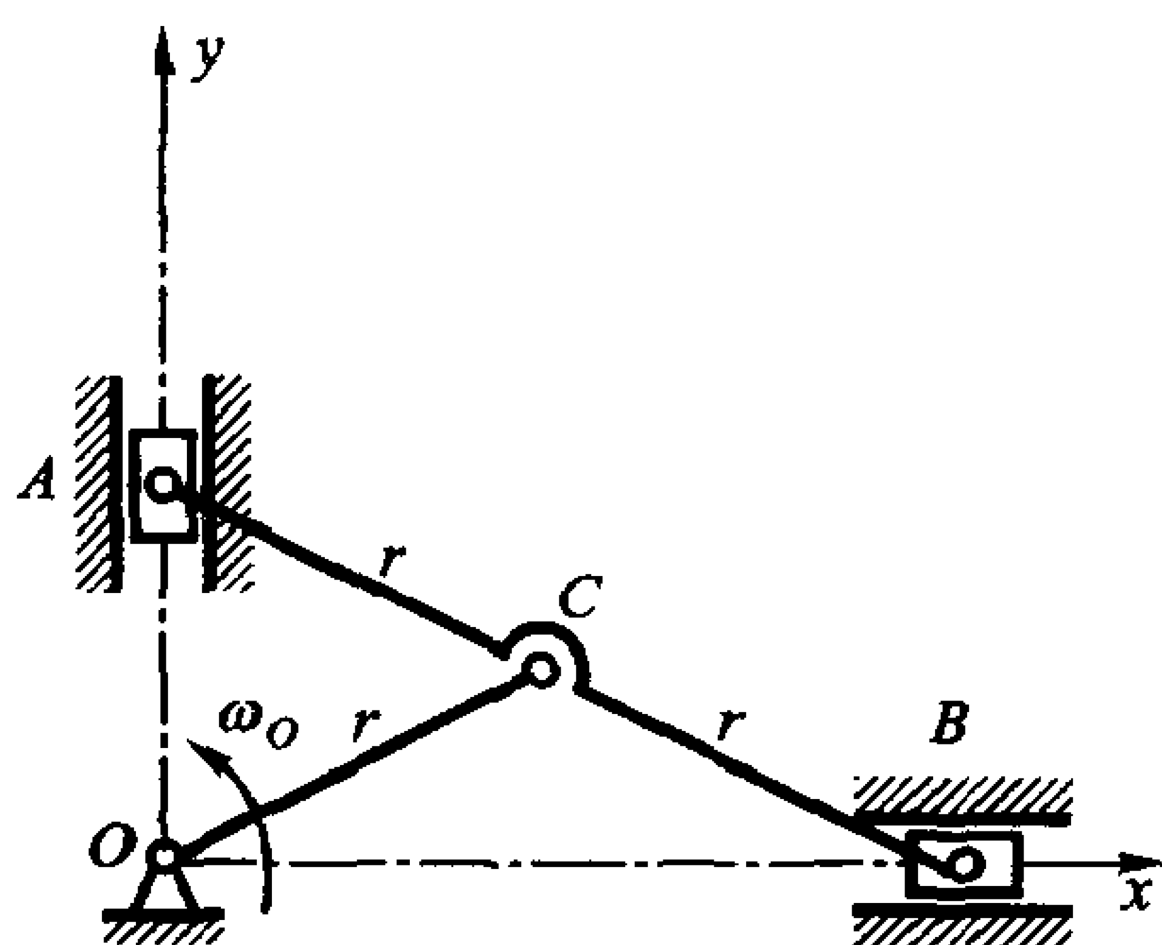
C．点P的瞬时速度必不为零，其速度矢端必在CD的延长线上。

习　　题

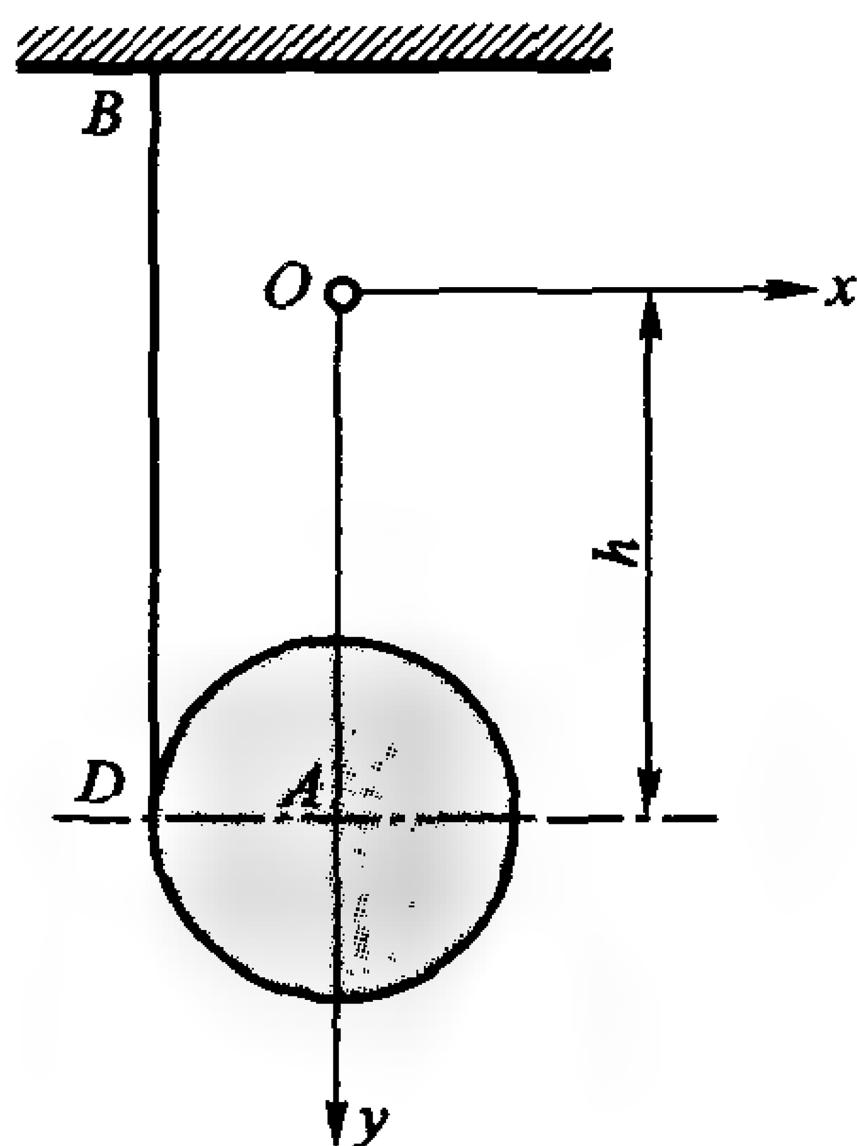
9－1　椭圆规尺AB由曲柄OC带动，曲柄以角速度ω_O绕O轴匀速转动，如图所示。如$OC=BC=AC=r$，并取C为基点，求椭圆规尺AB的平面运动方程。

9－2　如图所示，圆柱A缠以细绳，绳的B端固定在天花板上。圆柱自静止落下，其轴心的速度为$v=\frac{2}{3}\sqrt{3gh}$，其中g为常量，h为圆柱轴心到初始位置的距离。如圆柱半径为r，求圆柱的平面运动方程。

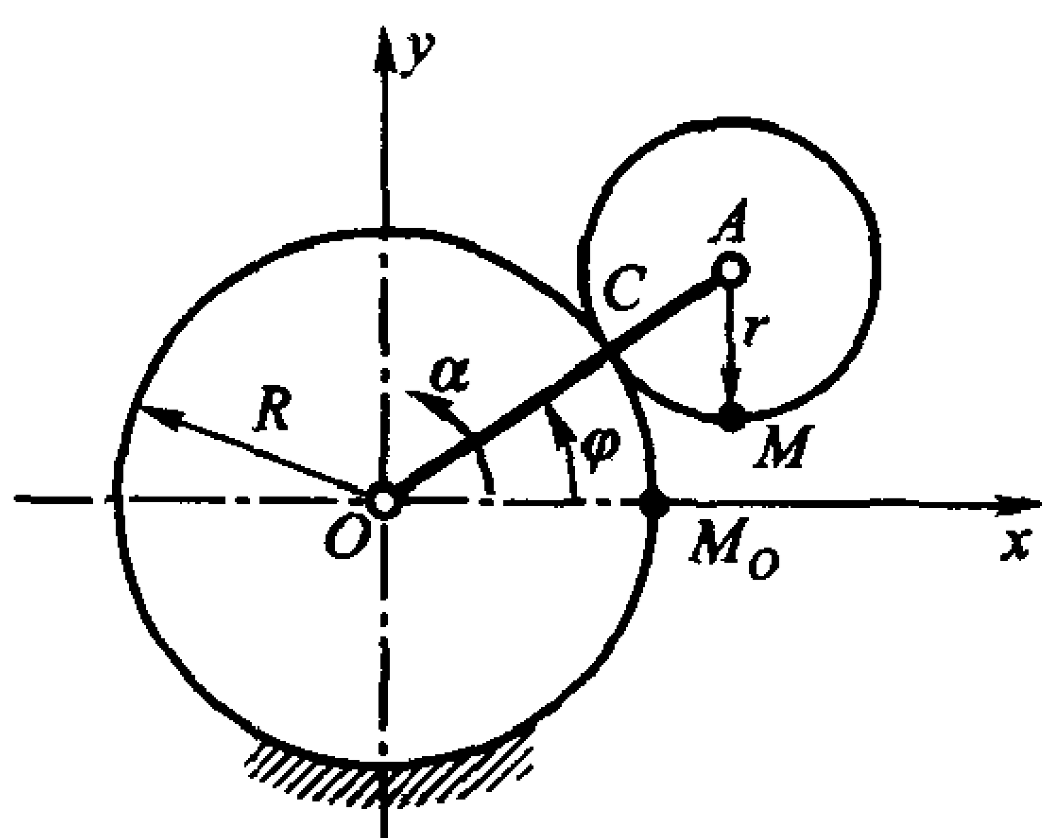
9－3　半径为r的齿轮由曲柄OA带动，沿半径为R的固定齿轮滚动，如图所示。如曲柄OA以等角加速度α绕O轴转动，当运动开始时，角速度$\omega_O=0$，转角$\varphi=0$。求动齿轮以中心A为基点的平面运动方程。



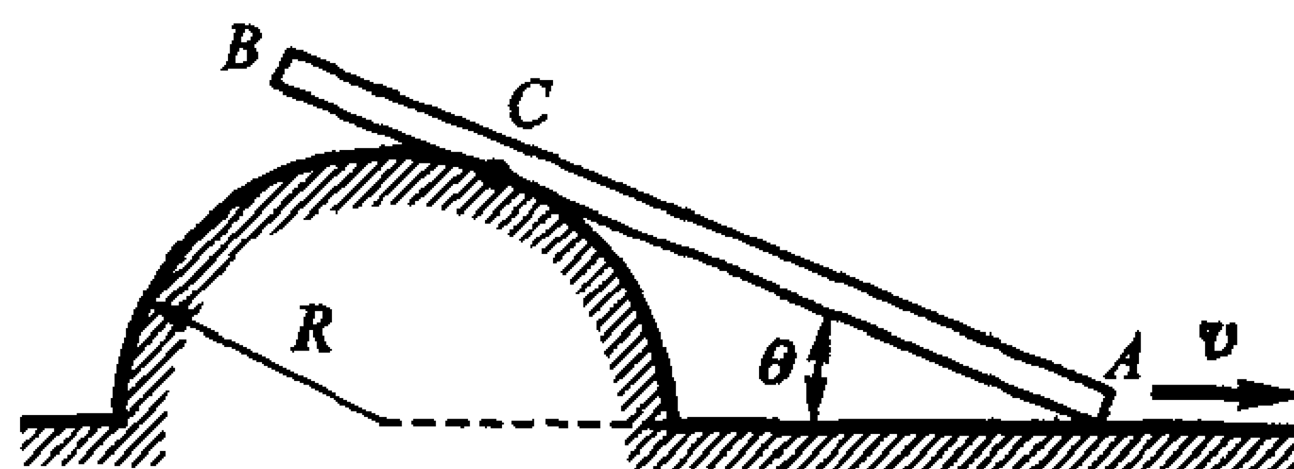
题 9－1 图



题 9－2 图



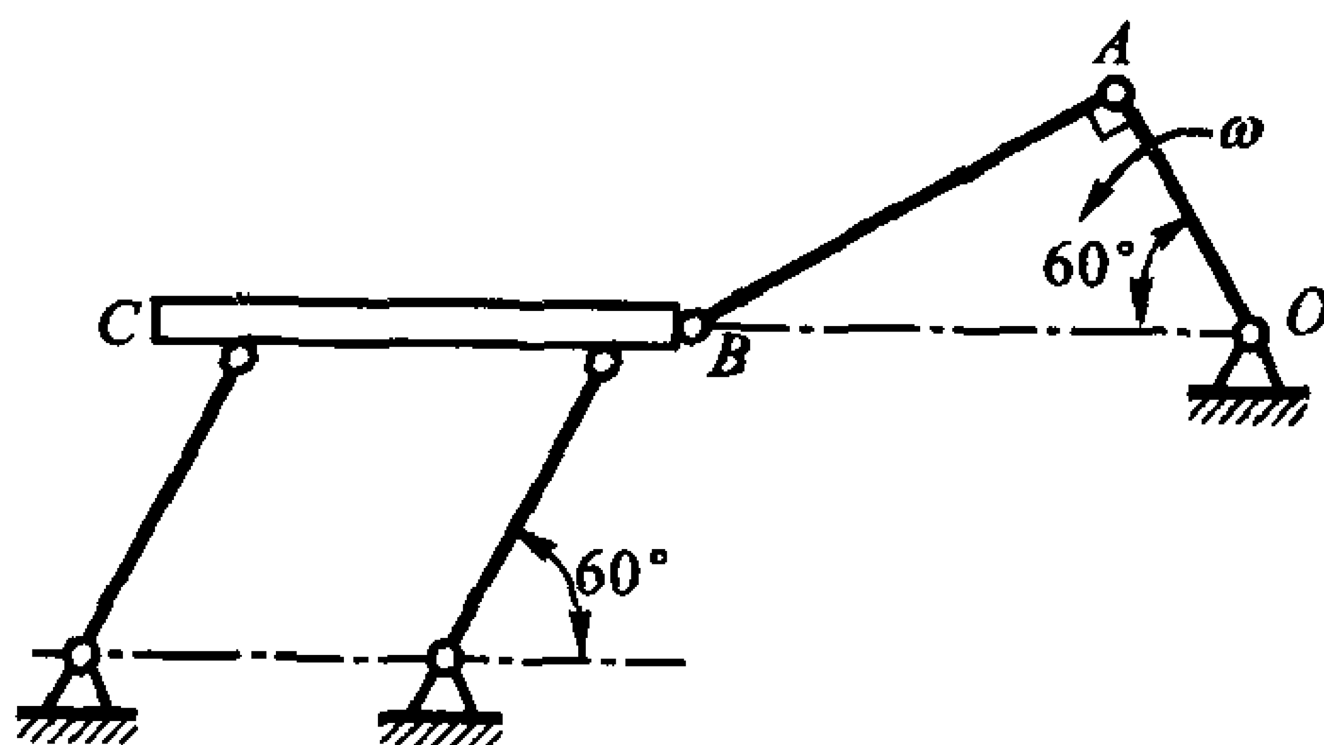
题 9－3 图



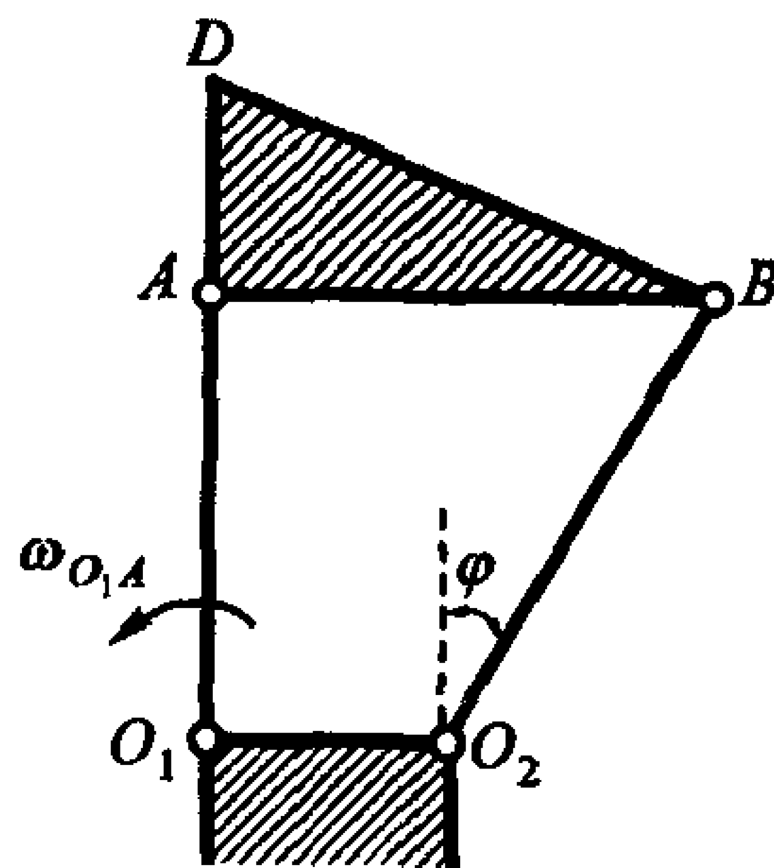
题 9－4 图

9－4 杆 AB 的 A 端沿水平线以等速 $\boldsymbol{v}$ 运动，运动时杆恒与一半圆周相切，半圆周的半径为 R，如图所示。如杆与水平线间的交角为 θ，试以角 θ 表示杆的角速度。

9－5 如图所示，在筛动机构中，筛子的摆动是由曲柄连杆机构所带动。已知曲柄 OA 的转速 $n_{OA}=40\ \mathrm{r/min}$，$OA=0.3\ \mathrm{m}$。当筛子 BC 运动到与点 O 在同一水平线上时，$\angle BAO=90^\circ$。求此瞬时筛子 BC 的速度。



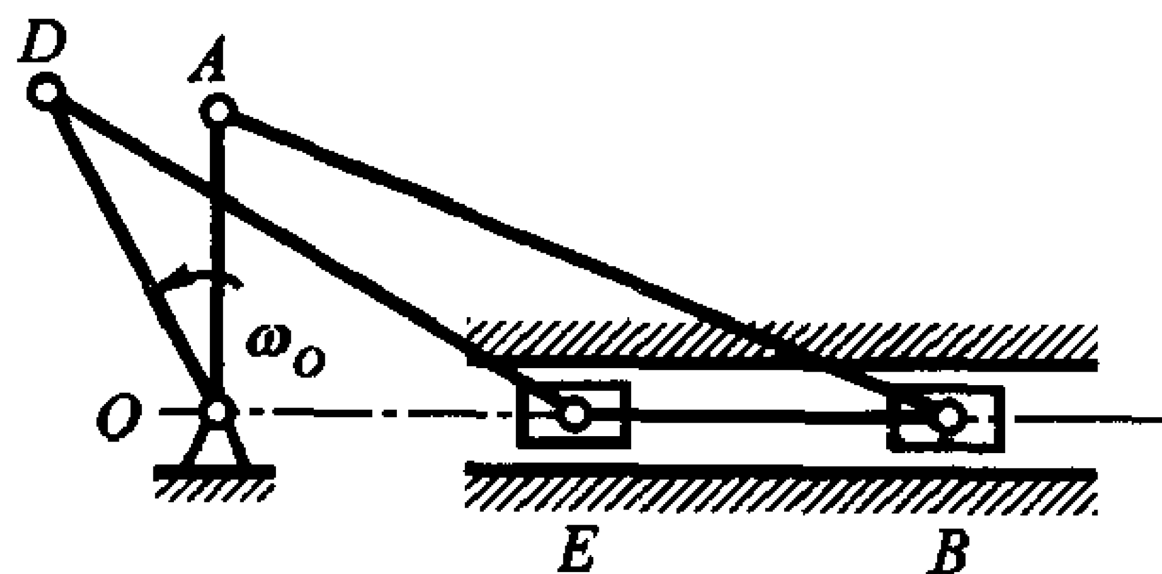
题 9－5 图



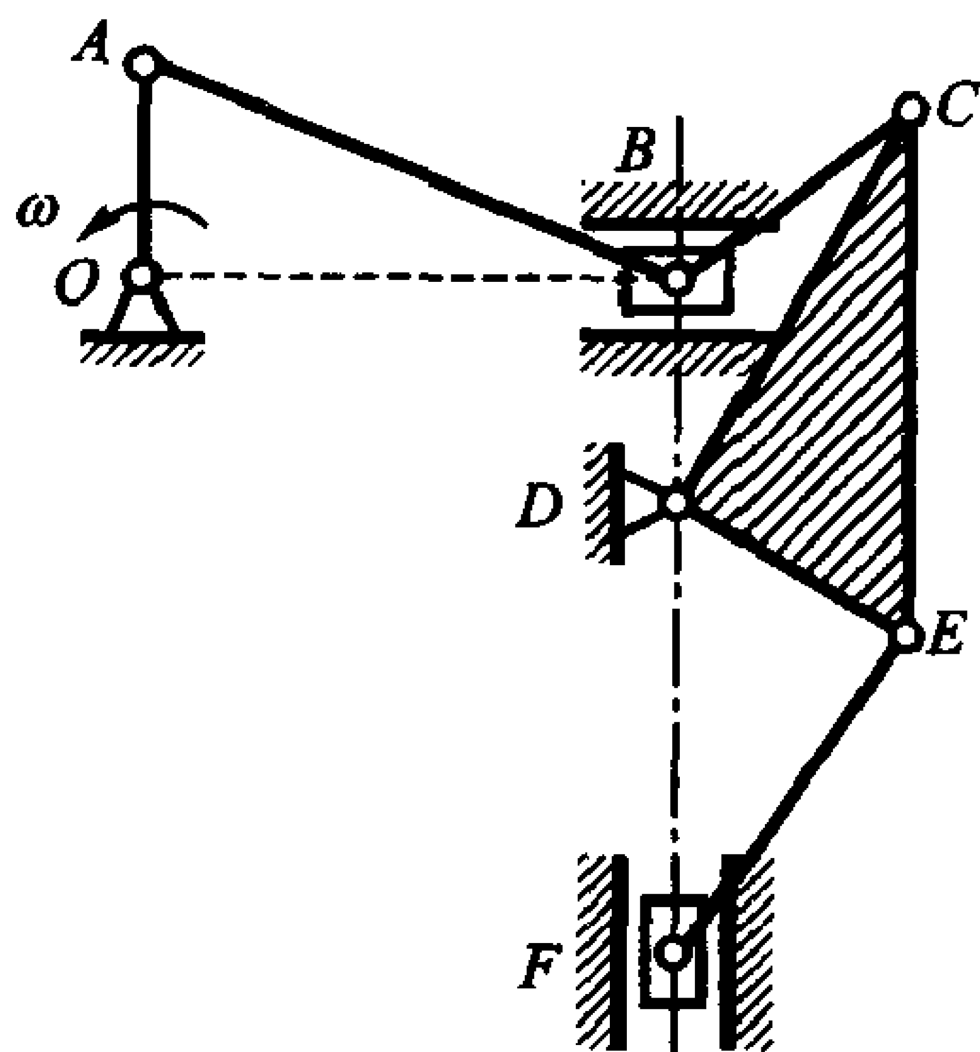
题 9－6 图

9-6 四连杆机构中，连杆 AB 上固连一块三角板 ABD，如图所示。机构由曲柄 O_1A 带动。已知：曲柄的角速度 $\omega_{O_1A}=2\ \mathrm{rad/s}$；曲柄 $O_1A=0.1\ \mathrm{m}$，水平距离 $O_1O_2=0.05\ \mathrm{m}$，$AD=0.05\ \mathrm{m}$；当 $O_1A\perp O_1O_2$ 时，AB 平行于 O_1O_2，且 AD 与 AO_1 在同一直线上；角 $\varphi=30°$。求三角板 ABD 的角速度和点 D 的速度。

9-7 图示双曲柄连杆机构的滑块 B 和 E 用杆 BE 连接。主动曲柄 OA 和从动曲柄 OD 都绕 O 轴转动。主动曲柄 OA 以等角速度 $\omega_O=12\ \mathrm{rad/s}$ 转动。已知机构的尺寸为：$OA=0.1\ \mathrm{m}$，$OD=0.12\ \mathrm{m}$，$AB=0.26\ \mathrm{m}$，$BE=0.12\ \mathrm{m}$，$DE=0.12\sqrt{3}\ \mathrm{m}$。求当曲柄 OA 垂直于滑块的导轨方向时，从动曲柄 OD 和连杆 DE 的角速度。



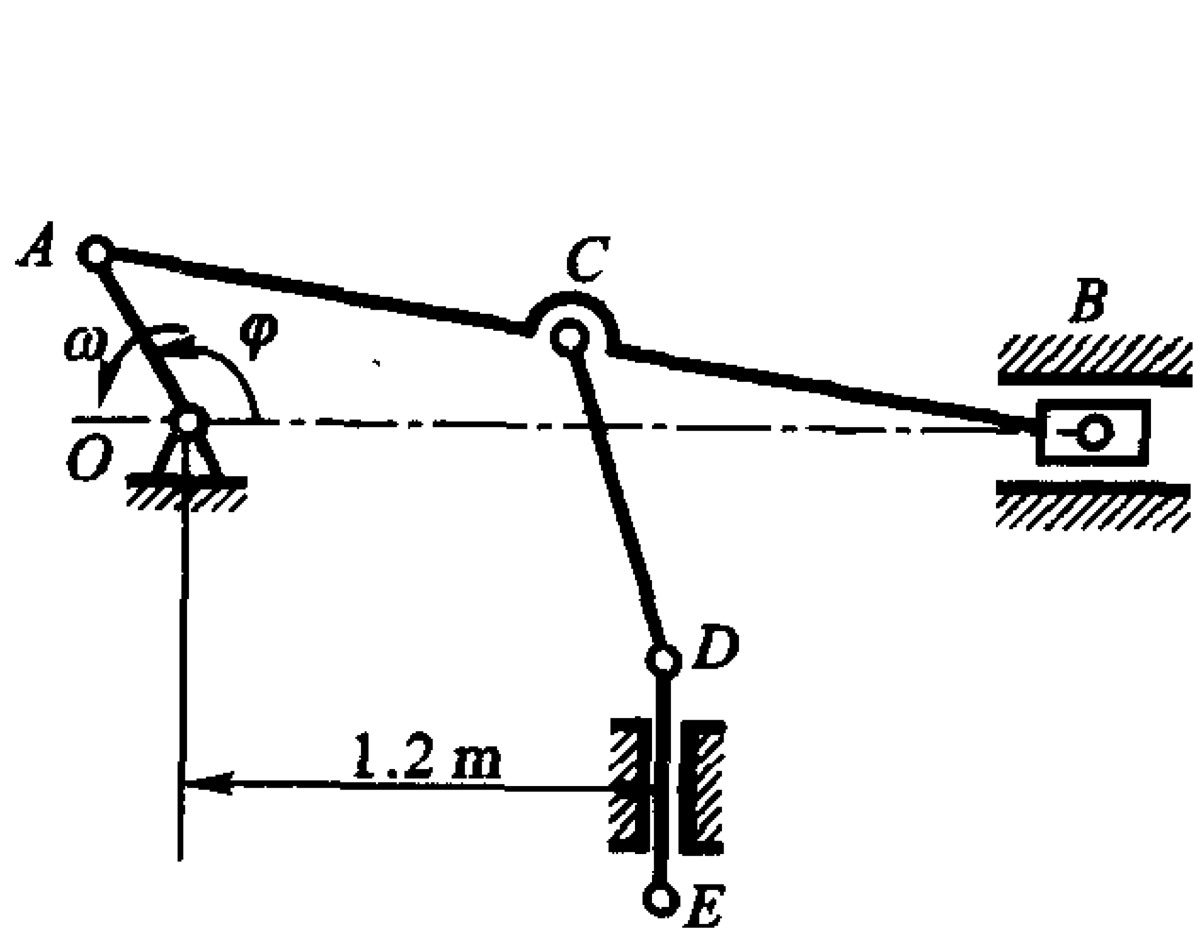
题 9-7 图



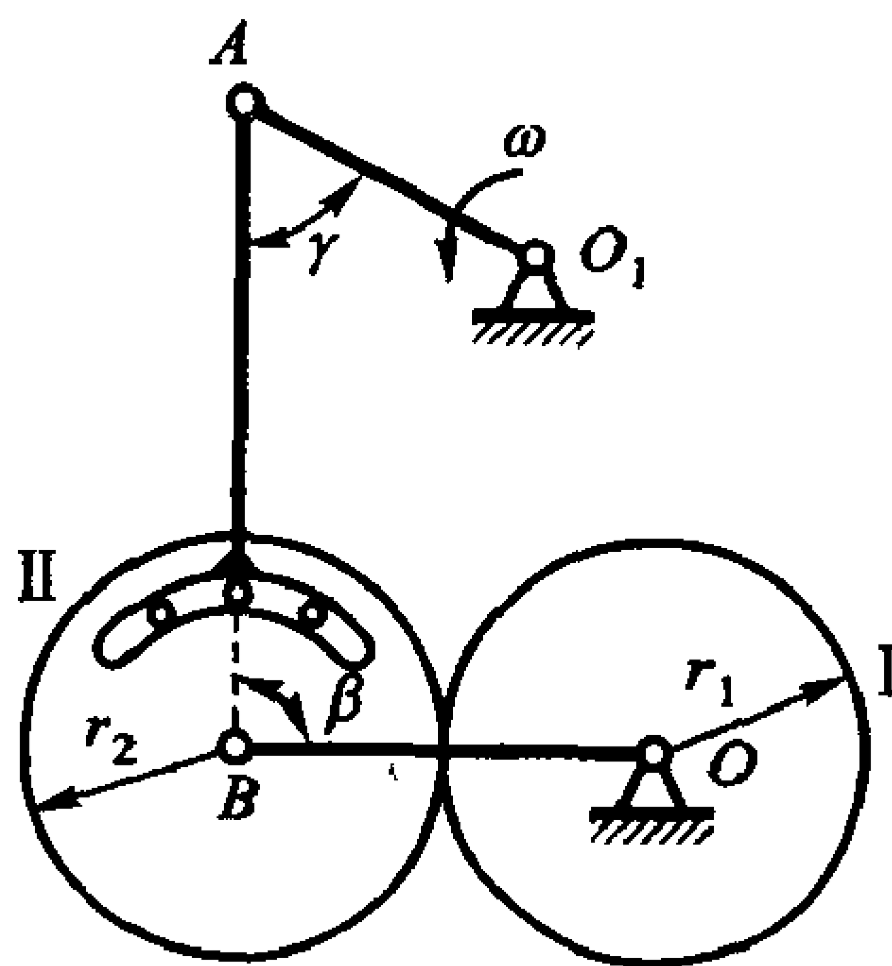
题 9-8 图

9-8 图示机构中，已知：$OA=0.1\ \mathrm{m}$，$BD=0.1\ \mathrm{m}$，$DE=0.1\ \mathrm{m}$，$EF=0.1\sqrt{3}\ \mathrm{m}$；曲柄 OA 的角速度 $\omega=4\ \mathrm{rad/s}$。在图示位置时，曲柄 OA 与水平线 OB 垂直；且 B，D 和 F 在同一铅直线上，又 DE 垂直于 EF。求杆 EF 的角速度和点 F 的速度。

9-9 图示配汽机构中，曲柄 OA 的角速度 $\omega=20\ \mathrm{rad/s}$，为常量。已知 $OA=0.4\ \mathrm{m}$，$AC=BC=0.2\sqrt{37}\ \mathrm{m}$。求当曲柄 OA 在两铅直线位置和两水平位置时，配汽机构中气阀推杆 DE 的速度。



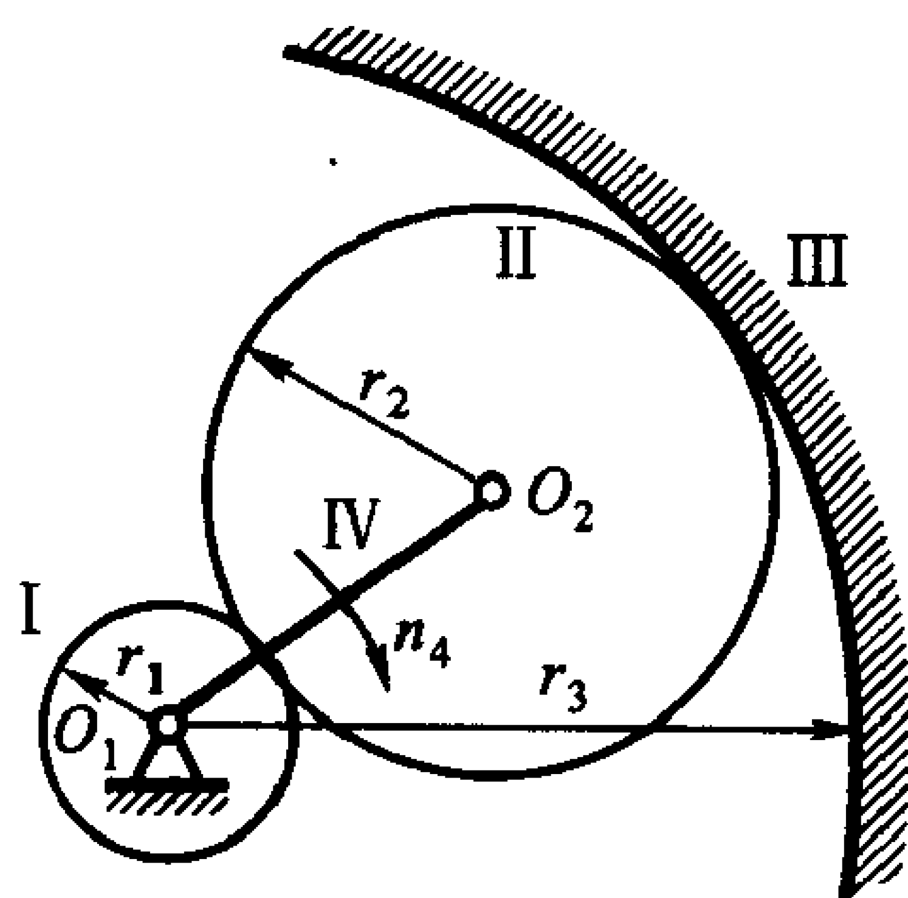
题 9-9 图



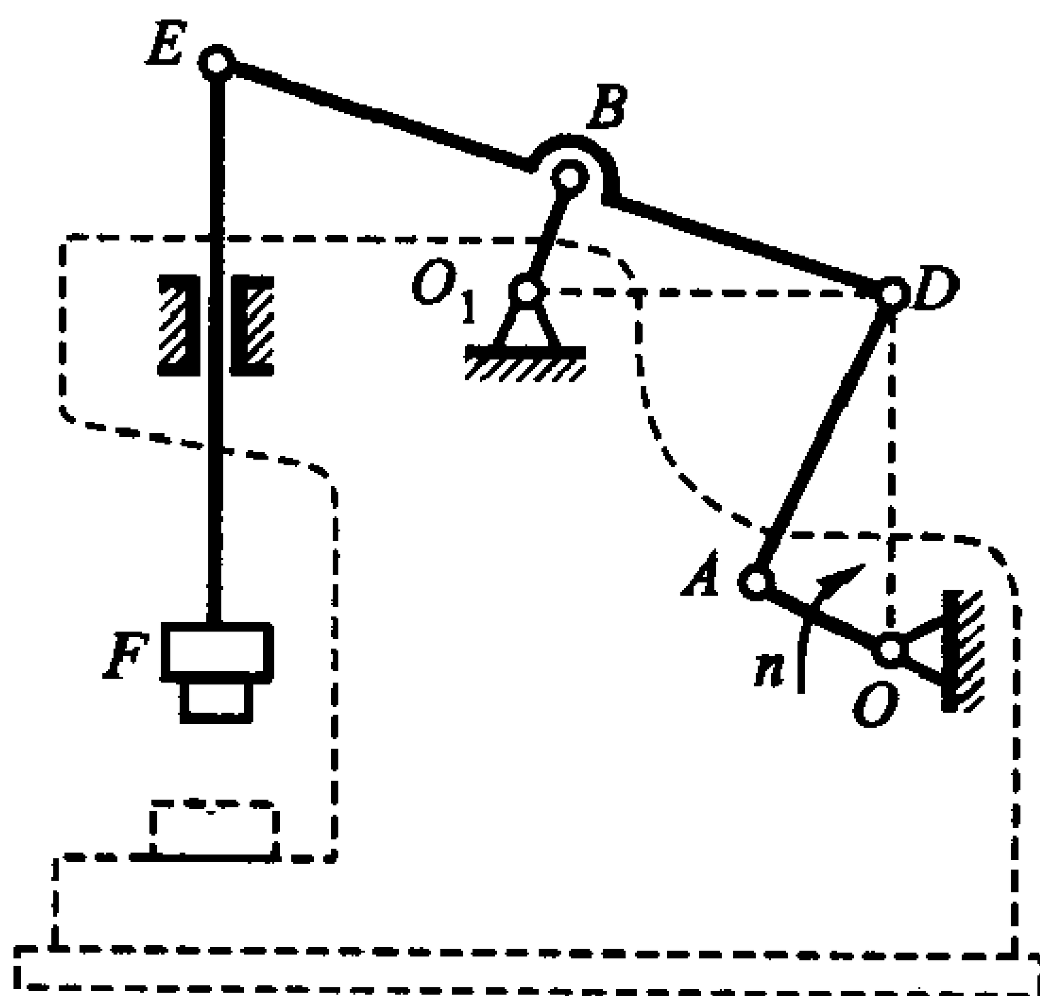
题 9-10 图

9-10 在瓦特行星传动机构中，平衡杆 O_1A 绕 O_1 轴转动，并借连杆 AB 带动曲柄 OB；而曲柄 OB 活动地装置在 O 轴上，如图所示。在 O 轴上装有齿轮 Ⅰ，齿轮 Ⅱ 与连杆 AB 固连于一体。已知：$r_1=r_2=0.3\sqrt{3}$ m，$O_1A=0.75$ m，$AB=1.5$ m；又平衡杆的角速度 $\omega=6$ rad/s。求当 $\gamma=60°$ 且 $\beta=90°$ 时，曲柄 OB 和齿轮 Ⅰ 的角速度。

9-11 使砂轮高速转动的装置如图所示。杆 O_1O_2 绕 O_1 轴转动，转速为 n_4。O_2 处用铰链连接一半径为 r_2 的活动齿轮 Ⅱ，杆 O_1O_2 转动时轮 Ⅱ 在半径为 r_3 的固定内齿轮上滚动，并使半径为 r_1 的轮 Ⅰ 绕 O_1 轴转动。轮 Ⅰ 上装有砂轮，随同轮 Ⅰ 高速转动。已知 $\frac{r_3}{r_1}=11$，$n_4=900$ r/min，求砂轮的转速。



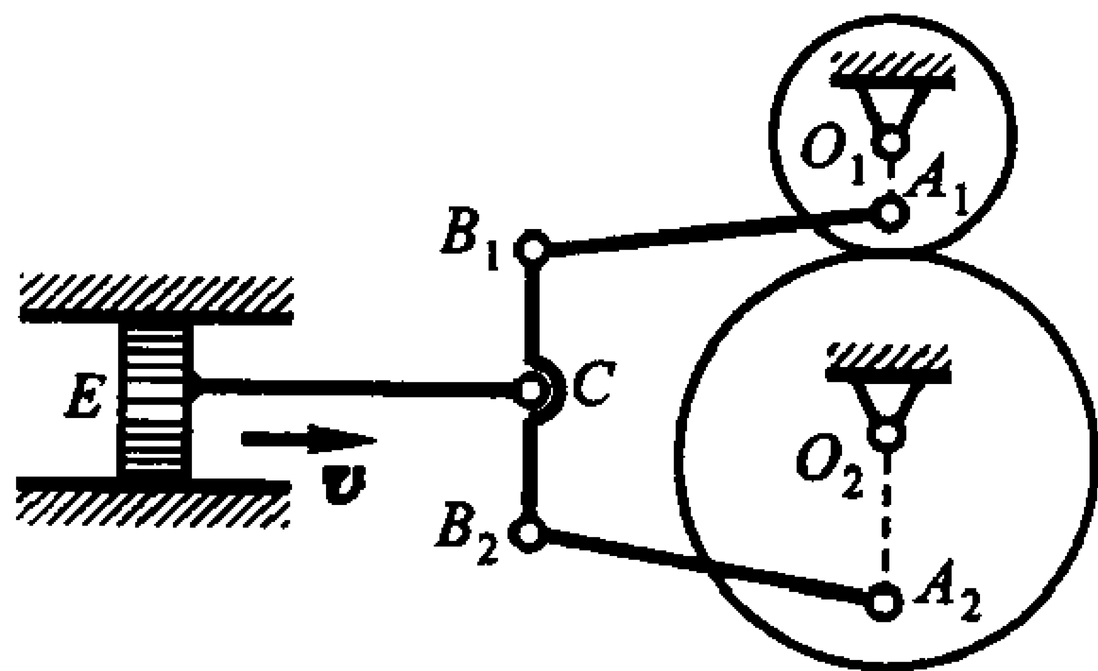
题 9-11 图



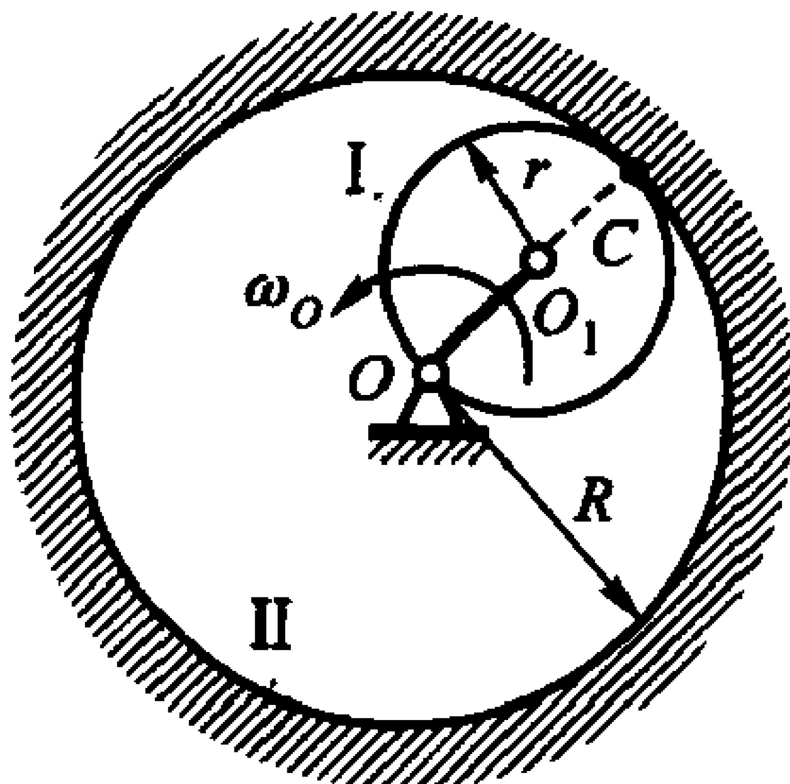
题 9-12 图

***9-12** 图示小型精压机的传动机构，$OA=O_1B=r=0.1$ m，$EB=BD=AD=l=0.4$ m。在图示瞬时，$OA\perp AD$，$O_1B\perp ED$，O_1D 在水平位置，OD 和 EF 在铅直位置。已知曲柄 OA 的转速 $n=120$ r/min，求此时压头 F 的速度。

9-13 图示蒸汽机传动机构中，已知：活塞的速度为 $\boldsymbol{v}$；$O_1A_1=a_1$，$O_2A_2=a_2$，$CB_1=b_1$，$CB_2=b_2$；齿轮半径分别为 r_1 和 r_2；且有 $a_1b_2r_2\neq a_2b_1r_1$。当杆 EC 水平，杆 B_1B_2 铅直，A_1，A_2 和 O_1，O_2 都在同一条铅直线上时，求齿轮 O_1 的角速度。



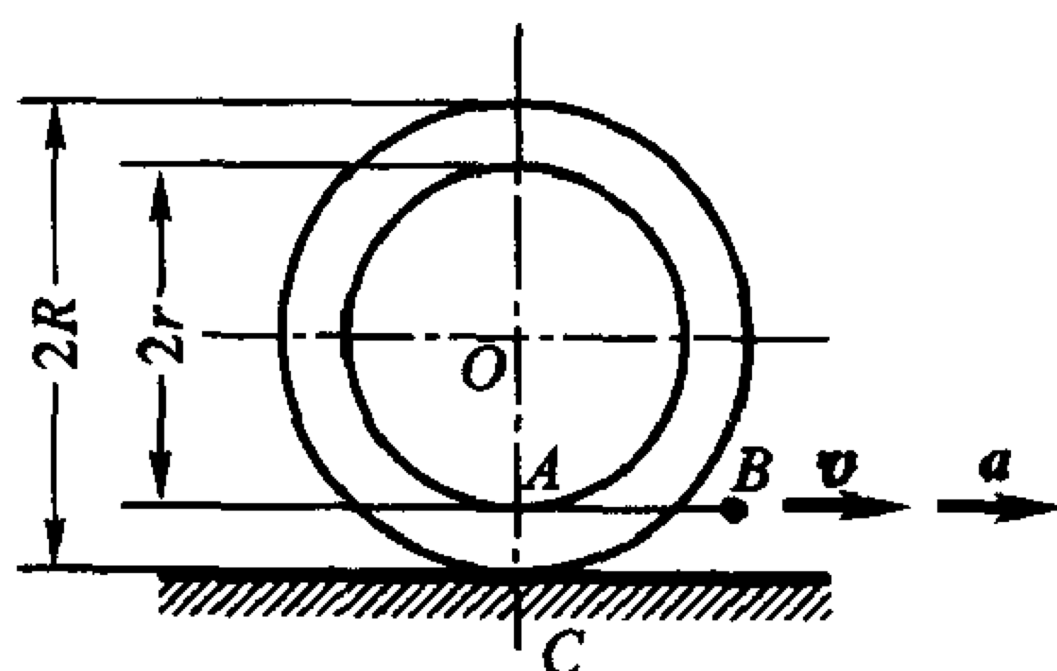
题 9-13 图



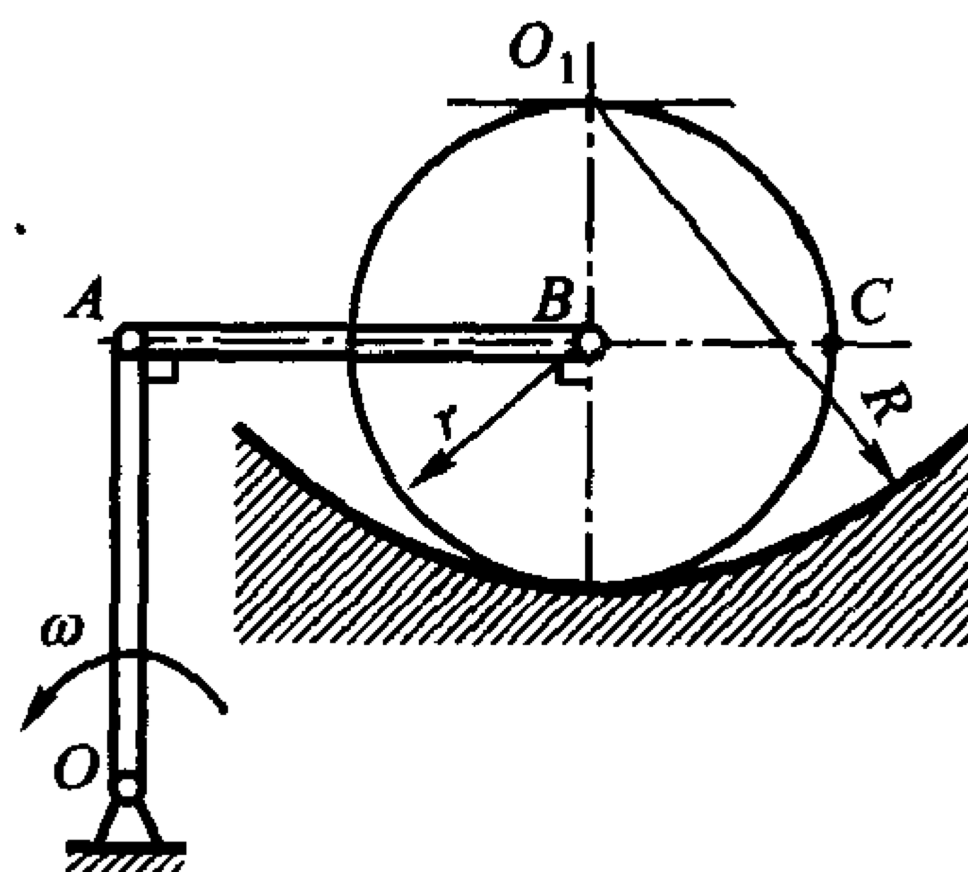
题 9-14 图

9-14　齿轮Ⅰ在齿轮Ⅱ内滚动，其半径分别为 r 和 $R=2r$。曲柄 OO_1 绕 O 轴以等角速度 ω_O 转动，并带动行星齿轮Ⅰ。求该瞬时轮Ⅰ上瞬时速度中心 C 的加速度。

9-15　半径为 R 的轮子沿水平面滚动而不滑动，如图所示。在轮上有圆柱部分，其半径为 r。将线绕于圆柱上，线的 B 端以速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿水平方向运动。求轮的轴心 O 的速度和加速度。



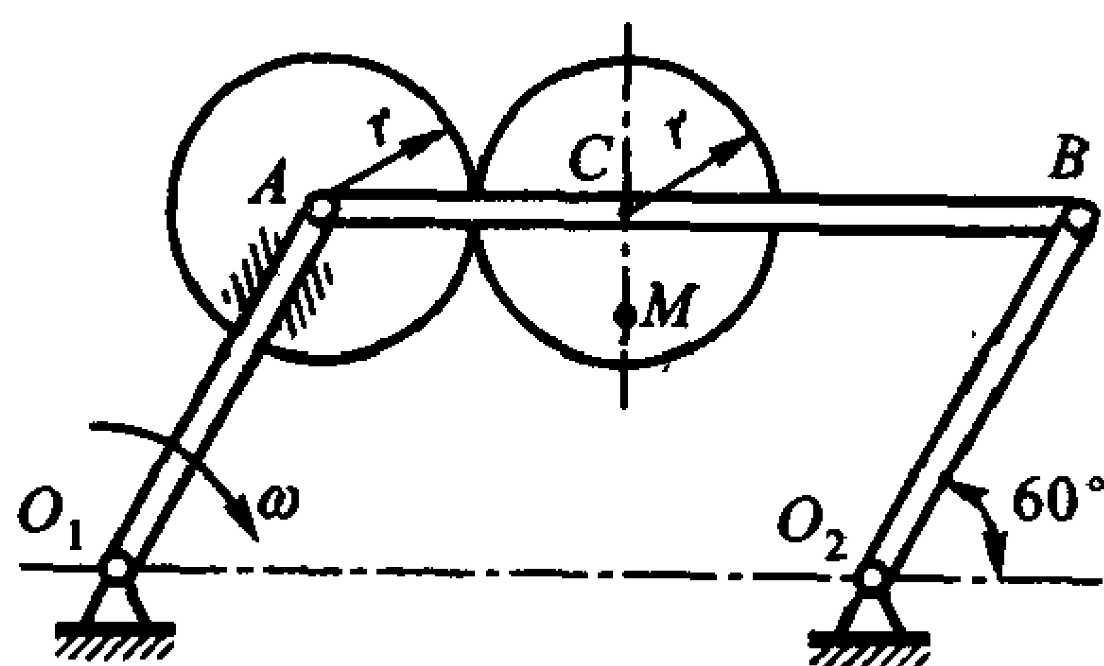
题 9-15 图



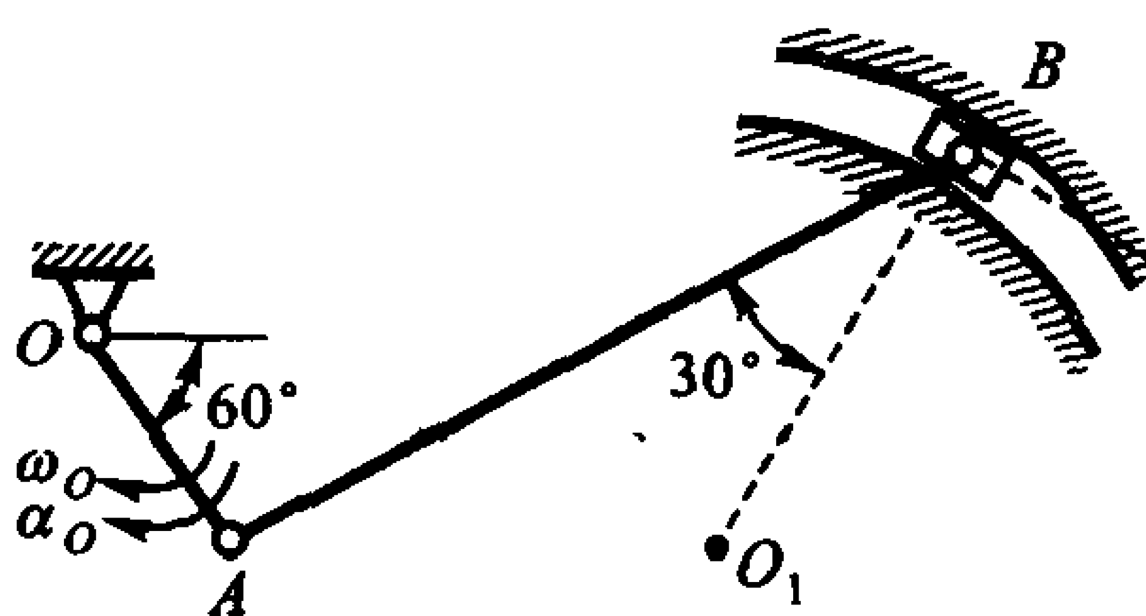
题 9-16 图

9-16　曲柄 OA 以恒定的角速度 $\omega=2$ rad/s 绕轴 O 转动，并借助连杆 AB 驱动半径为 r 的轮子在半径为 R 的圆弧槽中作无滑动的滚动。设 $OA=AB=R=2r=1$ m，求图示瞬时点 B 和点 C 的速度与加速度。

9-17　在曲柄齿轮椭圆规中，齿轮 A 和曲柄 O_1A 固结为一体，齿轮 C 和齿轮 A 半径均为 r 并互相啮合，如图所示。图中 $AB=O_1O_2$，$O_1A=O_2B=0.4$ m。O_1A 以恒定的角速度 ω 绕轴 O_1 转动，$\omega=0.2$ rad/s。M 为轮 C 上一点，$CM=0.1$ m。在图示瞬时，CM 为铅垂，求此时 M 点的速度和加速度。



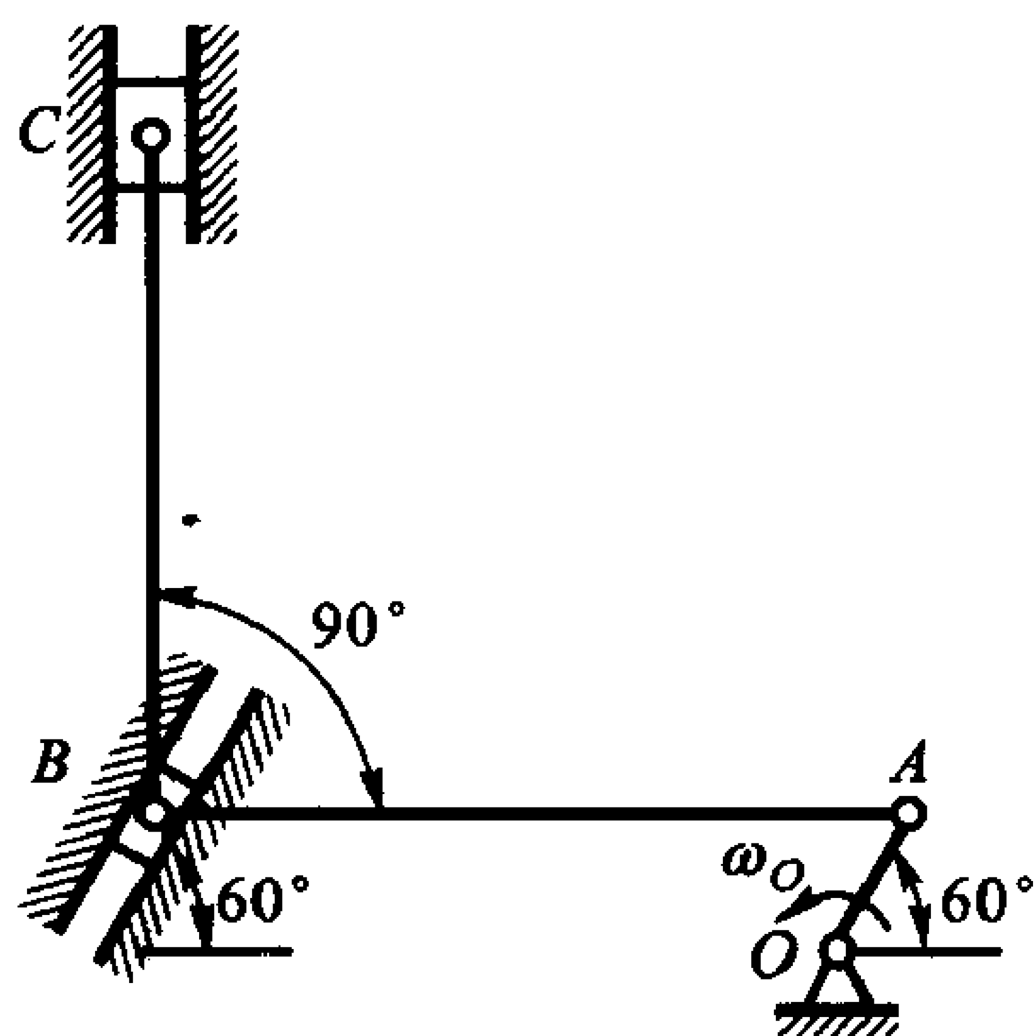
题 9-17 图



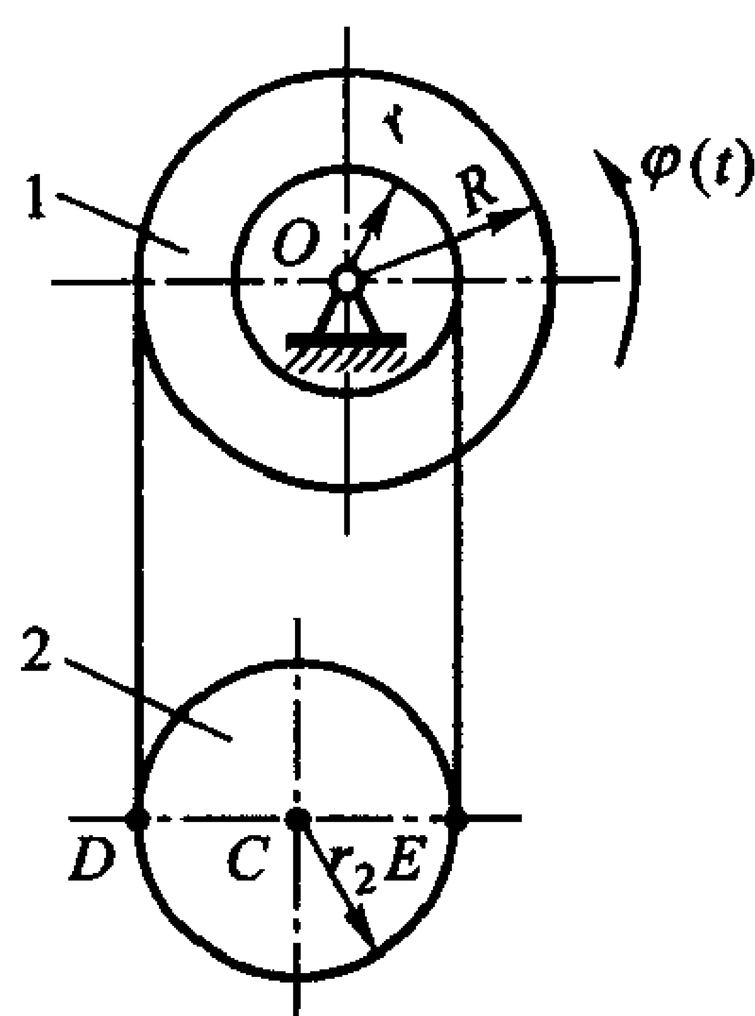
题 9-18 图

9-18　在图示曲柄连杆机构中，曲柄 OA 绕 O 轴转动，其角速度为 ω_O，角加速度为 α_O。在某瞬时曲柄与水平线间成 60°角，而连杆 AB 与曲柄 OA 垂直。滑块 B 在圆形槽内滑动，此时半径 O_1B 与连杆 AB 间成 30°角。如 $OA=r$，$AB=2\sqrt{3}r$，$O_1B=2r$，求在该瞬时，滑块 B 的切向和法向加速度。

9-19　在图示机构中，曲柄 OA 长为 r，绕 O 轴以等角速度 ω_O 转动，$AB=6r$，$BC=3\sqrt{3}r$。求图示位置时，滑块 C 的速度和加速度。



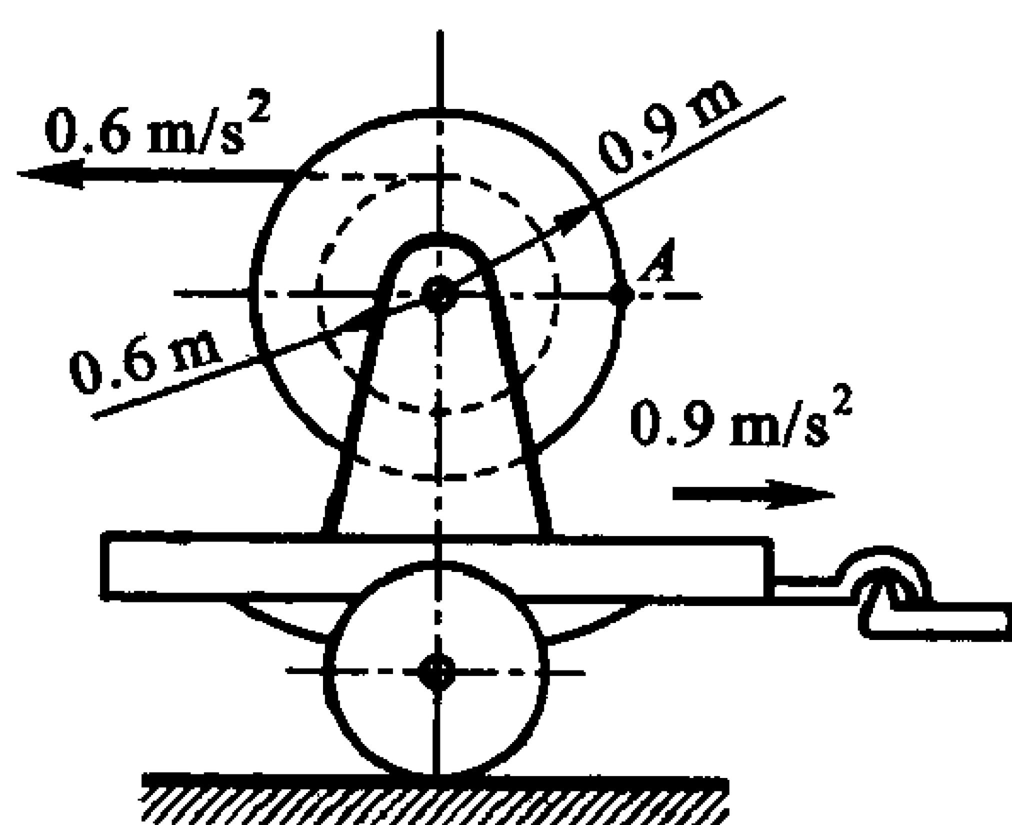
题 9-19 图



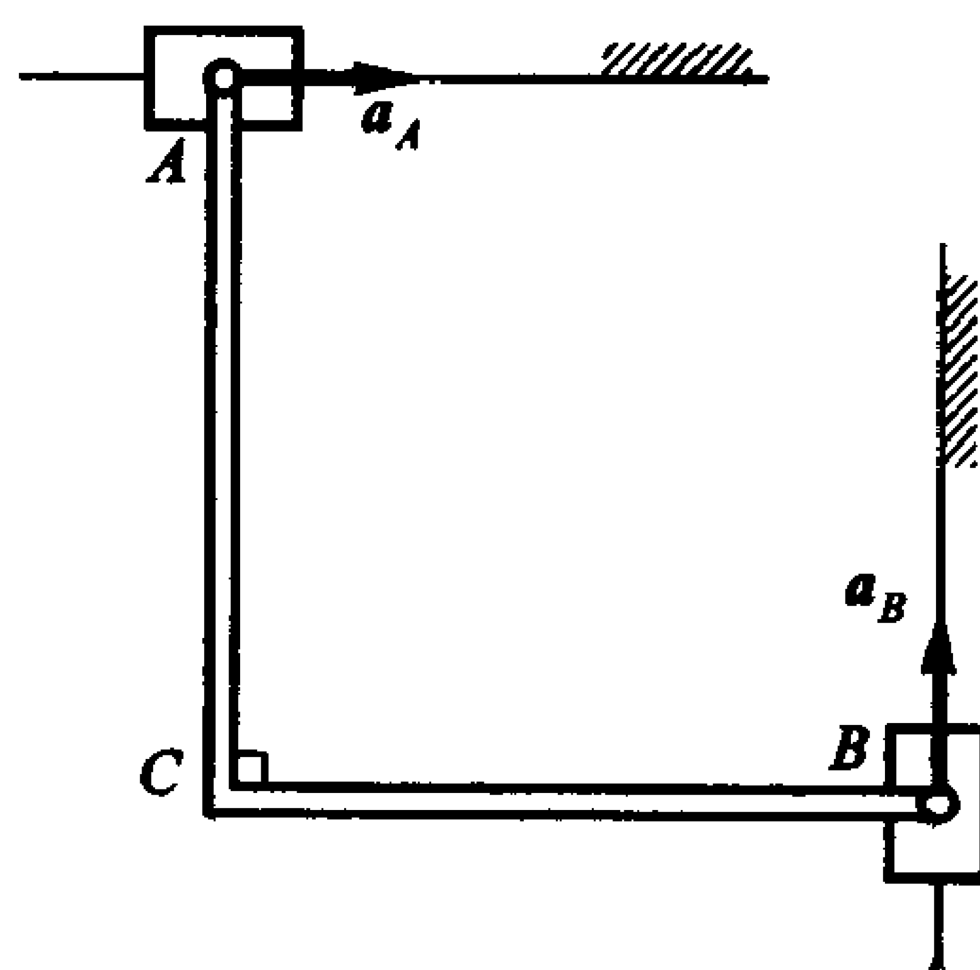
题 9-20 图

9-20 图示塔轮 1 半径为 $r=0.1$ m 和 $R=0.2$ m，绕轴 O 转动的规律是 $\varphi=t^2-3t$ rad，并通过不可伸长的绳子卷动动滑轮 2，滑轮 2 的半径为 $r_2=0.15$ m。设绳子与各轮之间无相对滑动，求 $t=1$ s 时，轮 2 的角速度和角加速度；并求该瞬时水平直径上 C，D，E 各点的速度和加速度。

9-21 为加快电缆释放速度，装有电缆卷轴的拖车以加速度 0.9 m/s² 从静止开始运动。与此同时，另一卡车以加速度 0.6 m/s² 水平地拉着电缆自由端向相反方向运动，如图所示。求当运动刚开始时以及运动开始后 1 s 时，卷轴水平直径上点 A 的全加速度。



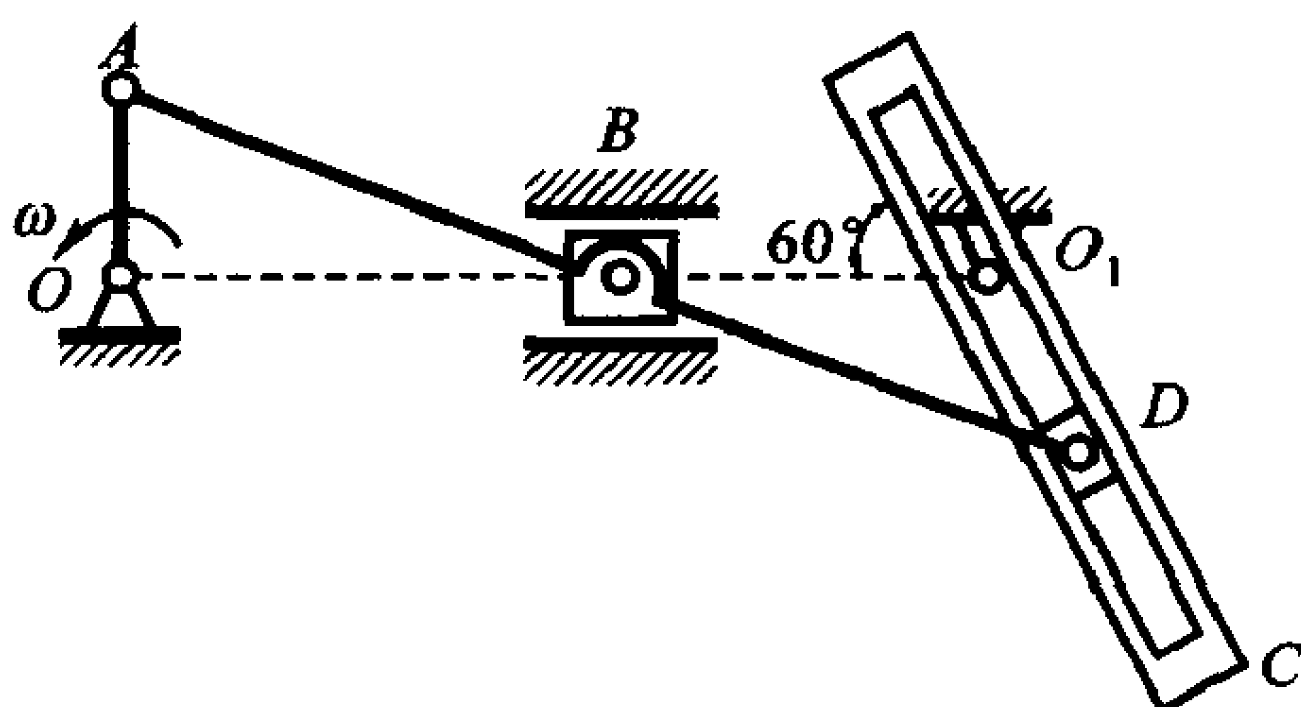
题 9-21 图



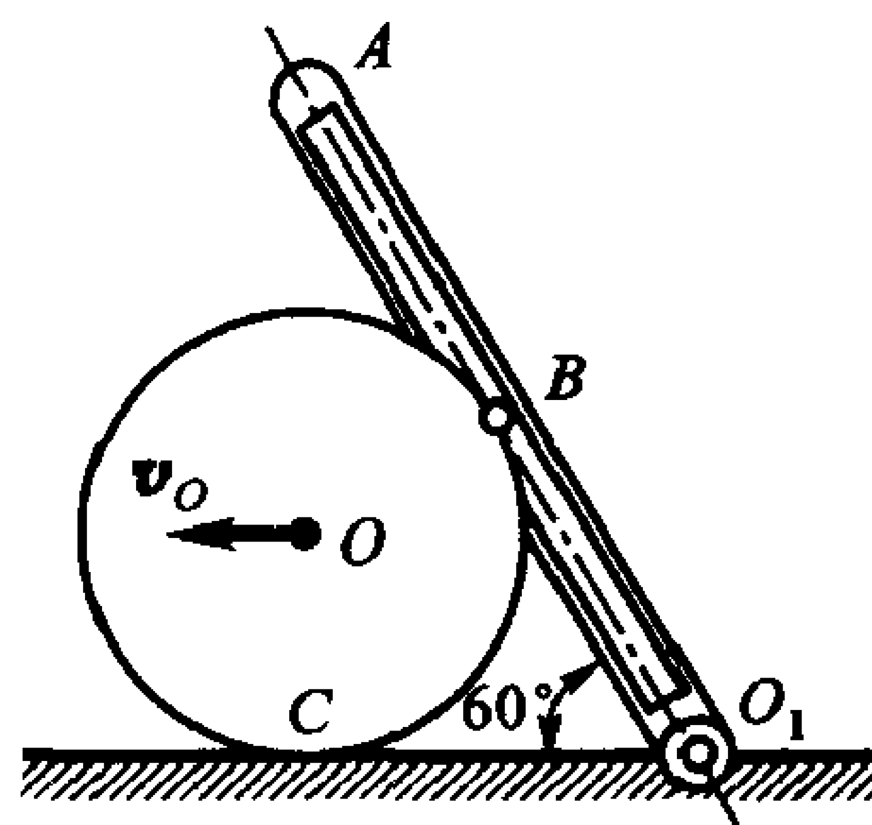
题 9-22 图

9-22 图示直角刚性杆，$AC=CB=0.5$ m。设在图示瞬时，两端滑块沿水平与铅垂轴的加速度如图，大小分别为 $a_A=1$ m/s²，$a_B=3$ m/s²。求这时直角杆的角速度和角加速度。

***9-23** 图示曲柄连杆机构带动摇杆 O_1C 绕 O_1 轴摆动。在连杆 AB 上装有两个滑块，滑块 B 在水平槽内滑动，而滑块 D 则在摇杆 O_1C 的槽内滑动。已知：曲柄长 $OA=50$ mm，绕 O 轴转动的匀角速度 $\omega=10$ rad/s。在图示位置时，曲柄与水平线间成 90°角，$\angle OAB=60°$，摇杆与水平线间成 60°角，距离 $O_1D=70$ mm。求摇杆的角速度和角加速度。



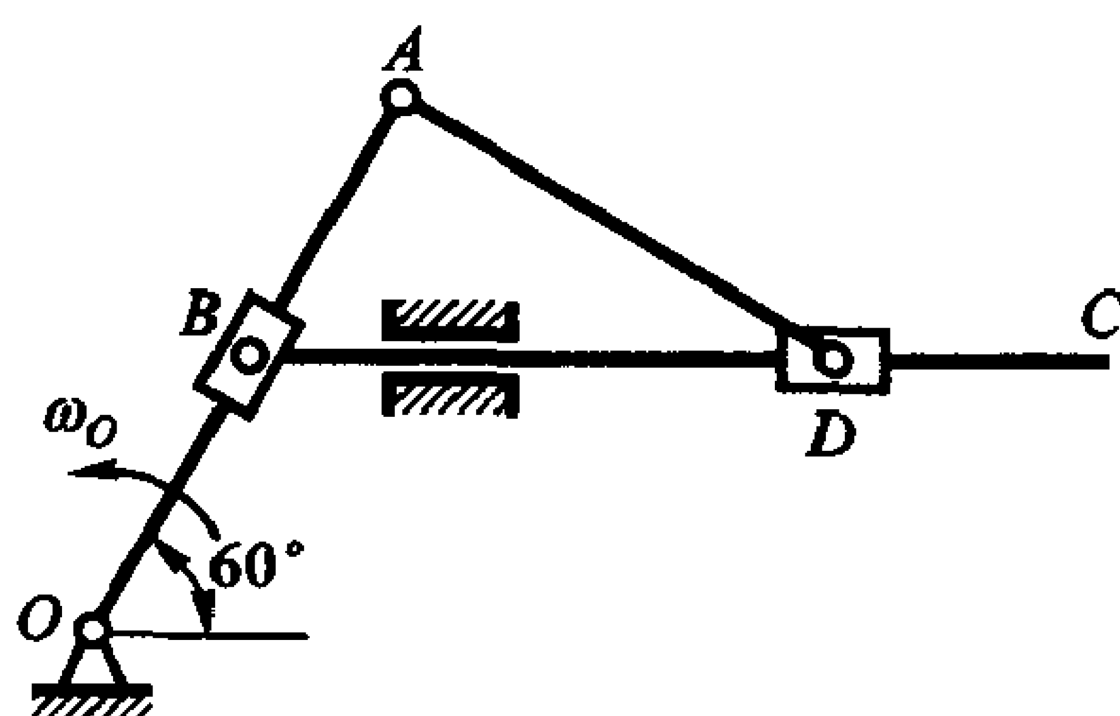
题 9－23 图



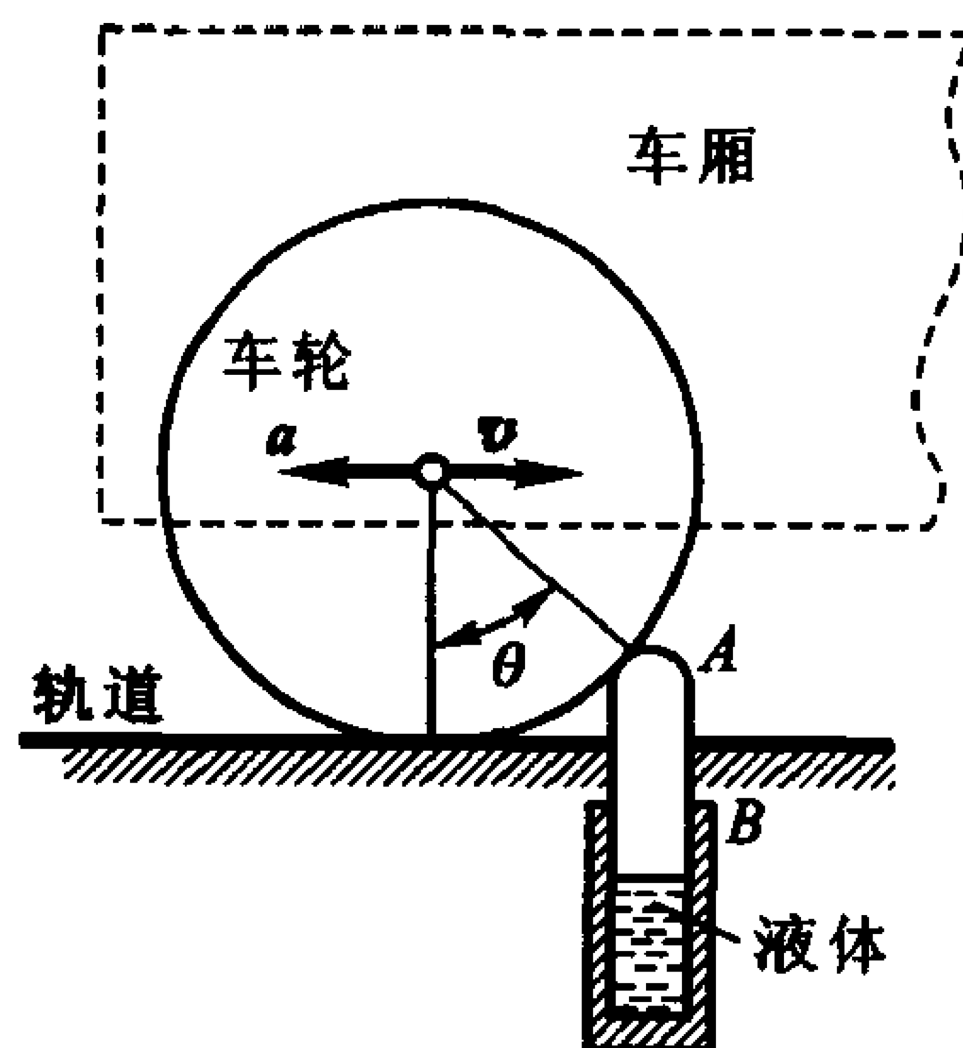
题 9－24 图

9－24 如图所示，轮 O 在水平面上滚动而不滑动，轮心以匀速 $v_O=0.2$ m/s运动。轮缘上固连销钉 B，此销钉在摇杆 O_1A 的槽内滑动，并带动摇杆绕 O_1 轴转动。已知：轮的半径 $R=0.5$ m，在图示位置时，AO_1 是轮的切线，摇杆与水平面间的交角为 60°。求摇杆在该瞬时的角速度和角加速度。

9－25 平面机构的曲柄 OA 长为 $2l$，以匀角速度 ω_O 绕 O 轴转动。在图示位置时，$AB=BO$，并且$\angle OAD=90°$。求此时套筒 D 相对于杆 BC 的速度和加速度。



题 9－25 图



题 9－26 图

***9－26** 为使货车车厢减速，在轨道上装有液压减速顶，如图所示。半径为 R 的车轮滚过时将压下减速顶的顶帽 AB 而消耗能量，降低速度。如轮心的速度为 $\boldsymbol{v}$，加速度为 $\boldsymbol{a}$，试求 AB 下降速度、加速度和减速顶对于轮子的相对滑动速度与角 θ 的关系（设轮与轨道之间无相对滑动）。

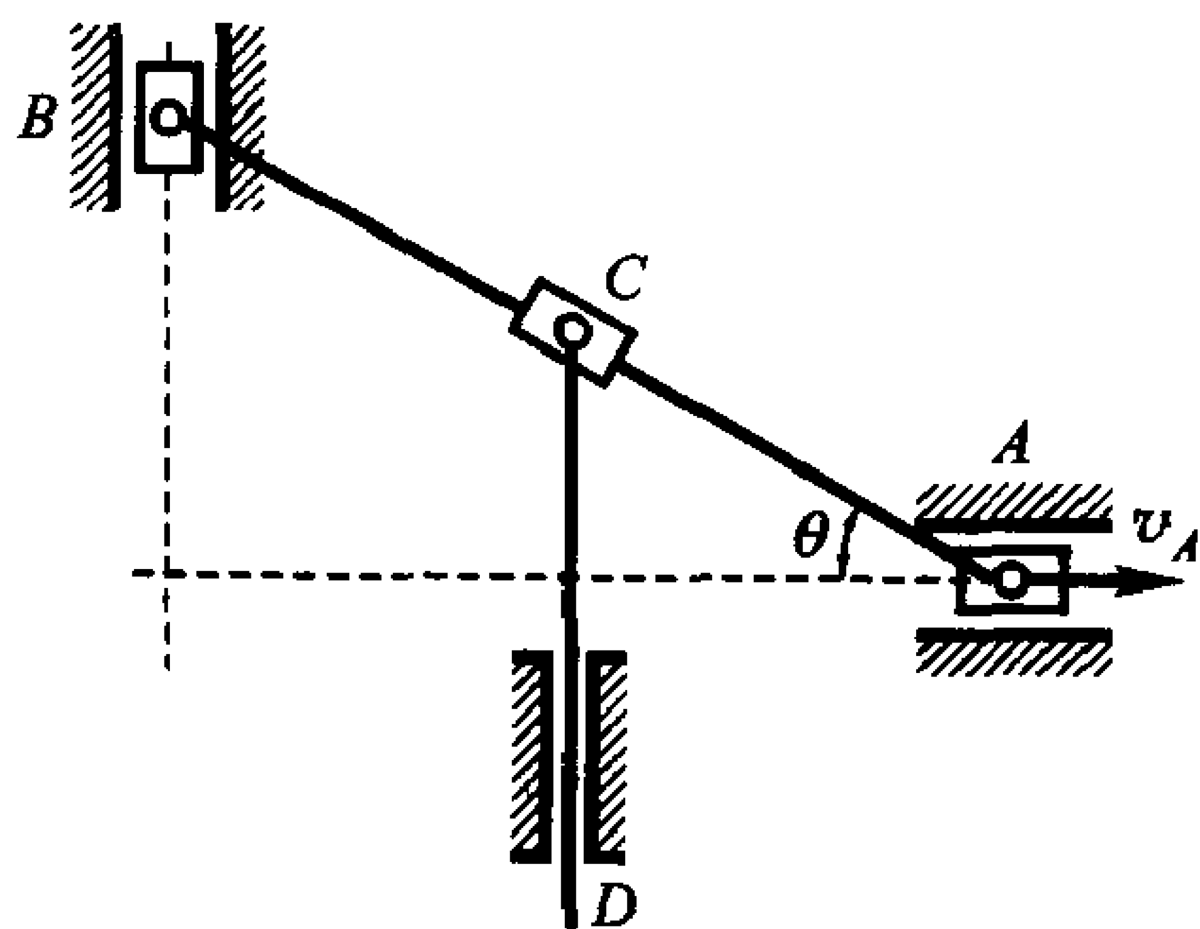
***9－27** 已知图示机构中滑块 A 的速度为常值，$v_A=0.2$ m/s，$AB=0.4$ m。求当 $AC=CB$，$\theta=30°$时杆 CD 的速度和加速度。

9－28 轻型杠杆式推钢机，曲柄 OA 借连杆 AB 带动摇杆 O_1B 绕 O_1 轴摆动，杆 EC 以铰链与滑块 C 相连，滑块 C 可沿杆 O_1B 滑动；摇杆摆动时带动杆 EC 推动钢材，如图所示。已知 $OA=r$，$AB=\sqrt{3}r$，$O_1B=\frac{2}{3}l$（$r=0.2$ m，$l=1$ m），$\omega_{OA}=\frac{1}{2}$ rad/s，$\alpha_{OA}=0$。在图示位

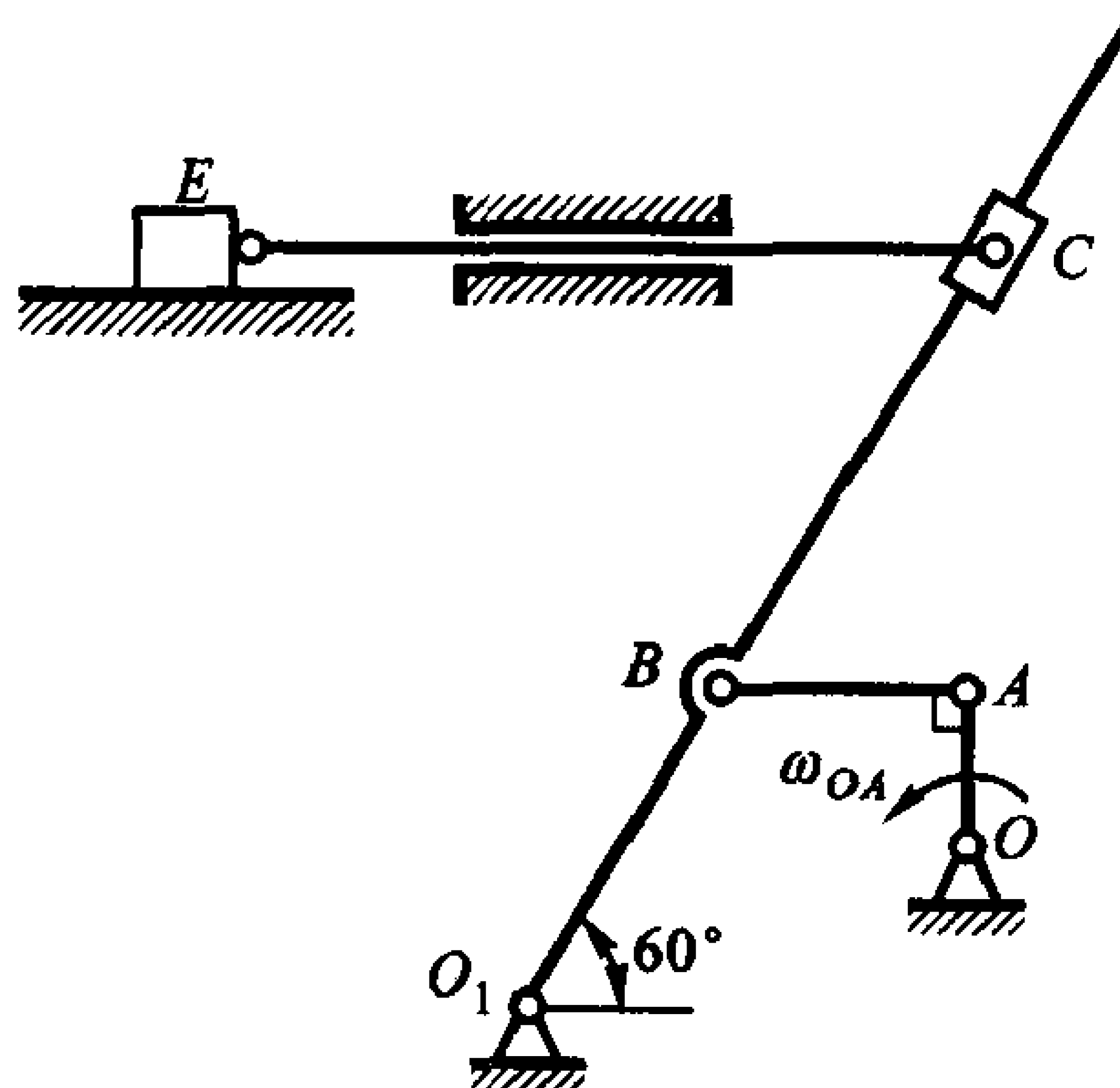
置时，$BC=\frac{4}{3}l$。求：

(1) 滑块 C 的绝对速度和相对于摇杆 O_1B 的速度；

(2) 滑块 C 的绝对加速度和相对于摇杆 O_1B 的加速度。

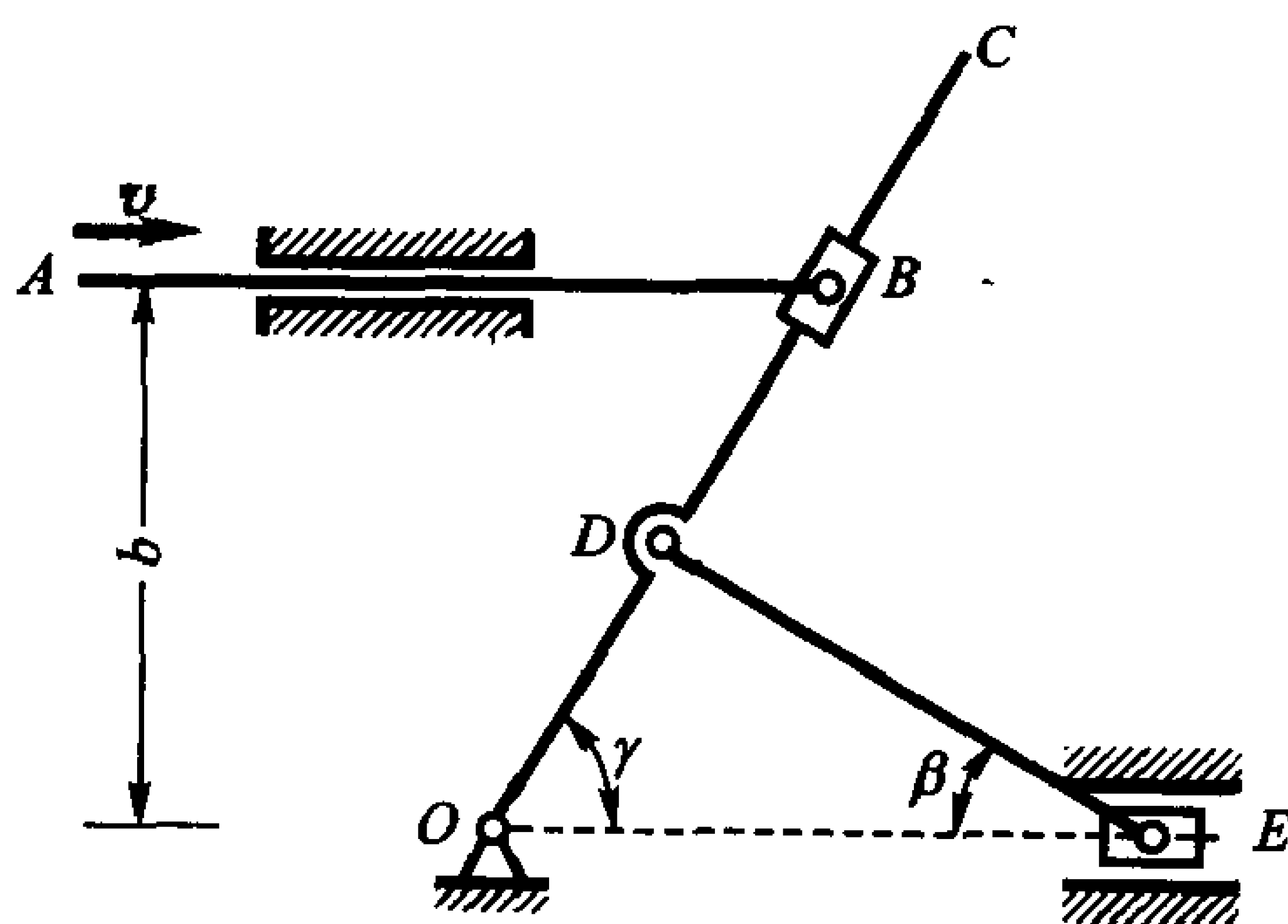


题 9－27 图



题 9－28 图

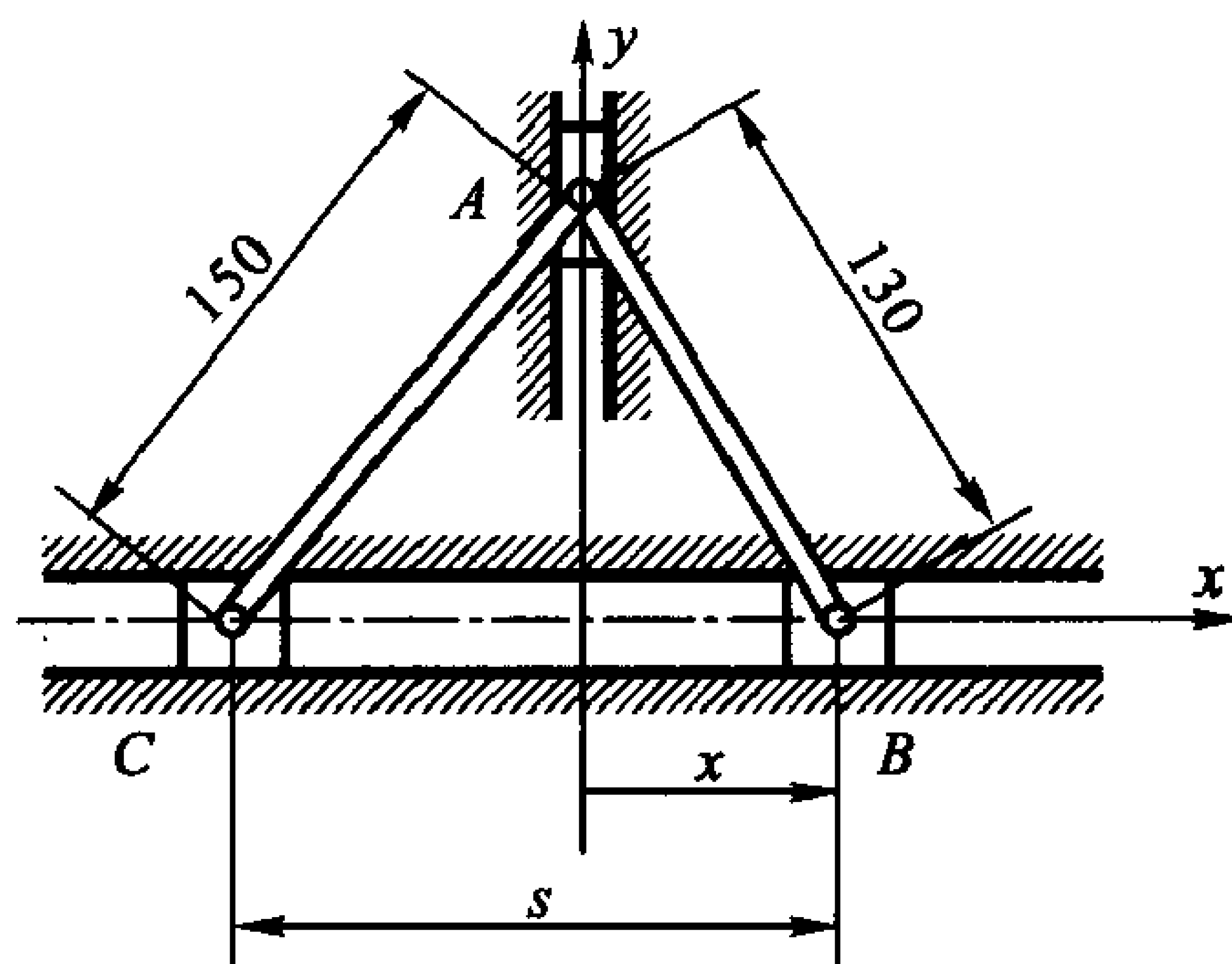
9－29 图示平面机构中，杆 AB 以不变的速度 $\boldsymbol{v}$ 沿水平方向运动，套筒 B 与杆 AB 的端点铰接，并套在绕 O 轴转动的杆 OC 上，可沿该杆滑动。已知 AB 和 OE 两平行线间的垂直距离为 b。求在图示位置（$\gamma=60°$，$\beta=30°$，$OD=BD$）时，杆 OC 的角速度和角加速度、滑块 E 的速度和加速度。



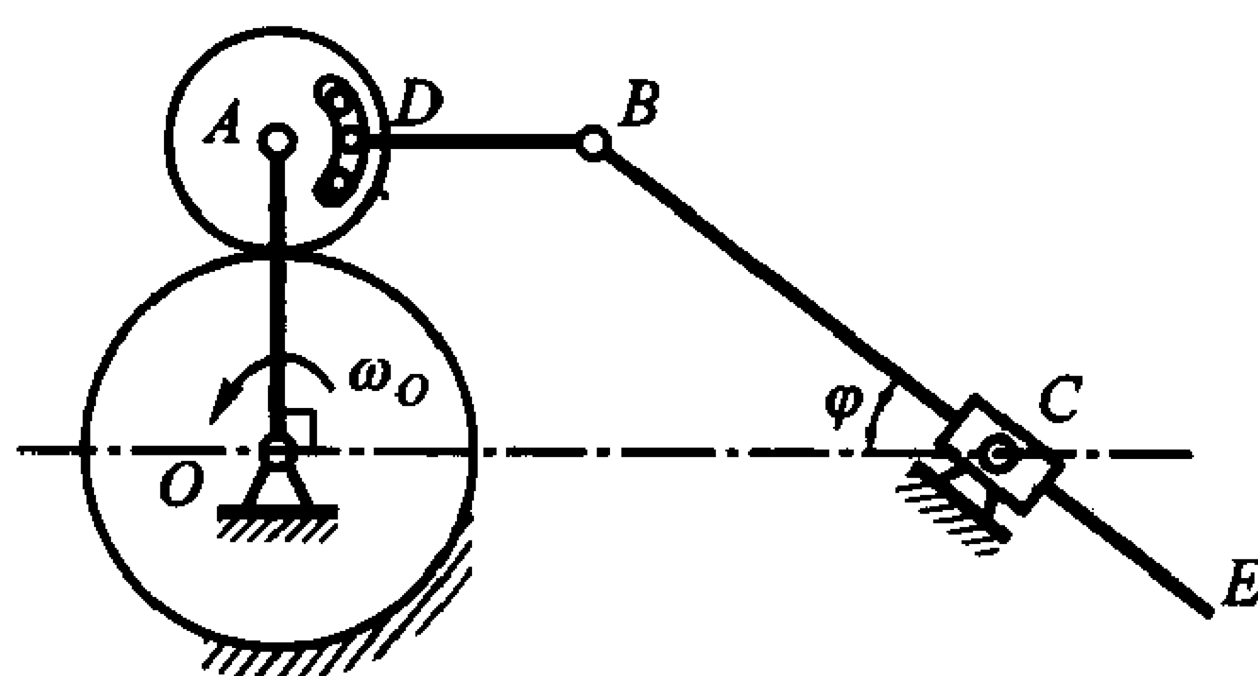
题 9－29 图

9－30 图中滑块 A，B，C 以连杆 AB、AC 相铰接。滑块 B，C 在水平槽中相对运动的速度恒为 $\dot{s}=1.6\ \text{m/s}$。求当 $x=50\ \text{mm}$ 时滑块 B 的速度和加速度。

***9－31** 图示行星齿轮传动机构中，曲柄 OA 以匀角速度 ω_O 绕 O 轴转动，使与齿轮 A 固结在一起的杆 BD 运动。杆 BE 与 BD 在点 B 铰接，并且杆 BE 在运动时始终通过固定铰支的套筒 C。如定齿轮的半径为 $2r$，动齿轮半径为 r，且 $AB=\sqrt{5}r$。图示瞬时，曲柄 OA 在铅直位置，BDA 在水平位置，杆 BE 与水平线间成角 $\varphi=45°$。求此时杆 BE 上与 C 相重合一点的速度和加速度。

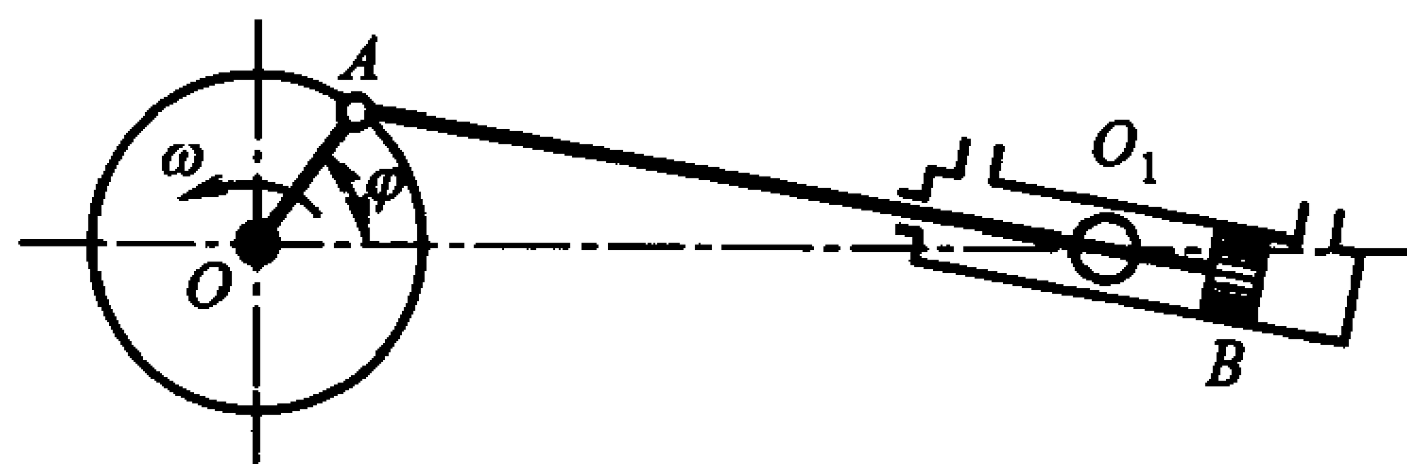


题 9－30 图



题 9－31 图

*9－32　在图示摆动汽缸式蒸汽机中，曲柄 $OA=0.12$ m，绕 O 轴匀速转动，其角速度为 $\omega=5$ rad/s。汽缸绕 O_1 轴摆动，连杆 AB 端部的活塞 B 在汽缸内滑动。已知：距离 $OO_1=0.6$ m，连杆 $AB=0.6$ m。求当曲柄在 $\varphi=0°,45°,90°$三个位置时活塞的速度。

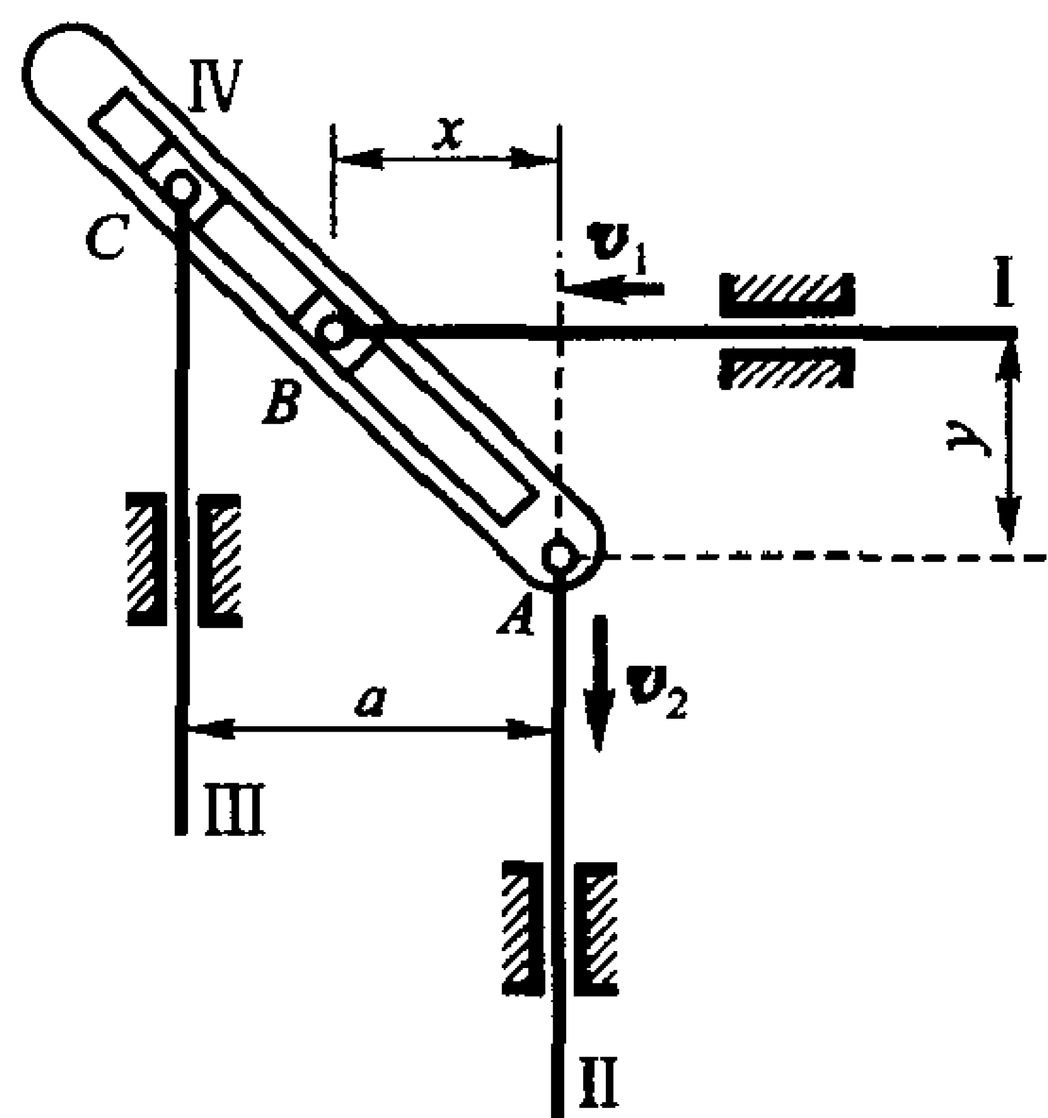


题 9　32 图

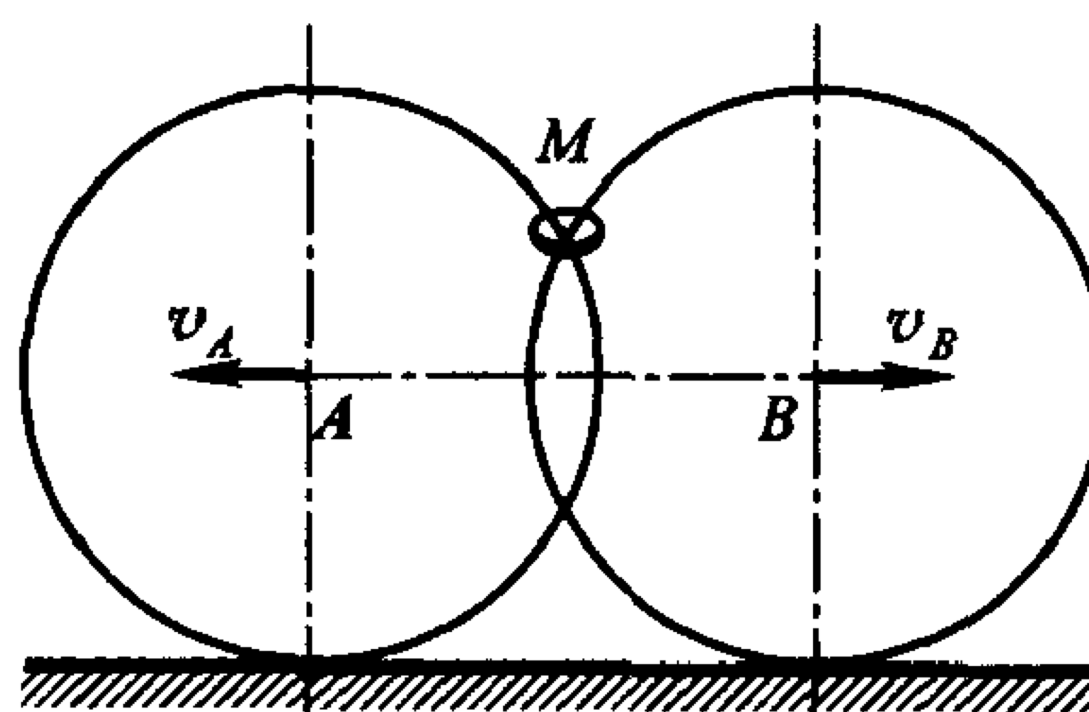
*9－33　图示放大机构中，杆Ⅰ和Ⅱ分别以速度 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 沿箭头方向运动，其位移分别以 x 和 y 表示。如杆Ⅱ与杆Ⅲ平行，其间距离为 a，求杆Ⅲ的速度和滑道Ⅳ的角速度。

*9－34　半径 $R=0.2$ m 的两个相同的大圆环沿地面向相反方向无滑动地滚动，环心的速度为常数；$v_A=0.1$ m/s，$v_B=0.4$ m/s 。当$\angle MAB=30°$时，求套在这两个大圆环上的小圆环 M 相对于每个大圆环的速度和加速度，以及小圆环 M 的绝对速度和绝对加速度。

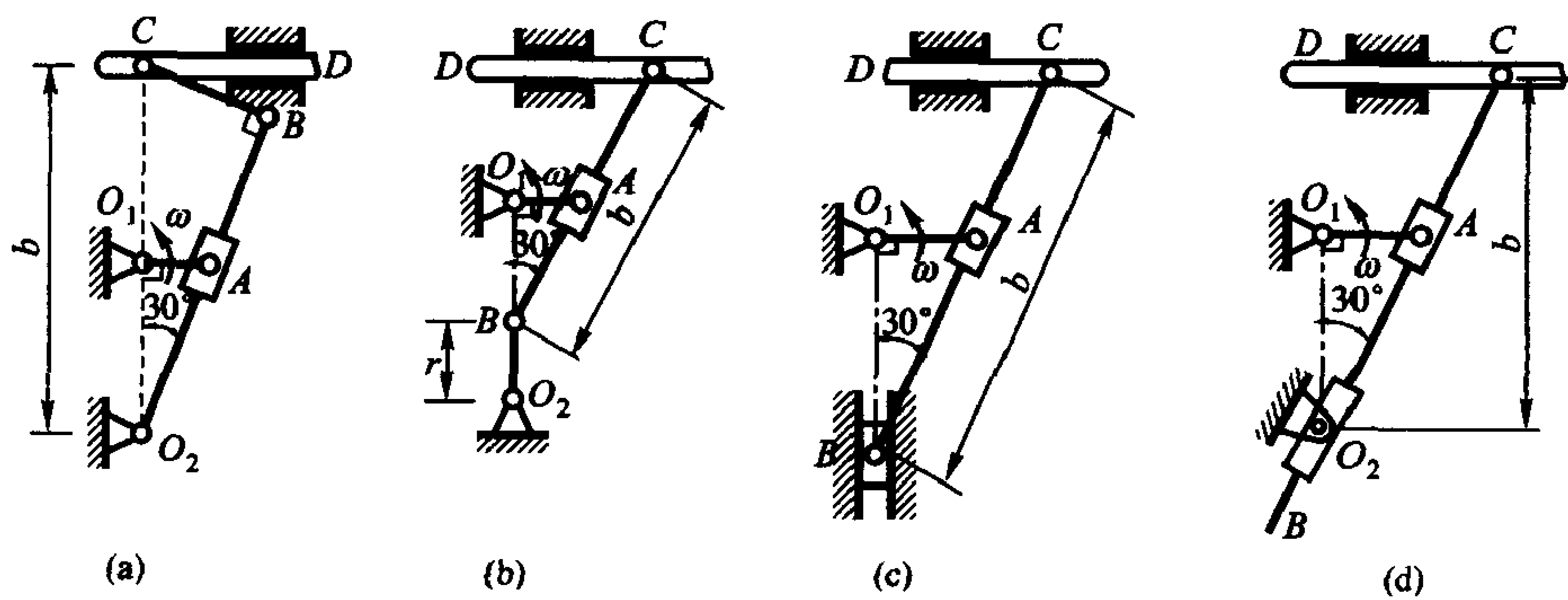
*9－35　图示四种刨床机构，已知曲柄 $O_1A=r$，以匀角速度 ω 转动，$b=4r$。求在图示位置时，滑枕 CD 平移的速度。



题 9 - 33 图



题 9 - 34 图



题 9 - 35 图

*9 - 36 求上题各图中滑枕 CD 平移的加速度。

动 力 学

引 言

动力学研究物体的机械运动与作用力之间的关系。

在静力学中，我们分析了作用于物体的力，并研究了物体在力系作用下的平衡问题。在运动学中，我们仅从几何方面分析了物体的运动，而不涉及作用力。动力学则对物体的机械运动进行全面的分析，研究作用于物体的力与物体运动之间的关系，建立物体机械运动的普遍规律。

动力学的形成和发展是与生产的发展密切联系的。特别是在现代工业和科学技术迅速发展的今天，对动力学提出了更加复杂的课题，例如高速运转机械的动力计算、高层结构受风载及地震的影响、宇宙飞行及火箭推进技术，以及机器人的动态特性等，都需要应用动力学的理论。

动力学中物体的抽象模型有质点和质点系。**质点**是具有一定质量而几何形状和尺寸大小可以忽略不计的物体。例如，在研究人造地球卫星的轨道时，卫星的形状和大小对所研究的问题没有什么影响，可将卫星抽象为一个质量集中在质心的质点。刚体作平移时，因刚体内各点的运动情况完全相同，也可以不考虑这个刚体的形状和大小，而将它抽象为一个质点来研究。

如果物体的形状和大小在所研究的问题中不可忽略，则物体应抽象为质点系。所谓**质点系**是由几个或无限个相互有联系的质点所组成的系统。我们常见的固体、流体、由几个物体组成的机构，以及太阳系等等都是质点系。刚体是质点系的一种特殊情形，其中任意两个质点间的距离保持不变，也称为不变的质点系。

动力学可分为质点动力学和质点系动力学，而前者是后者的基础。

第十章　质点动力学的基本方程

质点是物体最简单、最基本的模型，是构成复杂物体系统的基础。质点动力学基本方程给出了质点受力与其运动变化之间的联系。

本章根据动力学基本定律得出质点动力学的基本方程，运用微积分方法，求解一个质点的动力学问题。

§10-1　动力学的基本定律

质点动力学的基础是三个基本定律，这些定律是牛顿（公元 1642 年～1727 年）在总结前人、特别是伽利略研究成果的基础上提出来的，称为**牛顿三定律**。

第一定律（惯性定律）

不受力作用的质点，将保持静止或作匀速直线运动。不受力作用的质点（包括受平衡力系作用的质点），不是处于静止状态，就是保持其原有的速度（包括大小和方向）不变，这种性质称为**惯性**。

第二定律（力与加速度之间的关系的定律）

第二定律可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F} \tag{10-1}$$

上式中 m 为质点的质量，$\boldsymbol{v}$ 为质点的速度，而 $\boldsymbol{F}$ 为质点所受的力。在经典力学范围内，质点的质量是守恒的，上式可写为

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F} \tag{10-2}$$

即：质点的质量与加速度的乘积，等于作用于质点的力的大小，加速度的方向与力的方向相同。

式(10-2)是第二定律的数学表达式，它是质点动力学的基本方程，建立了质点的加速度、质量与作用力之间的定量关系。当质点上受到多个力作用时，式(10-2)中的 $\boldsymbol{F}$ 应为此汇交力系的合力。

式(10-2)表明，质点的质量越大，其运动状态越不容易改变，也就是质点的惯性越大。因此，**质量**是质点惯性的度量。

在地球表面，任何物体都受到重力 $\boldsymbol{P}$ 的作用。在重力作用下得到的加速度称为**重力加速度**，用 $\boldsymbol{g}$ 表示。根据第二定律有

$$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g}\quad 或\quad m=\frac{P}{g}$$

根据国际计量委员会规定的标准，重力加速度的数值为9.806 65 m/s²，一般取 9.80 m/s²。实际上在不同的地区，g 的数值有些微小的差别。

在国际单位制(SI)中，长度、质量和时间的单位是基本单位，分别取为 m(米)、kg(千克)和 s(秒)；力的单位是导出单位。质量为 1 kg 的质点，获得 1 m/s² 的加速度时，作用于该质点的力为 1 N(单位名称：牛[顿])，即

$$1\ \mathrm{N}=1\ \mathrm{kg}\times 1\ \mathrm{m/s^2}$$

在精密仪器工业中，也用厘米克秒制(CGS)。在厘米克秒制中，长度、质量和时间是基本单位，分别取为 cm(厘米)、g(克)和 s(秒)；力是导出单位。1 g 质量的质点，获得的加速度为 1 cm/s² 时，作用于质点的力为 1 dyn(达因)，即

$$1\ \mathrm{dyn}=1\ \mathrm{g}\times 1\ \mathrm{cm/s^2}$$

牛顿和达因的换算关系为

$$1\ \mathrm{N}=10^5\ \mathrm{dyn}$$

第三定律(作用与反作用定律)

两个物体间的作用力与反作用力总是大小相等，方向相反，沿着同一直线，且同时分别作用在这两个物体上。这一定律就是静力学的公理四，它不仅适用于平衡的物体，而且也适用于任何运动的物体。

质点动力学的三个基本定律是在观察天体运动和生产实践中的一般机械运动的基础上总结出来的，因此只在一定范围内适用。三个定律适用的参考系称为**惯性参考系**。在一般的工程问题中，把固定于地面的坐标系或相对于地面作匀速直线平移的坐标系作为惯性参考系，可以得到相当精确的结果。在研究人造卫星的轨道、洲际导弹的弹道等问题时，地球自转的影响不可忽略，则应选取以地心为原点，三轴指向三个恒星的坐标系作为惯性参考系。在研究天体的运动时，地心运动的影响也不可忽略，又需取太阳为中心，三轴指向三个恒星的坐标系作为惯性参考系。在本书中，如无特别说明，我们均取固定在地球表面的坐标系为惯性参考系。

以牛顿三定律为基础的力学，称为古典力学(又称经典力学)。在古典力学范畴内，认为质量是不变的量，空间和时间是"绝对的"，与物体的运动无关。近代物理已经证明，质量、时间和空间都与物体运动的速度有关，但当物体的运动速度远小于光速时，物体的运动对于质量、时间和空间的影响是微不足道的，对于一般工程中的机械运动问题，应用古典力学都可得到足够精确的结果。

§ 10 - 2　质点的运动微分方程

质点受到 n 个力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 作用时，由质点动力学第二定律，有

$$ma = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \qquad (10-3)$$

或

$$m\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \qquad (10-3)'$$

式(10－3)′是矢量形式的微分方程，在计算实际问题时，需应用它的投影形式。

1．质点运动微分方程在直角坐标轴上投影

设矢径 $\boldsymbol{r}$ 在直角坐标轴上的投影分别为 x, y, z，力 $\boldsymbol{F}_i$ 在轴上的投影分别为 F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}，则式(10－3)′在直角坐标轴上的投影形式为

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{n} F_{xi},\ m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{n} F_{yi},\ m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{n} F_{zi} \qquad (10-4)$$

2．质点运动微分方程在自然轴上投影

由点的运动学知，点的全加速度 $\boldsymbol{a}$ 在切线与主法线构成的密切面内，点的加速度在副法线上的投影等于零，即

$$\boldsymbol{a} = a_\tau \boldsymbol{\tau} + a_n \boldsymbol{n}, \qquad a_b = 0$$

式中 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 为沿轨迹切线和主法线的单位矢量，如图 10－1 所示。式(10－3)在自然轴系上的投影式为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} F_{ti},\ m\frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} F_{ni},\ 0 = \sum_{i=1}^{n} F_{bi} \qquad (10-5)$$

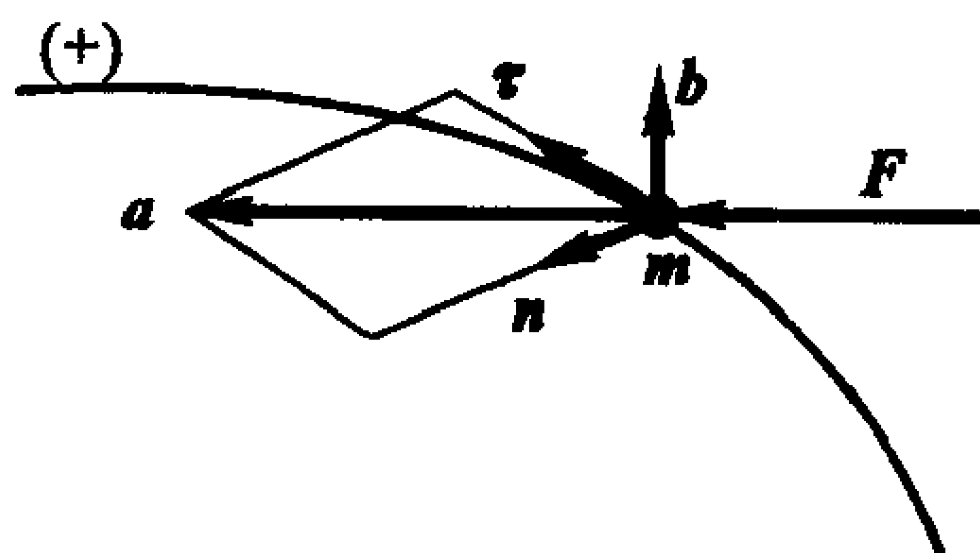


图 10－1

式中 F_{ti}，F_{ni} 和 F_{bi} 分别是作用于质点的各力在切线、主法线和副法线上的投影，而 ρ 为轨迹的曲率半径。

式(10－4)和(10－5)是两种常用的质点运动微分方程。

式(10－3)为一矢量等式，可向任一轴投影，得到相应的投影形式，如向极坐标系的径向投影或周向投影等。

3．质点动力学的两类基本问题

质点动力学的问题可分为两类：一是已知质点的运动，求作用于质点的力；二是已知作用于质点的力，求质点的运动。称为质点动力学的两类基本问题。第一类基本问题比较简单，例如已知质点的运动方程，只需求两次导数得到质点的加速度，代入质点的运动微分方程中，即可求解。第二类基本问题，从数学的角度看，是解微分方程或求积分的问题，对此，需按作用力的函数规律进行积分，并根据具体问题的运动条件确定积分常数。

例 10－1　曲柄连杆机构如图 10－2a 所示。曲柄 OA 以匀角速度 ω 转动，$OA=r$，$AB=l$，当 $\lambda=r/l$ 比较小时，以 O 为坐标原点，滑块 B 的运动方程可近似写为

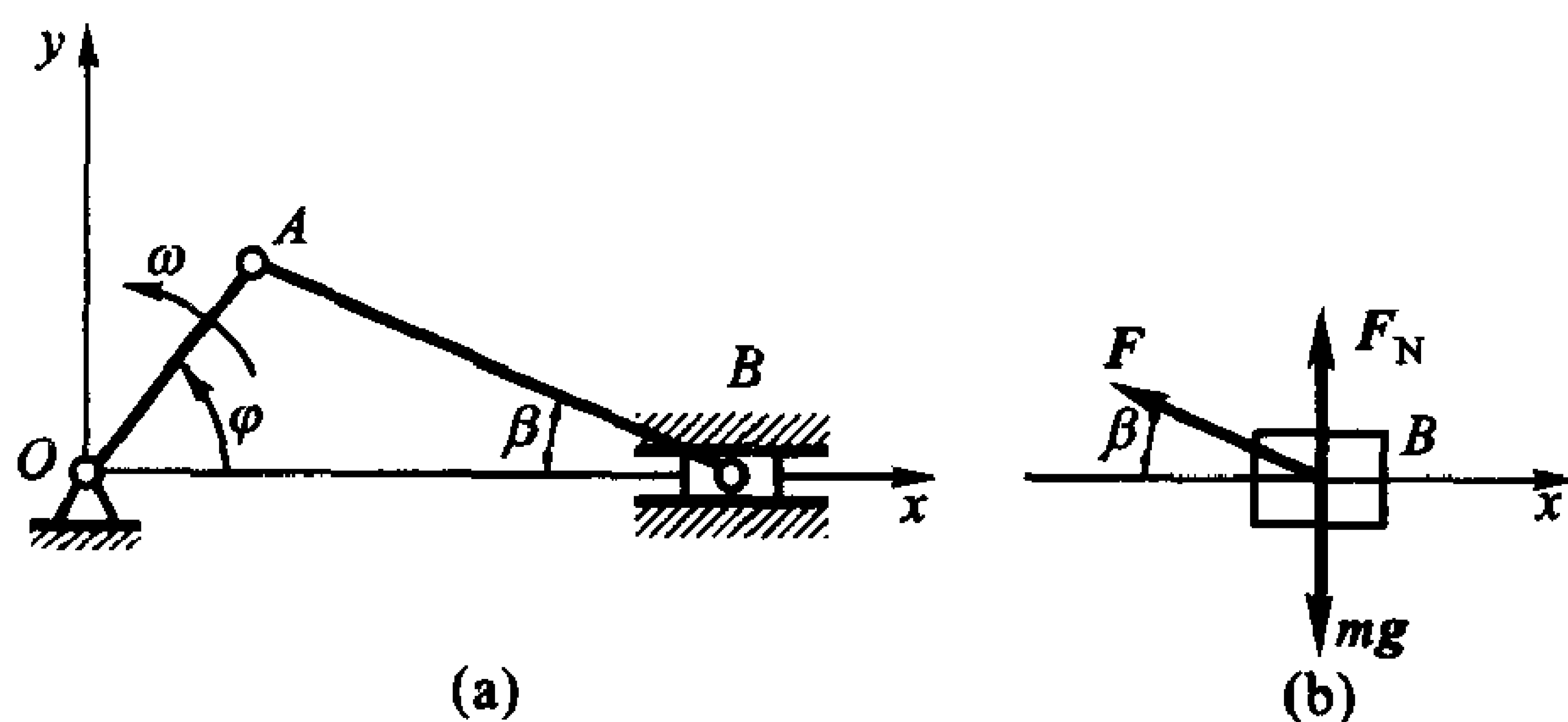


图 10－2

$$x=l\left(1-\frac{\lambda^2}{4}\right)+r\left(\cos\omega t+\frac{\lambda}{4}\cos 2\omega t\right)$$

如滑块的质量为 m，忽略摩擦及连杆 AB 的质量，试求当 $\varphi=\omega t=0$ 和$\frac{\pi}{2}$时，连杆 AB 所受的力。

解：　以滑块 B 为研究对象，当 $\varphi=\omega t$ 时，受力如图 10－2b。由于不计连杆质量，连杆应受平衡力系作用，AB 为二力杆，它对滑块 B 的力 $\boldsymbol{F}$ 沿 AB 方向。写出滑块沿 x 轴的运动微分方程

$$ma_x=-F\cos\beta$$

由题设的运动方程，可以求得

$$a_x=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-r\omega^2(\cos\omega t+\lambda\cos 2\omega t)$$

$\omega t=0$ 时，$a_x=-r\omega^2(1+\lambda)$，且 $\beta=0$，得

$$F=mr\omega^2(1+\lambda)$$

AB 杆受拉力。

$\omega t=\frac{\pi}{2}$时，$a_x=r\omega^2\lambda$，而 $\cos\beta=\sqrt{l^2-r^2}/l$，则有

$$mr\omega^2\lambda=-F\sqrt{l^2-r^2}/l$$

得

$$F=-mr^2\omega^2/\sqrt{l^2-r^2}$$

AB 杆受压力。

上例属于动力学第一类基本问题。

例 10－2　质量为 m 的质点带有电荷 e，以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 进入强度按 $E=A\cos kt$ 变化的均匀电场中，初速度方向与电场强度垂直，如图 10－3 所示。质点在电场中受力 $\boldsymbol{F}=-e\boldsymbol{E}$ 作用。已知常数 A，k，忽略质点的重力，试求质点的运动轨迹。

解：　取质点的初始位置 O 为坐标原点，取 x，y 轴如图 10－3 所示，而 z 轴与 x，y 轴垂直。因为力和初速度在 z 轴上的投影均等于零，质点的轨迹必定在 Oxy 平面内。写出质点

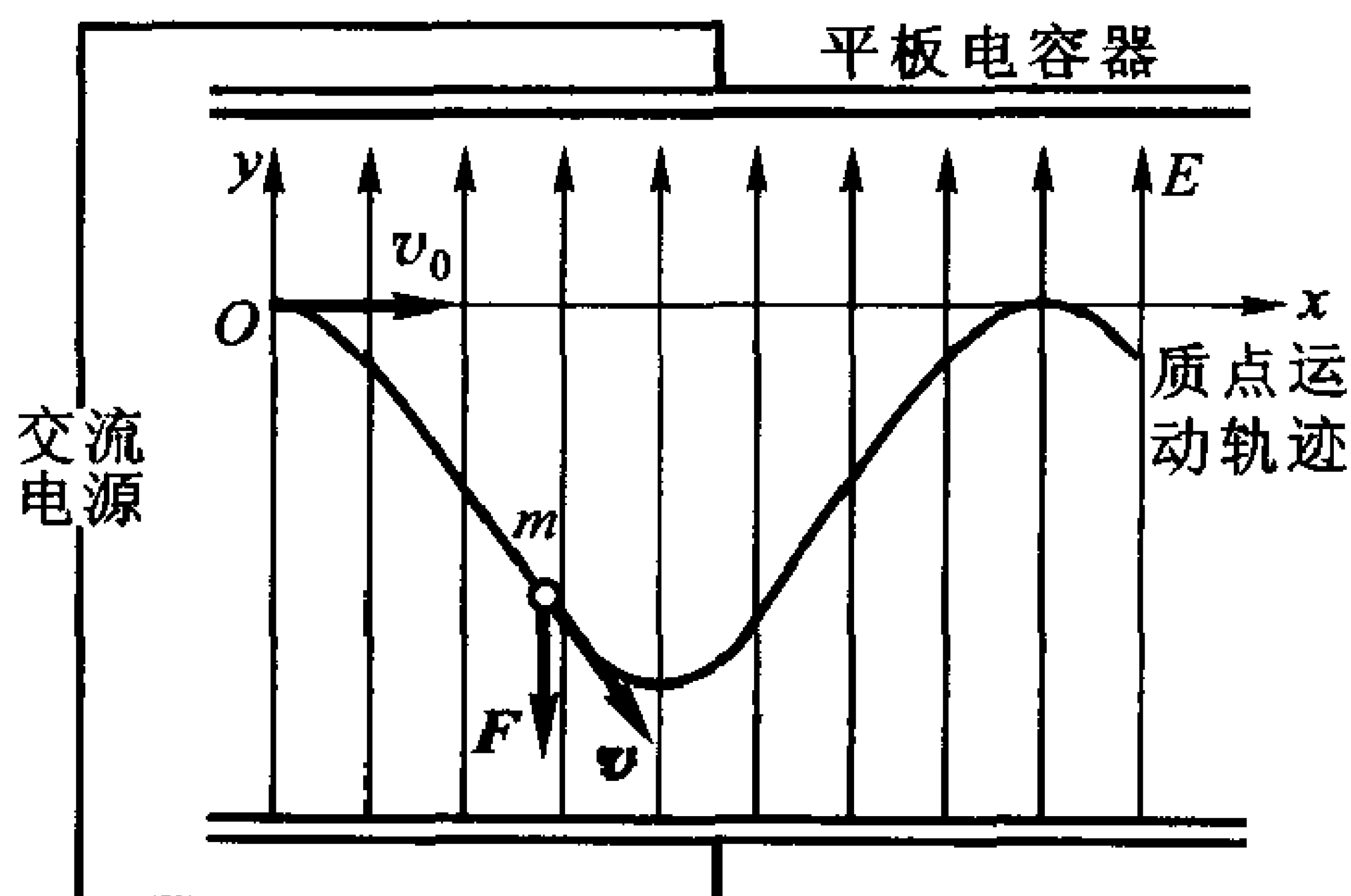


图 10－3

运动微分方程在 x 轴和 y 轴上的投影式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=0, m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-eA\cos kt \tag{a}$$

按题意，$t=0$ 时，$v_x=v_0$，$v_y=0$，以此为下限，式(a)的定积分为

$$\int_{v_0}^{v_x}\mathrm{d}v_x=0, \int_0^{v_y}\mathrm{d}v_y=-\frac{eA}{m}\int_0^t\cos kt\mathrm{d}t$$

解得

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0, v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{eA}{mk}\sin kt \tag{b}$$

以上两式以 $t=0$ 时 $x=y=0$ 为下限，做定积分

$$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t v_0\mathrm{d}t, \int_0^y\mathrm{d}y=-\frac{eA}{mk}\int_0^t\sin kt\mathrm{d}t$$

得质点运动方程

$$x=v_0t, y=\frac{eA}{mk^2}(\cos kt-1) \tag{c}$$

从以上两式中消去时间 t，得轨迹方程

$$y=\frac{eA}{mk^2}\left[\cos\left(\frac{k}{v_0}x\right)-1\right]$$

轨迹为余弦曲线，如图 10－3 所示。

如果质点的初始速度为 $v_0=0$，则此质点的运动方程式(c)应改为 $x=0$，而 y 式不变，这是一个直线运动。可见，在同样的运动微分方程之下，不同的运动初始条件将产生完全不同的运动。

上例为质点动力学的第二类基本问题。求解过程一般需要积分，还要分析题意，合理应用运动**初始条件**确定积分常数，使问题得到确定的解。当质点受力复杂，特别是几个质点相互作用时，质点的运动微分方程难以积分求得解析解。使用计算机，选用适当的计算程序，逐步积分，可求其数值近似解。

有的工程问题既需要求质点的运动规律，又需要求未知的约束力，是第一类

基本问题与第二类基本问题综合在一起的动力学问题，称为混合问题。下面举例说明这类问题求解的方法。

例 10 - 3　一圆锥摆，如图 10 - 4 所示。质量 $m = 0.1$ kg 的小球系于长 $l = 0.3$ m 的绳上，绳的另一端系在固定点 O，并与铅直线成 $\theta = 60°$ 角。如小球在水平面内作匀速圆周运动，求小球的速度 $\boldsymbol{v}$ 与绳的张力 $\boldsymbol{F}$ 的大小。

解：　以小球为研究的质点，作用于质点的力有重力 mg 和绳的拉力 $\boldsymbol{F}$。选取在自然轴上投影的运动微分方程，得

$$m\frac{v^2}{\rho} = F\sin\theta, 0 = F\cos\theta - mg$$

因 $\rho = l\sin\theta$，于是解得

$$F = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{0.1\ \text{kg} \times 9.8\ \text{m/s}^2}{\frac{1}{2}} = 1.96\ \text{N},$$

$$v = \sqrt{\frac{Fl\sin^2\theta}{m}} = \sqrt{\frac{1.96\ \text{N} \times 0.3\ \text{m} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{0.1\ \text{kg}}} = 2.1\ \text{m/s}$$

绳的张力与拉力 $\boldsymbol{F}$ 的大小相等。

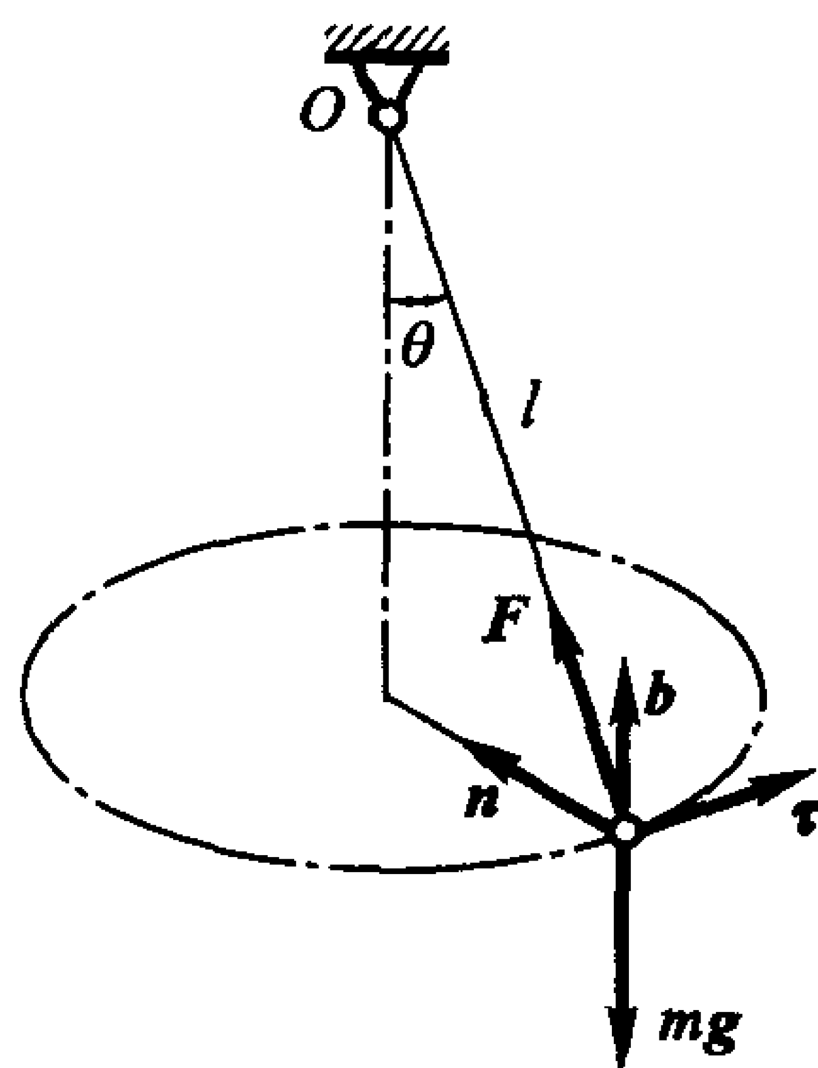


图 10 - 4

此例表明：对某些混合问题，向自然轴系投影，可使动力学两类基本问题分开求解。

例 10 - 4　粉碎机滚筒半径为 R，绕通过中心的水平轴匀速转动，筒内铁球由筒壁上的凸棱带着上升。为了使铁球获得粉碎矿石的能量，铁球应在 $\theta = \theta_0$ 时（如图 10 - 5）才掉下来。求滚筒每分钟的转数 n。

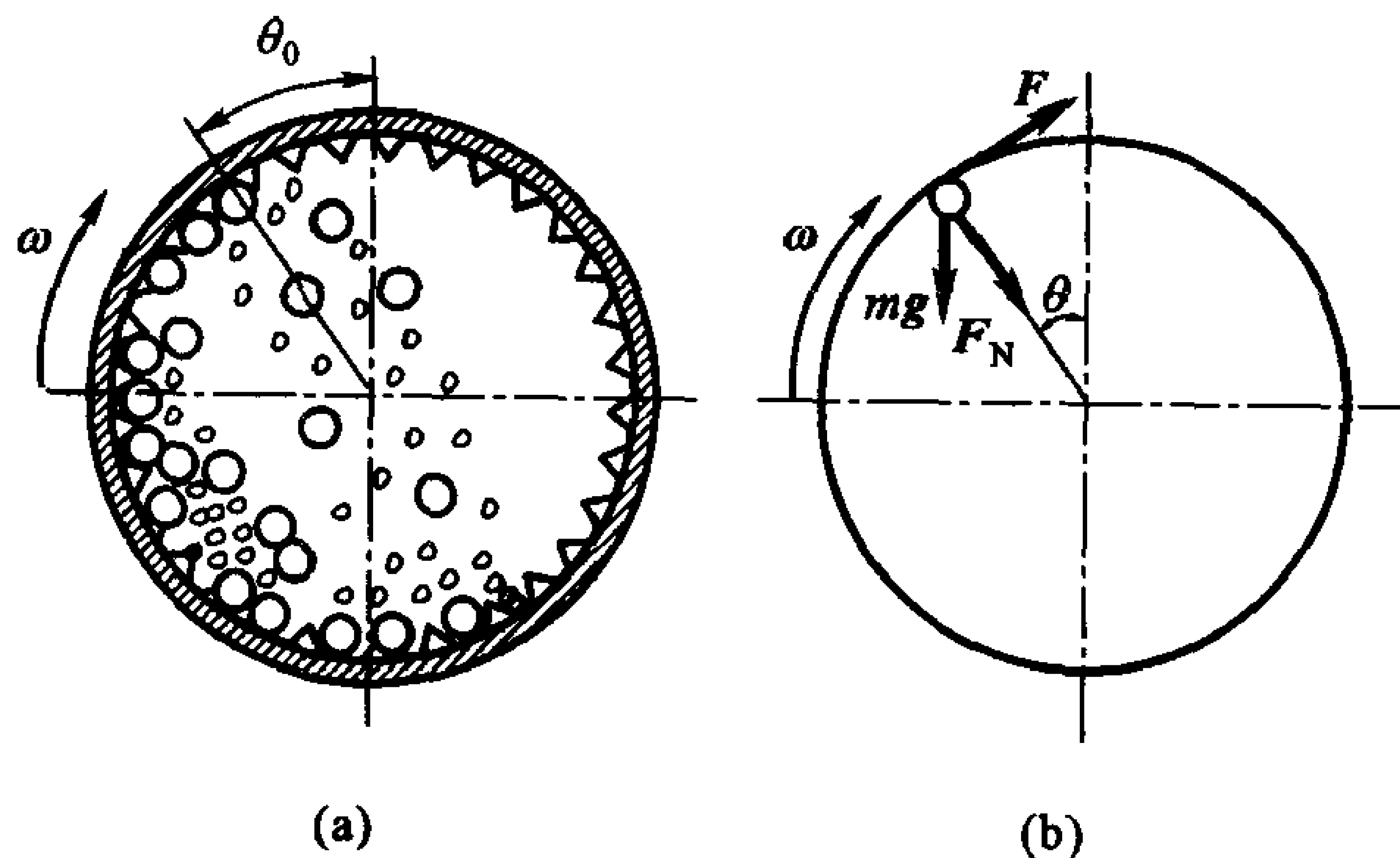


图 10 - 5

解：　视铁球为质点。质点在上升过程中，受到重力 mg 和筒壁的法向约束力 $\boldsymbol{F}_N$，切向约束力 $\boldsymbol{F}$ 的作用。

列出质点运动微分方程在主法线上的投影式

$$m\frac{v^2}{R} = F_N + mg\cos\theta$$

质点在未离开筒壁前的速度等于筒壁的速度，即

$$v=\frac{\pi n}{30}R$$

于是解得

$$n=\frac{30}{\pi R}\left[\frac{R}{m}(F_N+mg\cos\theta)\right]^{\frac{1}{2}}$$

当 $\theta=\theta_0$ 时，铁球将落下，这时 $F_N=0$，于是得

$$n=9.549\sqrt{\frac{g}{R}\cos\theta_0}$$

显然，θ_0 越小，要求 n 越大。当 $n=9.549\sqrt{\frac{g}{R}}$ 时，$\theta_0=0$，铁球就会紧贴筒壁转过最高点而不脱离筒壁落下，起不到粉碎矿石的作用。

小　　结

1. 牛顿三定律适用于惯性参考系。

质点具有惯性，以其质量度量；

作用于质点的力与其加速度成比例；

作用力与反作用力等值、反向、共线，分别作用于两物体上。

2. 质点动力学的基本方程为 $m\boldsymbol{a}=\sum\boldsymbol{F}$，应用时取投影形式。

3. 质点动力学可分为两类基本问题：

(1) 已知质点的运动，求作用于质点的力；

(2) 已知作用于质点的力，求质点的运动。

求解第一类问题，需先求得质点的加速度；求解第二类问题，一般是积分的过程。质点的运动规律不仅决定于作用力，也与质点的运动初始条件有关。这两类的综合问题称为混合问题。

思　考　题

10-1　三个质量相同的质点，在某瞬时的速度分别如图 10-6 所示，若对它们作用了大小、方向相同的力 $\boldsymbol{F}$，问质点的运动情况是否相同？

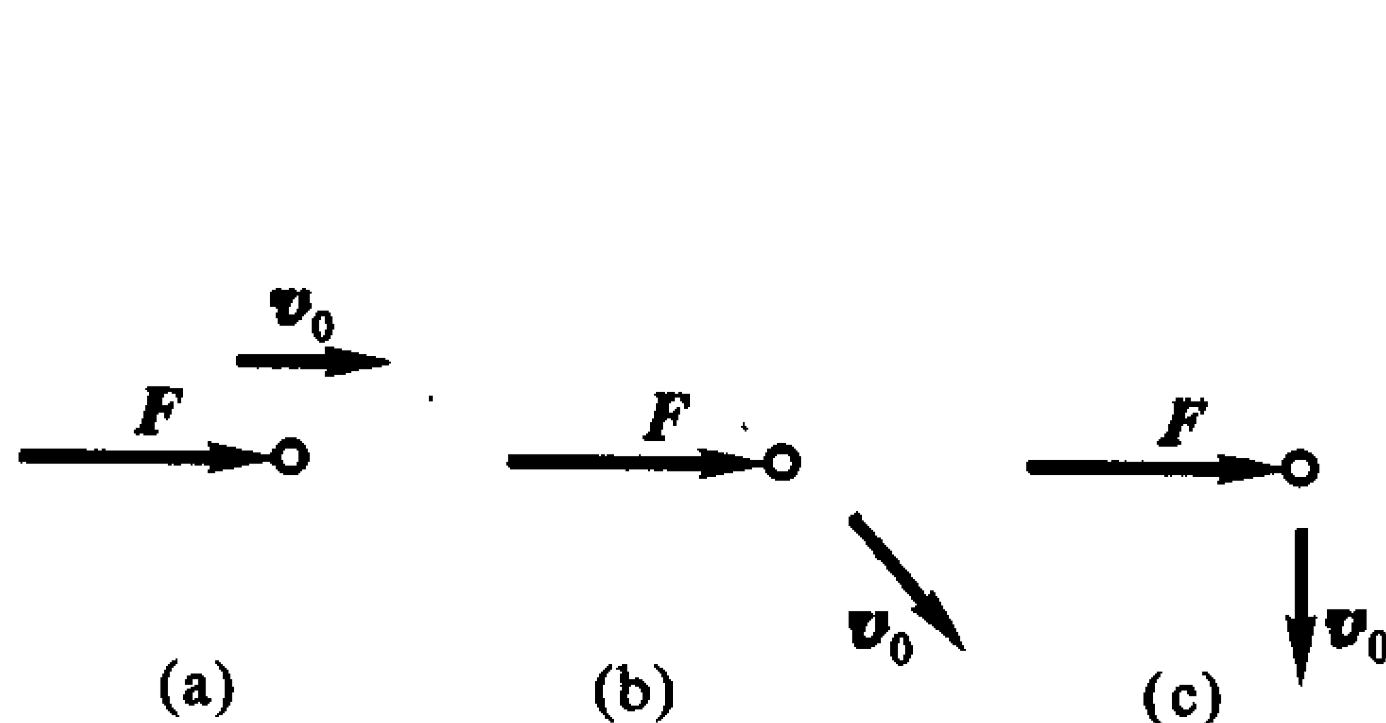


图 10-6

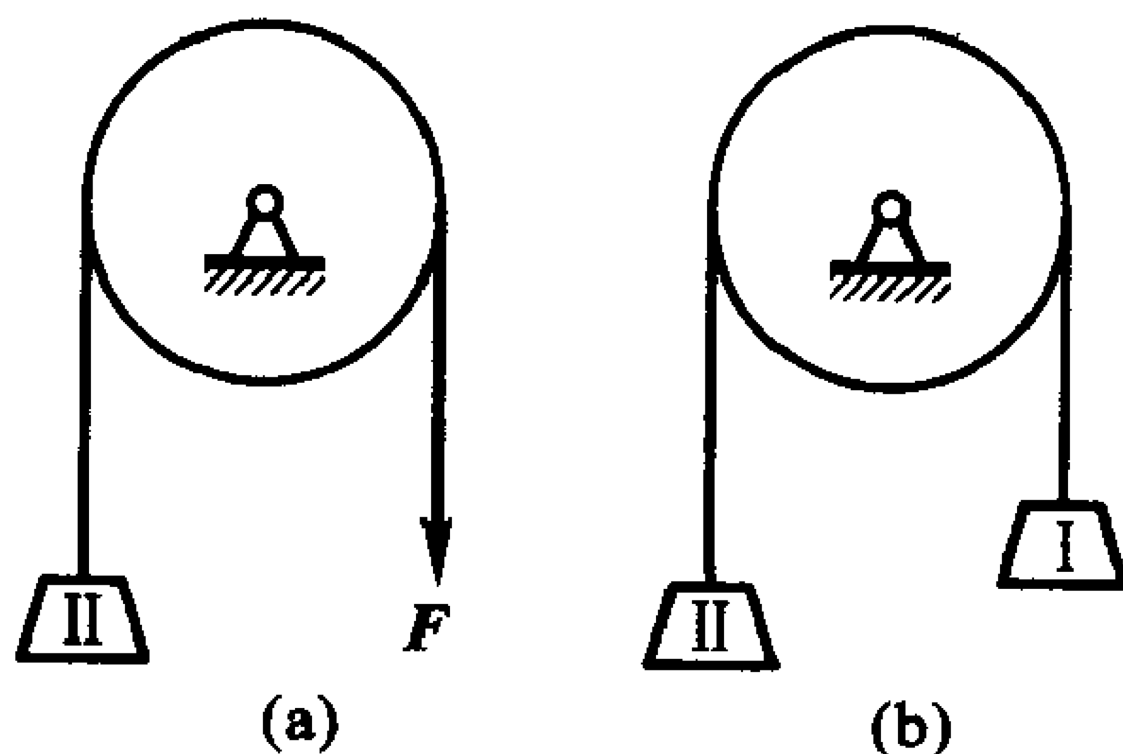


图 10-7

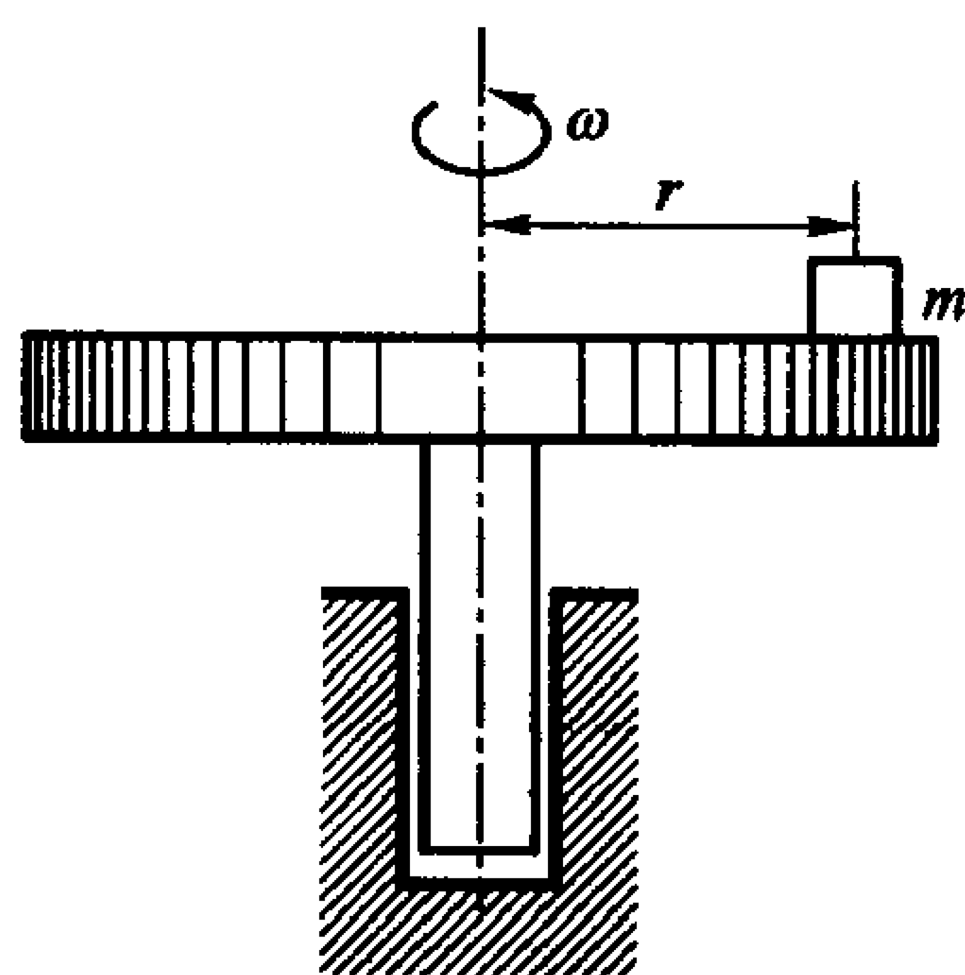
10－2　如图10－7所示，绳拉力 $F=2$ kN，物块Ⅱ重1 kN，物块Ⅰ重2 kN。若滑轮质量不计，问在图中(a)、(b)两种情况下，重物Ⅱ的加速度是否相同？两根绳中的张力是否相同？

10－3　质点在空间运动，已知作用力。为求质点的运动方程需要几个运动初始条件？若质点在平面内运动呢？若质点沿给定的轨道运动呢？

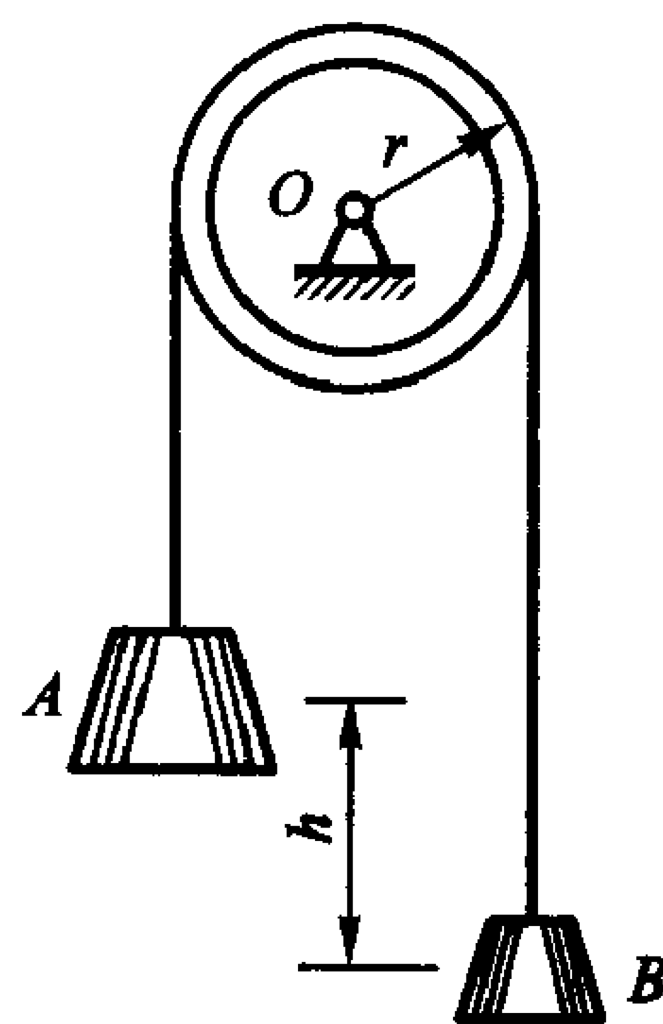
10－4　某人用枪瞄准了空中一悬挂的靶体。如在子弹射出的同时靶体开始自由下落，不计空气阻力，问子弹能否击中靶体？

习　题

10－1　一质量为 m 的物体放在匀速转动的水平转台上，它与转轴的距离为 r，如图所示。设物体与转台表面的摩擦因数为 f，求当物体不致因转台旋转而滑出时，水平台的最大转速。



题10－1图



题10－2图

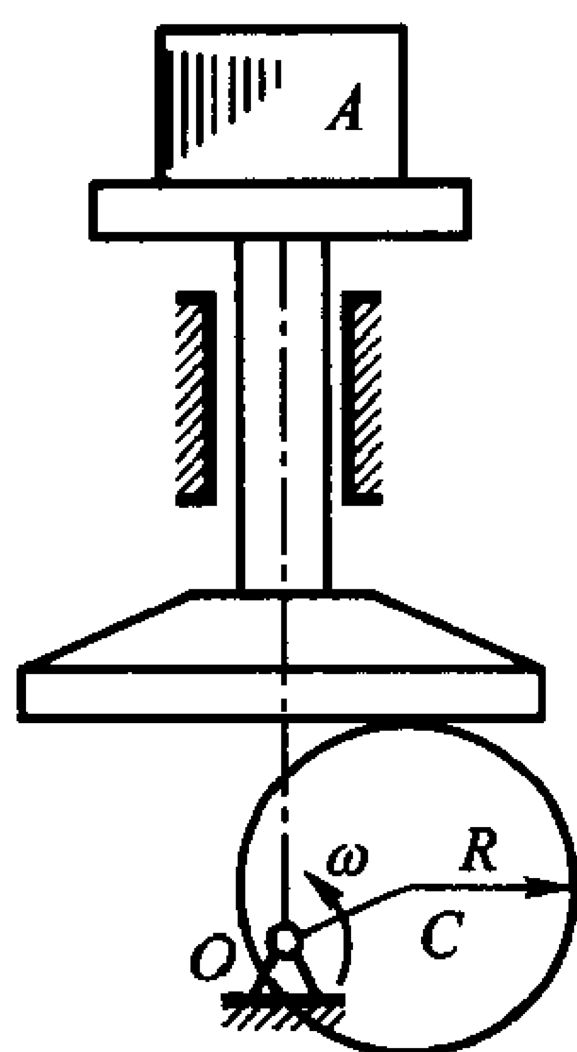
10－2　图示 A，B 两物体的质量分别为 m_1 与 m_2，二者间用一绳子连接，此绳跨过一滑轮，滑轮半径为 r。如在开始时，两物体的高度差为 h，而且 $m_1>m_2$，不计滑轮质量。求由静止释放后，两物体达到相同的高度时所需的时间。

10－3　半径为 R 的偏心轮绕轴 O 以匀角速度 ω 转动，推动导板沿铅直轨道运动，如图所示。导板顶部放有一质量为 m 的物块 A，设偏心距 $OC=e$，开始时 OC 沿水平线。求：(1) 物块对导板的最大压力；(2) 使物块不离开导板的 ω 最大值。

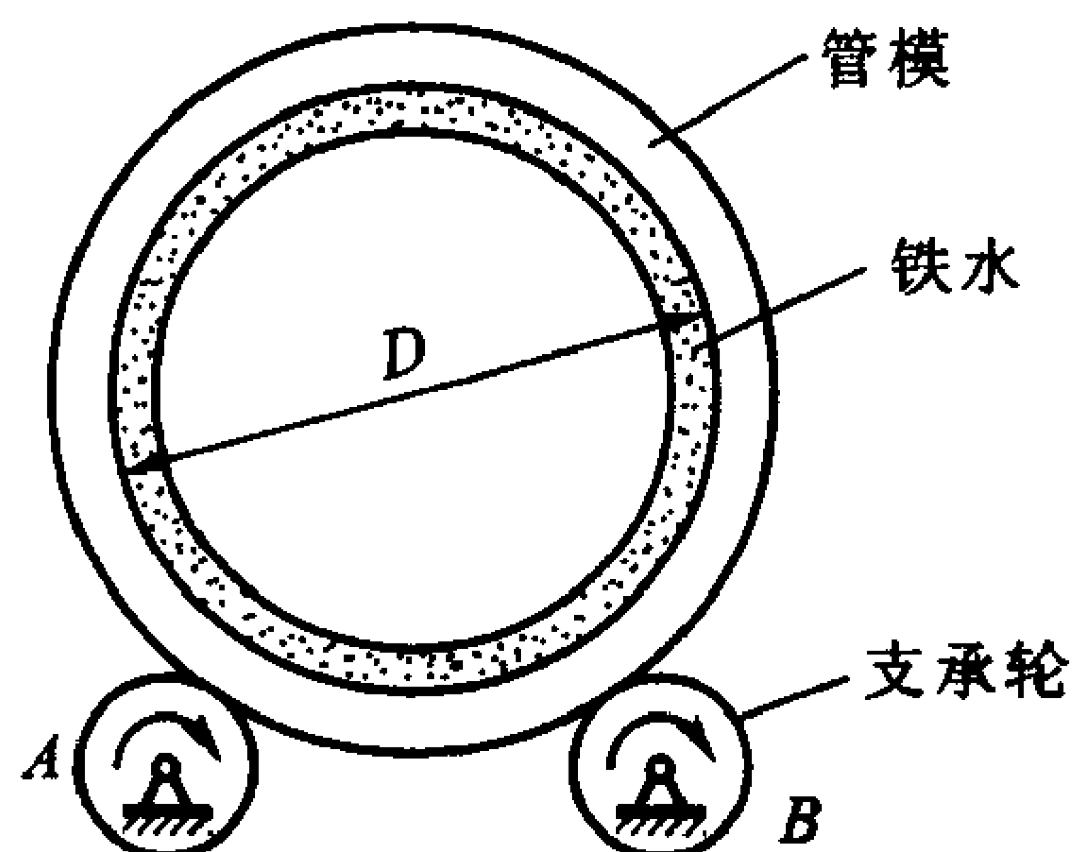
10－4　在图示离心浇注装置中，电动机带动支承轮 A，B 作同向转动，管模放在两轮上靠摩擦传动而旋转。使铁水浇入后均匀地紧贴管模的内壁而自动成型，从而可得到质量密实的管形铸件。如已知管模内径 $D=400$ mm，试求管模的最低转速 n。

10－5　为了使列车对铁轨的压力垂直于路基，在铁道弯曲部分，外轨要比内轨稍为提高。试就以下的数据求外轨高于内轨的高度 h。轨道的曲率半径为 $\rho=300$ m，列车的速度为 $v=12$ m/s，内、外轨道间的距离为 $b=1.6$ m。

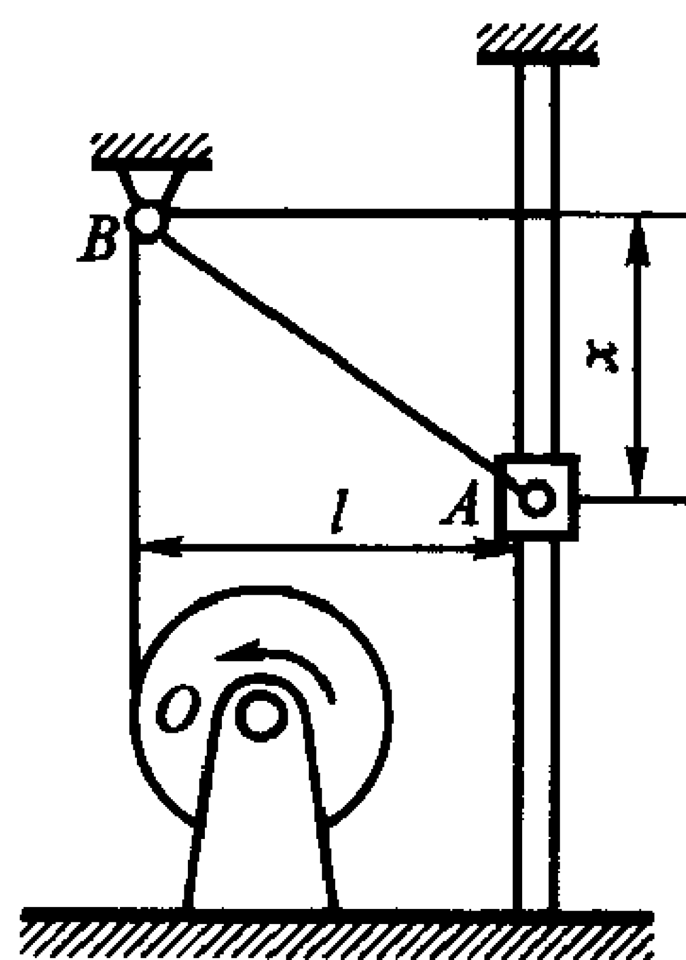
10－6　图示套管 A 的质量为 m，受绳子牵引沿铅直杆向上滑动。绳子的另一端绕过离杆距离为 l 的滑车 B 而缠在鼓轮上。当鼓轮转动时，其边缘上各点的速度大小为 v_0。求绳子拉力与距离 x 之间的关系。



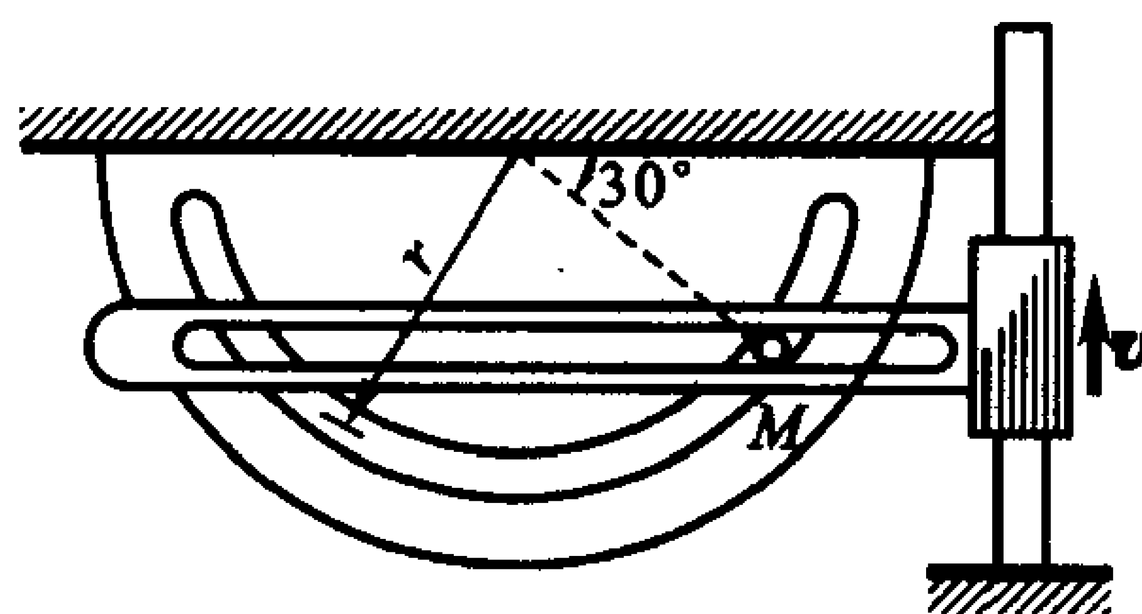
题 10-3 图



题 10-4 图



题 10-6 图



题 10-7 图

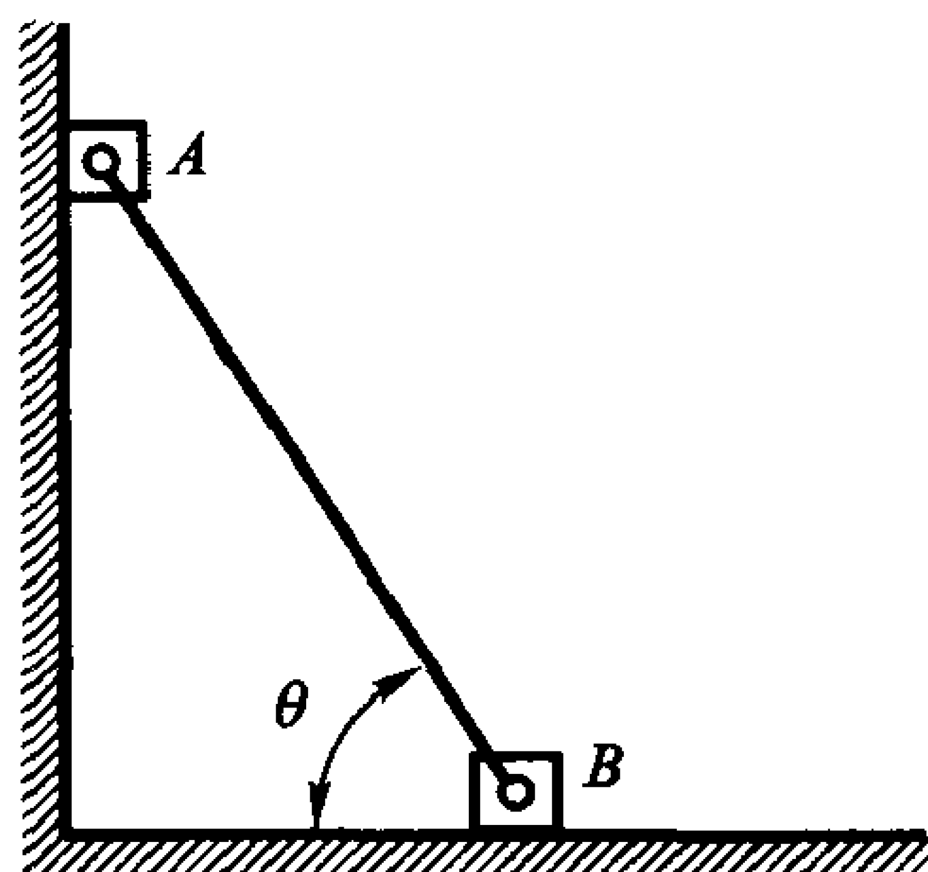
*10-7 销钉 M 的质量为 0.2 kg，由水平槽杆带动，使其在半径为 $r=200$ mm 的固定半圆槽内运动。设水平槽杆以匀速 $v=400$ mm/s 向上运动，不计摩擦。求在图示位置时圆槽对销钉 M 的作用力。

*10-8 质量皆为 m 的 A，B 两物块以无重杆光滑铰接，置于光滑的水平及铅垂面上，如图所示。当 $\theta=60°$ 时自由释放，求此瞬时杆 AB 所受的力。

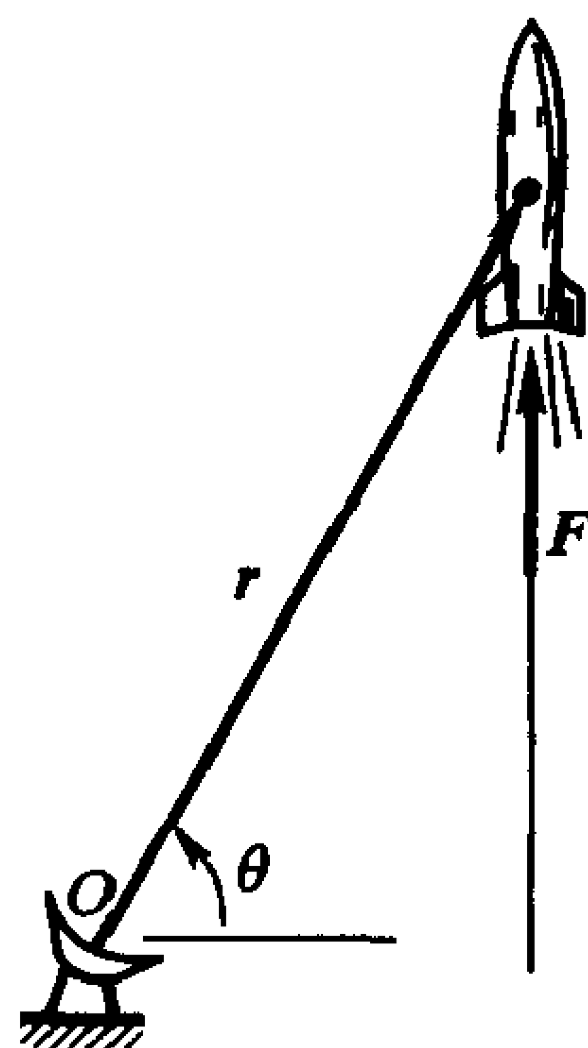
10-9 铅垂发射的火箭由一雷达跟踪，如图所示。当 $r=10\ 000$ m、$\theta=60°$、$\dot{\theta}=0.02$ rad/s 且 $\ddot{\theta}=0.003$ rad/s^2 时，火箭的质量为 5 000 kg。求此时的喷射反推力 $\boldsymbol{F}$。

10-10 一物体质量 $m=10$ kg，在变力 $F=100(1-t)$ N 作用下运动。设物体初速度为 $v_0=0.2$ m/s，开始时，力的方向与速度方向相同。问经过多少时间后物体速度为零，此前走了多少路程？

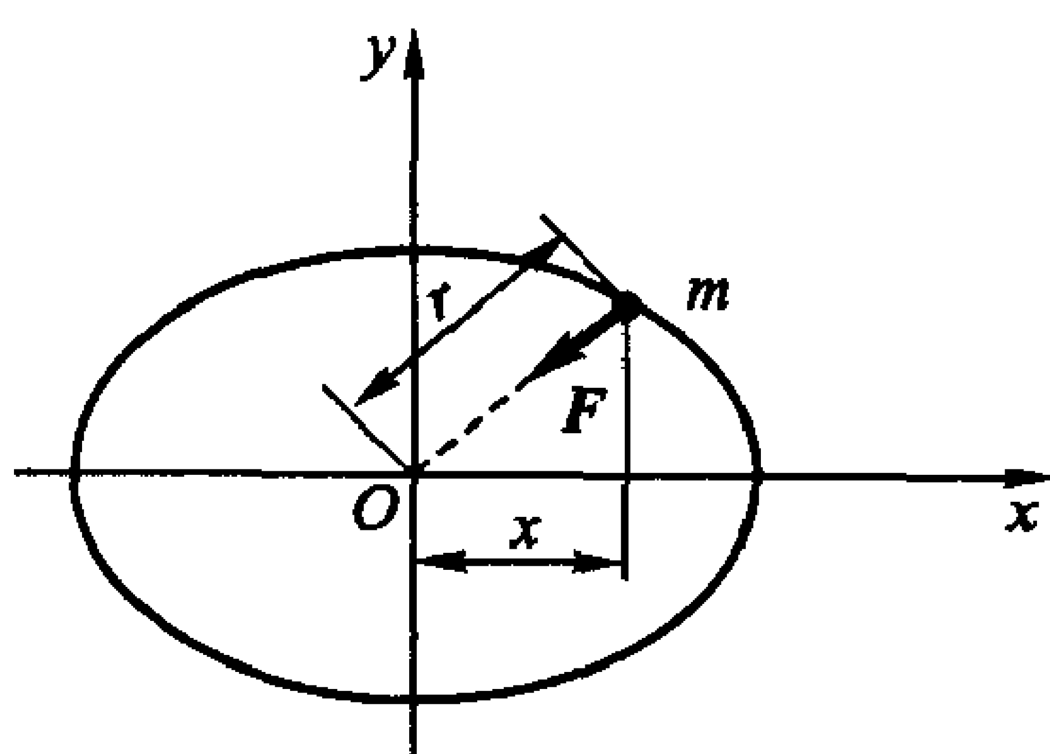
10-11 图示质点的质量为 m，受指向原点 O 的力 $F=kr$ 作用，力与质点到点 O 的距离成正比。如初瞬时质点的坐标为 $x=x_0$，$y=0$，而速度的分量为 $v_x=0$，$v_y=v_0$。求质点的轨迹。



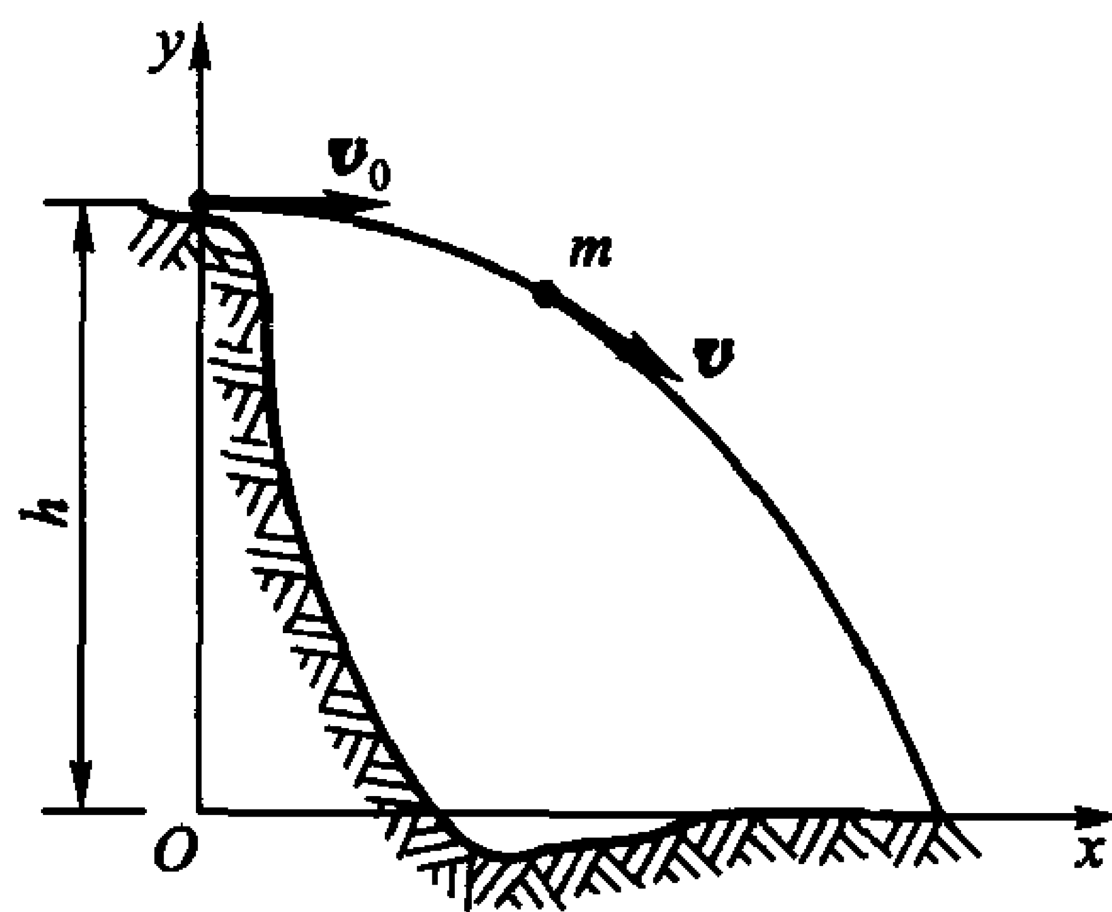
· 题 10 - 8 图



题 10 - 9 图



题 10 - 11 图



题 10 - 12 图

10 - 12　物体由高度 h 处以速度$\boldsymbol{v}_0$水平抛出，如图所示。空气阻力可视为与速度的一次方成正比，即 $\boldsymbol{F} = -km\boldsymbol{v}$，其中 m 为物体的质量，$\boldsymbol{v}$ 为物体的速度，k 为常系数。求物体的运动方程和轨迹。

10 - 13　一质点带有负电荷 e，其质量为 m，以初速度$\boldsymbol{v}_0$进入强度为 $\boldsymbol{H}$ 的均匀磁场中，该速度方向与磁场强度方向垂直。设已知作用于质点的力为

$$\boldsymbol{F} = -e(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H})$$

求质点的运动轨迹。

提示：解题时宜采用在自然轴上投影的运动微分方程。

第十一章 动量定理

对于质点系，可以逐个质点列出其动力学基本方程，但联立求解很复杂。

动量、动量矩和动能定理从不同的侧面揭示了质点和质点系总体的运动变化与其受力之间的关系，可用以求解质点系动力学问题。动量、动量矩和动能定理统称为动力学普遍定理。本章将阐明及应用动量定理。

§11－1 动量与冲量

1. 动量

物体之间往往有机械运动的相互传递，在传递机械运动时产生的相互作用力不仅与物体的速度变化有关，而且与它们的质量有关。例如，枪弹质量虽小，但速度很大，击中目标时，产生很大的冲击力；轮船靠岸时，速度虽小，但质量很大，操纵稍有疏忽，足以将船撞坏。据此，可以用质点的质量与速度的乘积，来表征质点的这种运动量。

质点的质量与速度的乘积称为质点的**动量**，记为 $m\boldsymbol{v}$ 。质点的动量是矢量，它的方向与质点速度的方向一致。

在国际单位制中，动量的单位为 kg·m/s。

质点系内各质点动量的矢量和称为**质点系的动量**，即

$$\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i \tag{11-1}$$

式中 n 为质点系内的质点数，m_i 为第 i 个质点的质量，$\boldsymbol{v}_i$ 为该质点的速度。质点系的动量是矢量。

如质点系中任一质点 i 的矢径为 $\boldsymbol{r}_i$，则其速度为 $\boldsymbol{v}_i=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}$，代入式(11－1)，注意到质量 m_i 是不变的，则有

$$\boldsymbol{p}=\sum m_i\boldsymbol{v}_i=\sum m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum m_i\boldsymbol{r}_i$$

令 $m=\sum m_i$ 为质点系的总质量；与重心坐标相似，定义质点系**质量中心**（简称质心）C 的矢径为

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{m} \tag{11-2}$$

代入前式，得

$$p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum m_i r_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m r_C)=m\,v_C \tag{11-3}$$

其中$v_C=\frac{\mathrm{d}r_C}{\mathrm{d}t}$为质点系质心 C 的速度。上式表明，质点系的动量等于质心速度与其全部质量的乘积。

刚体是无限多个质点组成的不变质点系，质心是刚体内某一确定点。对于质量均匀分布的规则刚体，质心也就是几何中心，用式(11-3)计算刚体的动量是非常方便的。例如，长为 l、质量为 m 的均质细杆，在平面内绕 O 点转动，角速度为 ω，如图 11-1a 所示。细杆质心的速度 $v_C=\frac{l}{2}\omega$，则细杆的动量为 $m\,v_C$，方向与v_C相同。又如图 11-1b 所示的均质滚轮，质量为 m，轮心速度为v_C，则其动量为 $m\,v_C$。而如图 11-1c 所示的绕中心转动的均质轮，无论有多大的角速度和质量，由于其质心不动，其动量总是零。

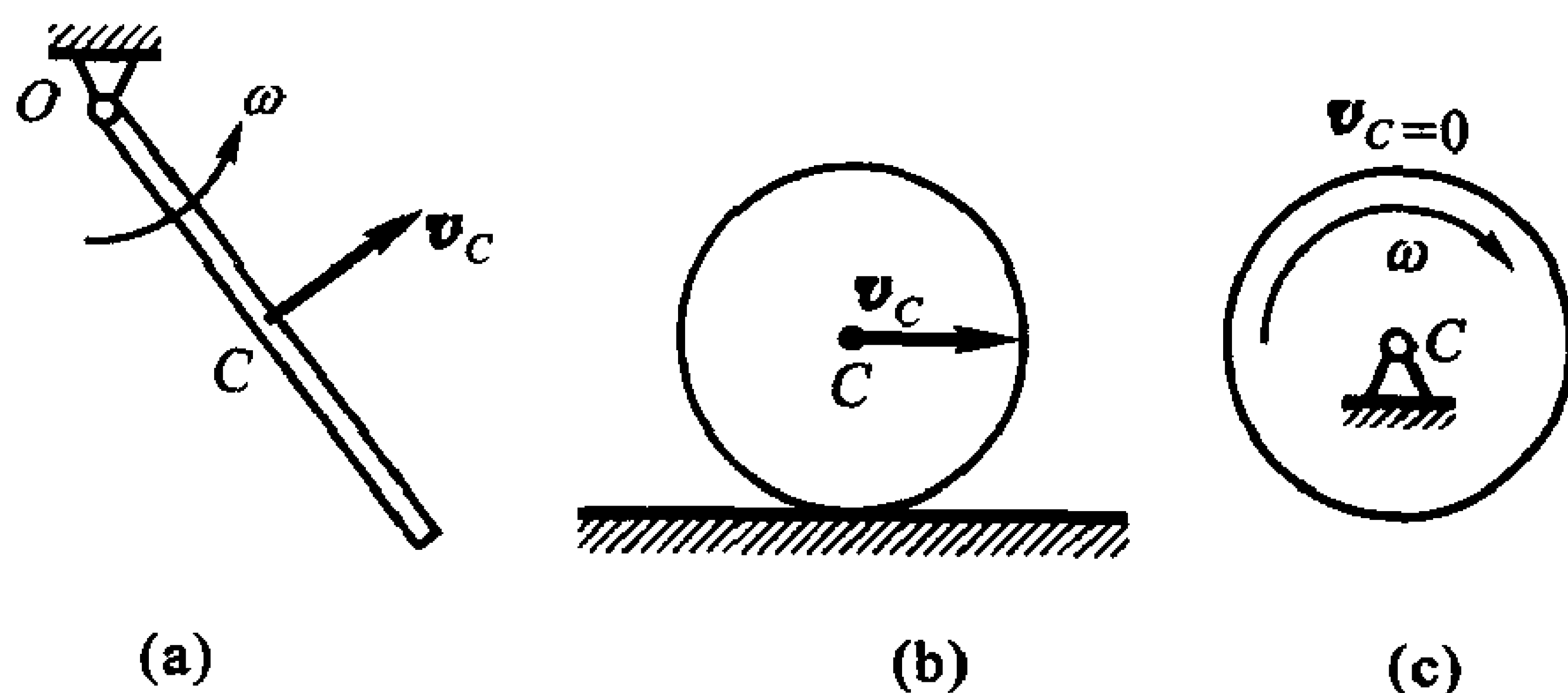


图 11-1

2. 冲量

物体在力的作用下引起的运动变化，不仅与力的大小和方向有关，还与力作用时间的长短有关。例如人力推动车厢沿铁轨运动，经过一段时间，可使车厢得到一定的速度；如改用机车牵引车厢，只需很短的时间便能达到同样的速度。如果作用力是常量，我们用力与作用时间的乘积来衡量力在这段时间内积累的作用。作用力与作用时间的乘积称为常力的**冲量**。以 $\boldsymbol{F}$ 表示此常力，作用的时间为 t，则此力的冲量为

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{F}\,t \tag{11-4}$$

冲量是矢量，它的方向与常力的方向一致。

如果作用力 $\boldsymbol{F}$ 是变量，在微小时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内，力 $\boldsymbol{F}$ 的冲量称为元冲量，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$$

而力 $\boldsymbol{F}$ 在作用时间 t 内的冲量是矢量积分

$$\boldsymbol{I}=\int_0^t \boldsymbol{F}\mathrm{d}t \tag{11-5}$$

在国际单位制中，冲量的单位是 N·s。

§11-2 动量定理

1. 质点的动量定理

由前一章的式(10-1)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}$$

或

$$\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}\mathrm{d}t \tag{11-6}$$

式(11-6)是质点**动量定理**的微分形式，即质点动量的增量等于作用于质点上的力的元冲量。

对上式积分，如时间由 0 到 t，速度由 $\boldsymbol{v}_0$ 变为 $\boldsymbol{v}$，得

$$m\boldsymbol{v}-m\boldsymbol{v}_0=\int_0^t\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\boldsymbol{I} \tag{11-7}$$

式(11-7)是质点动量定理的积分形式，即在某一时间间隔内，质点动量的变化等于作用于质点的力在此段时间内的冲量。

2. 质点系的动量定理

设质点系有 n 个质点，第 i 个质点的质量为 m_i，速度为 $\boldsymbol{v}_i$；外界物体对该质点作用的力为 $\boldsymbol{F}_i^{(e)}$，称为**外力**，质点系内其他质点对该质点作用的力为 $\boldsymbol{F}_i^{(i)}$，称为**内力**。根据质点的动量定理有

$$\mathrm{d}(m_i\boldsymbol{v}_i)=(\boldsymbol{F}_i^{(e)}+\boldsymbol{F}_i^{(e)})\mathrm{d}t=\boldsymbol{F}_i^{(e)}\mathrm{d}t+\boldsymbol{F}_i^{(i)}\mathrm{d}t$$

这样的方程共有 n 个。将 n 个方程两端分别相加，得

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}(m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(e)}\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(i)}\mathrm{d}t$$

因为质点系内质点相互作用的内力总是大小相等、方向相反地成对出现，相互抵消，因此内力冲量的矢量和等于零，即

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(i)}\mathrm{d}t=0$$

又因 $\sum\mathrm{d}(m_i\boldsymbol{v}_i)=\mathrm{d}\sum(m_i\boldsymbol{v}_i)=\mathrm{d}\boldsymbol{p}$，是质点系动量的增量；于是得质点系动量定理的微分形式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(e)}\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}\boldsymbol{I}_i^{(e)} \tag{11-8}$$

即质点系动量的增量等于作用于质点系的外力元冲量的矢量和。

式(11-8)也可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(e)} \tag{11-9}$$

即质点系的动量对时间的导数等于作用于质点系的外力的矢量和(或外力的主矢)。

设 $t=0$ 时,质点系的动量为 $\boldsymbol{p}_0$;在时刻 t,动量为 $\boldsymbol{p}$,将式(11-8)积分,得

$$\int_{\boldsymbol{p}_0}^{\boldsymbol{p}}\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\boldsymbol{F}_i^{(e)}\mathrm{d}t$$

或

$$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{I}_i^{(e)} \tag{11-10}$$

式(11-10)为质点系动量定理的积分形式,即在某一时间间隔内,质点系动量的改变量等于在这段时间内作用于质点系外力冲量的矢量和。

由质点系动量定理可见,质点系的内力不能改变质点系的动量。

动量定理是矢量式,在应用时应取投影形式,如式(11-9)和(11-10)在直角坐标系的投影式为

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=\sum F_x^{(e)},\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=\sum F_y^{(e)},\frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t}=\sum F_z^{(e)} \tag{11-11}$$

和

$$p_x-p_{0x}=\sum I_x^{(e)},p_y-p_{0y}=\sum I_y^{(e)},p_z-p_{0z}=\sum I_z^{(e)} \tag{11-12}$$

例 11-1 电动机的外壳固定在水平基础上,定子和机壳的质量为 m_1,转子质量为 m_2,如图 11-2 所示。设定子的质心位于转轴的中心 O_1,但由于制造误差,转子的质心 O_2 到 O_1 的距离为 e。已知转子匀速转动,角速度为 ω。求基础的水平及铅直约束力。

解: 取电动机外壳与转子组成质点系,外力有重力 $m_1\boldsymbol{g}$,$m_2\boldsymbol{g}$,基础的约束力 $\boldsymbol{F}_x$,$\boldsymbol{F}_y$ 和约束力偶 M_O。机壳不动,质点系的动量就是转子的动量,由式(11-3),其大小为

$$p=m_2\omega e$$

方向如图所示。设 $t=0$ 时,O_1O_2 铅垂,有 $\varphi=\omega t$。由动量定理的投影式(11-11),得

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=F_x,\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=F_y-m_1g-m_2g$$

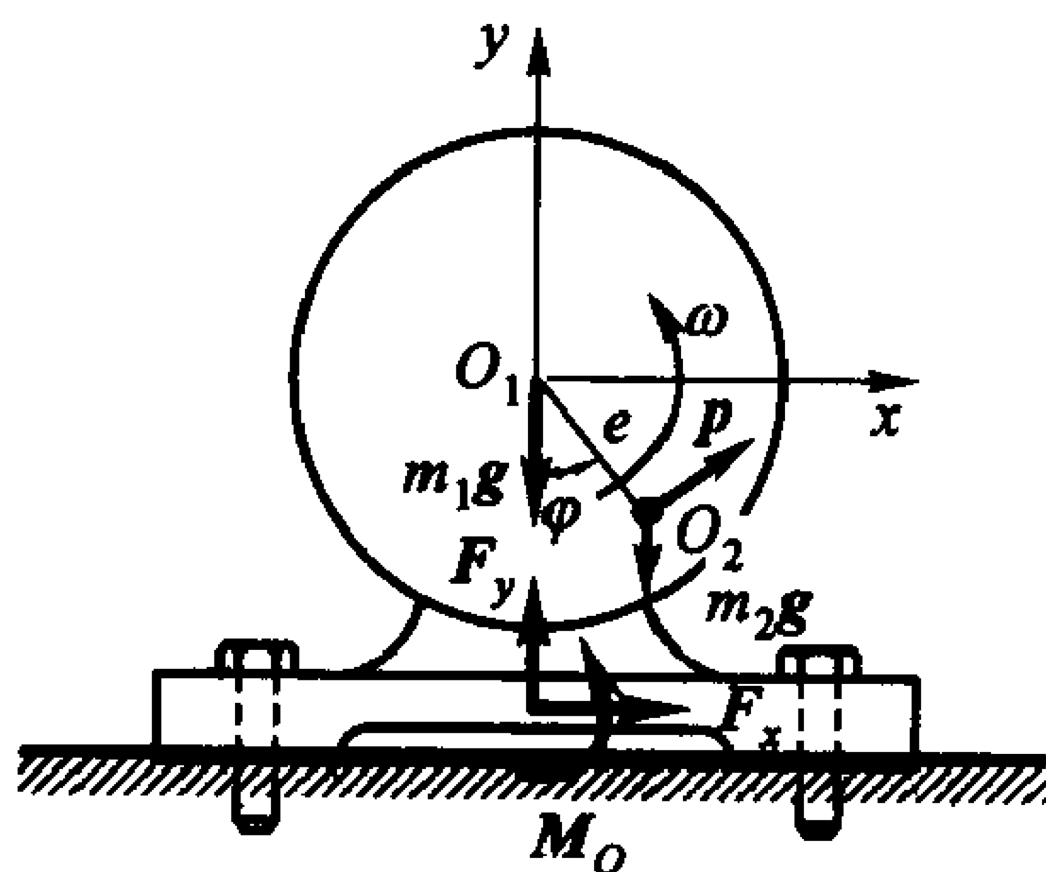


图 11-2

而

$$p_x=m_2\omega e\cos\omega t,\quad p_y=m_2\omega e\sin\omega t$$

代入上式,解出基础约束力

$$F_x=-m_2e\omega^2\sin\omega t,F_y=(m_1+m_2)g+m_2e\omega^2\cos\omega t$$

电机不转时,基础只有向上的约束力 $(m_1+m_2)g$,可称为**静约束力**;电机转动时的基础

约束力可称为**动约束力**。动约束力与静约束力的差值是由于系统运动而产生的，可称为附加动约束力。此例中，由于转子偏心而引起的在 x 方向附加动约束力 $-m_2\omega^2 e\sin\omega t$ 和 y 方向附加动约束力 $m_2\omega^2 e\cos\omega t$ 都是谐变力，将会引起电机和基础的振动。

关于力偶 M_O，可利用后几章将要学到的动量矩定理或达朗贝尔原理进行求解。

例 11-2 图 11-3 表示水流流经变截面弯管的示意图。设流体是不可压缩的，流动是稳定的。求管壁的附加动约束力。

解： 从管中取出所研究的两个截面 aa 与 bb 之间的流体作为质点系。经过时间 $\mathrm{d}t$，这一部分流体流到两个截面 a_1a_1 与 b_1b_1 之间。令 q_V 为流体在单位时间内流过截面的体积流量，ρ 为密度，则质点系在时间 $\mathrm{d}t$ 内流过截面的质量为

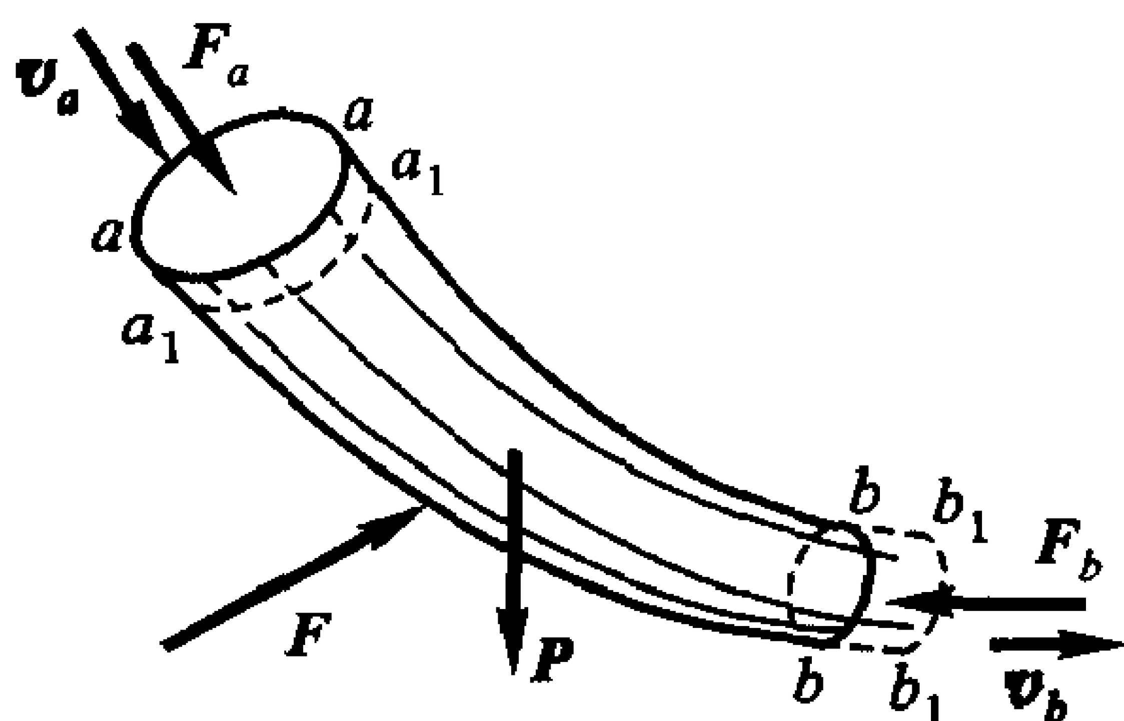


图 11-3

$$\mathrm{d}m = q_V\rho\mathrm{d}t$$

在时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内质点系动量的变化为

$$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{p}_{a_1b_1}-\boldsymbol{p}_{ab}=(\boldsymbol{p}_{bb_1}+\boldsymbol{p}_{a_1b})-(\boldsymbol{p}'_{a_1b}+\boldsymbol{p}_{aa_1})$$

因为管内流动是稳定的，有 $\boldsymbol{p}_{a_1b}=\boldsymbol{p}'_{a_1b}$，于是

$$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{p}_{bb_1}-\boldsymbol{p}_{aa_1}$$

$\mathrm{d}t$ 为极小，可认为在截面 aa 与 a_1a_1 之间各质点的速度相同，设为 v_a，截面 b_1b_1 与 bb 之间各质点的速度相同，设为 v_b，于是得

$$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0=q_V\rho\mathrm{d}t(\boldsymbol{v}_b-\boldsymbol{v}_a)$$

作用于质点系上的外力有：均匀分布于体积 $aabb$ 内的重力 $\boldsymbol{P}$，管壁对于此质点系的作用力 $\boldsymbol{F}$，以及两截面 aa 和 bb 上受到的相邻流体的压力 $\boldsymbol{F}_a$ 和 $\boldsymbol{F}_b$。

将动量定理应用于所研究的质点系，则有

$$q_V\rho\mathrm{d}t(\boldsymbol{v}_b-\boldsymbol{v}_a)=(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{F}_a+\boldsymbol{F}_b+\boldsymbol{F})\mathrm{d}t$$

消去时间 $\mathrm{d}t$，得

$$q_V\rho(\boldsymbol{v}_b-\boldsymbol{v}_a)=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{F}_a+\boldsymbol{F}_b+\boldsymbol{F}$$

若将管壁对于流体约束力 $\boldsymbol{F}$ 分为 $\boldsymbol{F}'$ 和 $\boldsymbol{F}''$ 两部分：$\boldsymbol{F}'$ 为与外力 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{F}_a$ 和 $\boldsymbol{F}_b$ 相平衡的管壁静约束力，$\boldsymbol{F}''$ 为由于流体的动量发生变化而产生的附加动约束力。则 $\boldsymbol{F}'$ 满足平衡方程

$$\boldsymbol{P}+\boldsymbol{F}_a+\boldsymbol{F}_b+\boldsymbol{F}'=0$$

而附加动约束力由下式确定：

$$\boldsymbol{F}''=q_V\rho(\boldsymbol{v}_b-\boldsymbol{v}_a)$$

设截面 aa 和 bb 的面积分别为 A_a 和 A_b，由不可压缩流体的连续性定律知

$$q_V=A_av_a=A_bv_b$$

因此，只要知道流速和曲管的尺寸，即可求得附加动约束力。流体对管壁的附加动作用力大小等于此附加动约束力，但方向相反。

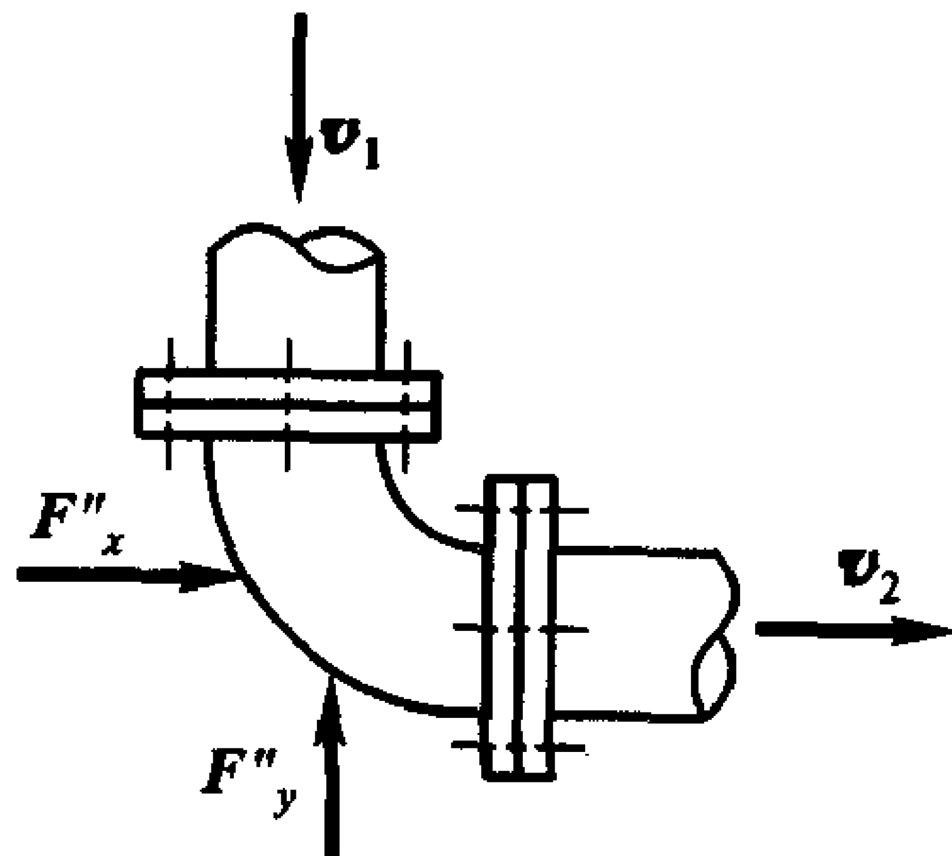


图 11-4

图 11-4 为一水平的等截面直角形弯管。当流体被迫改变流动方向时，对管壁施加有附加的作用力，它的大

小等于管壁对流体作用的附加动约束力，即

$$F''_x = q_V\rho(v_2 - 0) = \rho A_2 v_2^2,\ F''_y = q_V\rho(0 + v_1) = \rho A_1 v_1^2$$

由此可见，当流速很高或管子截面积很大时，附加动压力很大，在管子的弯头处应该安装支座。

3．质点系动量守恒定律

如果作用于质点系的外力的主矢恒等于零，根据式(11－9)或(11－10)，质点系的动量保持不变，即

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 = \text{恒矢量}$$

如果作用于质点系的外力主矢在某一坐标轴上的投影恒等于零，则根据式(11－11)或(11－12)，质点系的动量在该坐标轴上的投影保持不变。例如 $\sum F_{ix}^{(e)} = 0$，则

$$p_x = p_{0x} = \text{恒量}$$

以上结论称为质点系动量守恒定律。

应注意，内力虽不能改变质点系的动量，但是可改变质点系中各质点的动量。

例 11－3　物块 A 可沿光滑水平面自由滑动，其质量为 m_A；小球 B 的质量为 m_B，以细杆与物块铰接，如图 11－5 所示。设杆长为 l，质量不计，初始时系统静止，并有初始摆角 φ_0；释放后，细杆近似以 $\varphi = \varphi_0\cos\omega t$ 规律摆动（ω 为已知常数），求物块 A 的最大速度。

解：　取物块和小球为研究对象，此系统水平方向不受外力作用，则沿水平方向动量守恒。

细杆角速度为 $\dot{\varphi} = -\omega\varphi_0\sin\omega t$，当 $\sin\omega t = 1$ 时，其绝对值最大，此时应有 $\cos\omega t = 0$，即 $\varphi = 0$。由此，当细杆铅垂时小球相对于物块有最大的水平速度，其值为

$$v_r = l\dot{\varphi}_{\max} = l\omega\varphi_0$$

当此速度 $\boldsymbol{v}_r$ 向左时，物块应有向右的绝对速度，设为 $\boldsymbol{v}$，而小球向左的绝对速度值为 $v_a = v_r - v$。根据动量守恒条件，有

$$m_A v - m_B(v_r - v) = 0$$

解出物块的最大速度为

$$v = \frac{m_B v_r}{m_A + m_B} = \frac{m_B l\omega\varphi_0}{m_A + m_B}$$

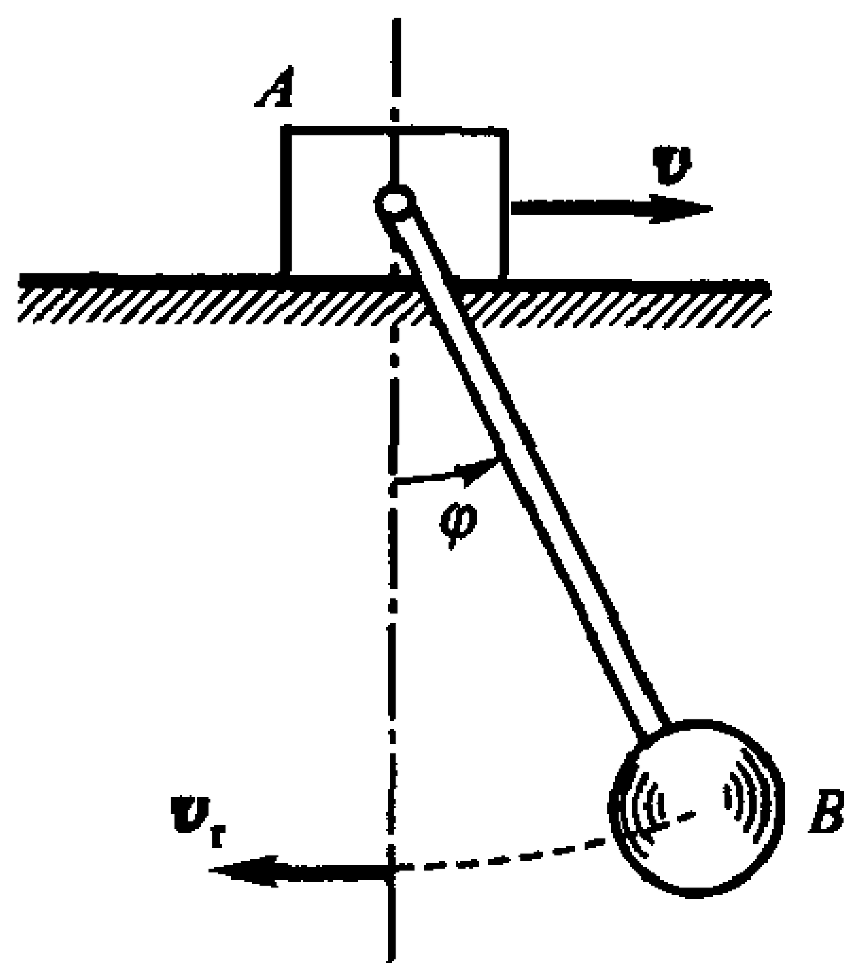


图 11－5

当 $\sin\omega t = -1$ 时，也有 $\varphi = 0$。此时物块有向左的最大速度 $\frac{m_B l\omega\varphi_0}{m_A + m_B}$。

§ 11－3　质心运动定理

1．质量中心

质点系在力的作用下，其运动状态与各质点的质量及其相互的位置都有关系，即与质点系的质量分布状况有关。由式(11－2)，即

$$r_C = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i r_i}{m}$$

所定义的质心位置反映出质点系质量分布的一种特征。质心的概念及质心运动在质点系(特别是刚体)动力学中具有重要地位。计算质心位置时，常用上式在直角坐标系的投影形式，即

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{m} \\ y_C &= \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i y_i}{m} \\ z_C &= \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i z_i}{m} \end{aligned}\right\} \tag{11-13}$$

例 11-4 图 11-6 所示的曲柄滑块机构中，设曲柄 OA 受力偶作用以匀角速度 ω 转动，滑块 B 沿 x 轴滑动。若 $OA = AB = l$，OA 及 AB 皆为均质杆，质量皆为 m_1，滑块 B 的质量为 m_2。求此系统的质心运动方程、轨迹以及此系统的动量。

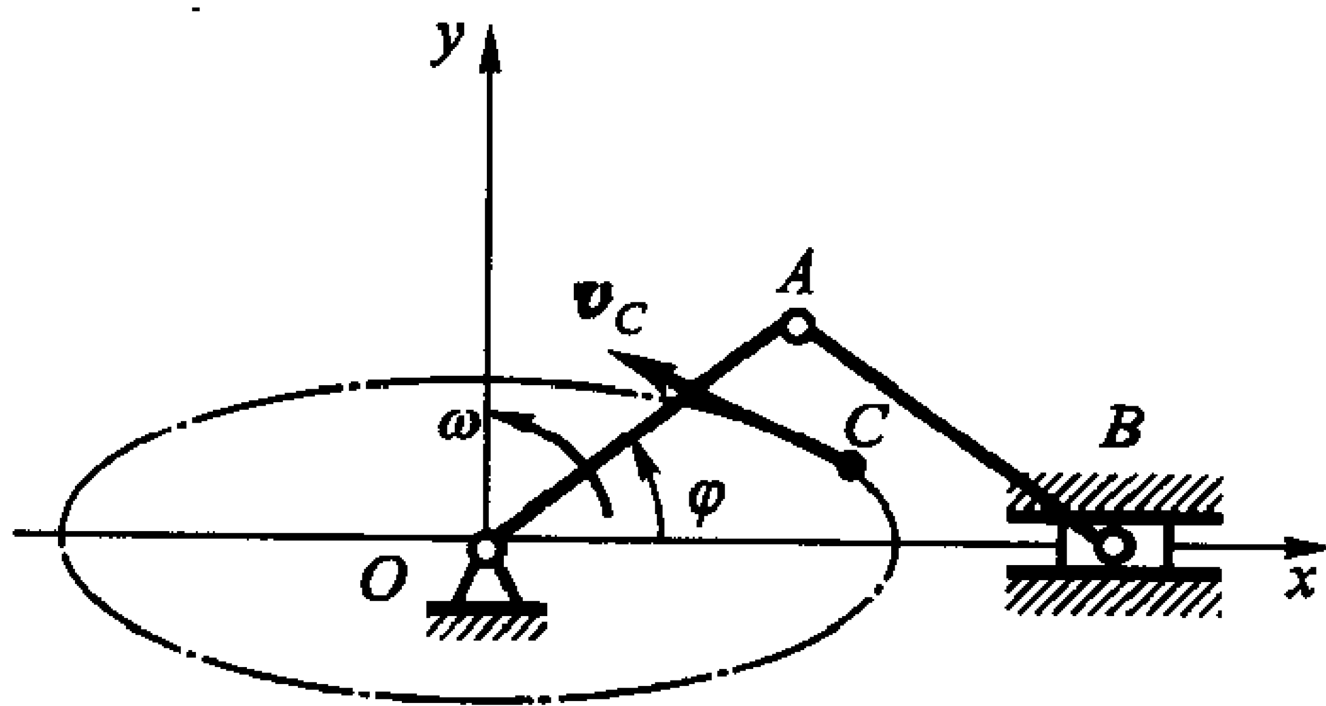


图 11-6

解： 设 $t=0$ 时杆 OA 水平，则有 $\varphi = \omega t$。由式(11-13)，质心 C 的坐标为

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{m_1 \frac{l}{2} + m_1 \frac{3l}{2} + 2m_2 l}{2m_1 + m_2} \cos \omega t = \frac{2(m_1 + m_2)}{2m_1 + m_2} l \cos \omega t \\ y_C &= \frac{2m_1 \frac{l}{2}}{2m_1 + m_2} \sin \omega t = \frac{m_1}{2m_1 + m_2} l \sin \omega t \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

上式也就是此系统质心 C 的运动方程。由上两式消去时间 t，得

$$\left[\frac{x_C}{\frac{2(m_1 + m_2)l}{2m_1 + m_2}}\right]^2 + \left[\frac{y_C}{\frac{m_1 l}{2m_1 + m_2}}\right]^2 = 1 \tag{b}$$

即质心 C 的运动轨迹为一椭圆，如图中点划线所示。应该指出，系统的质心一般不在其中某一物体上，而是空间的某一特定点。

为求系统的动量，可将式(11-3)沿 x，y 轴投影，即

$$p_x = m v_{Cx}\,,\quad p_y = m v_{Cy}$$

此例中 $m = \sum m_i = 2m_1 + m_2$。由式(a)得

$$v_{Cx}=\dot{x}_C=\frac{-2(m_1+m_2)}{2m_1+m_2}l\omega\sin\omega t\,,v_{Cy}=\dot{y}_C=\frac{m_1}{2m_1+m_2}l\omega\cos\omega t$$

则得系统动量沿 x,y 轴的投影

$$p_x=-2(m_1+m_2)l\omega\sin\omega t\,,p_y=m_1 l\omega\cos\omega t$$

系统动量的大小为

$$p=\sqrt{p_x^2+p_y^2}=l\omega\sqrt{4(m_1+m_2)^2\sin^2\omega t+m_1^2\cos^2\omega t}$$

动量的方向沿质心轨迹的切线方向,可用其方向余弦表示。

2. 质心运动定理

由于质点系的动量等于质点系的质量与质心速度的乘积,因此动量定理的微分形式可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}_C)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

对于质量不变的质点系,上式可改写为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

或

$$m\boldsymbol{a}_C=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(e)} \tag{11-14}$$

式中 $\boldsymbol{a}_C$ 为质心的加速度。上式表明,质点系的质量与质心加速度的乘积等于作用于质点系外力的矢量和(即等于外力的主矢)。这种规律称为**质心运动定理**。

式(11-14)与质点的动力学基本方程 $m\boldsymbol{a}=\sum\boldsymbol{F}$ 相似,因此质心运动定理也可叙述如下:质点系质心的运动,可以看成为一个质点的运动,设想此质点集中了整个质点系的质量及其所受的外力。

例如在爆破山石时,土石碎块向各处飞落,如图 11-7 所示。在尚无碎石落地前,全部土石碎块的质心运动与一个抛射质点的运动一样,设想这个质点的质量等于质点系的全部质量,作用在这个质点上的力是质点系中各质点重力的总和。根据质心的运动轨迹,可以在定向爆破时,预先估计大部分土石块堆落的地方。

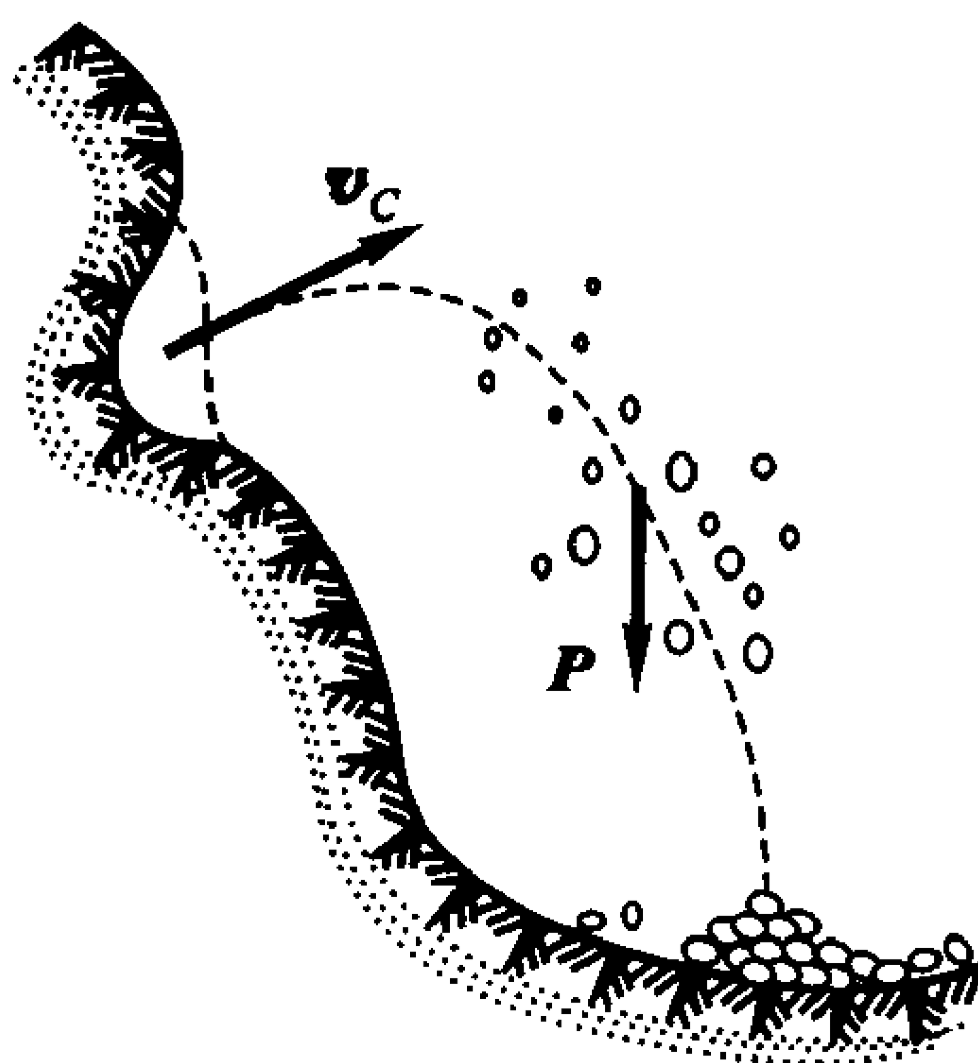


图 11-7

由质心运动定理可知,质点系的内力不影响质心的运动,只有外力才能改变质心的运动。例如,在汽车的发动机中,气体的压力是内力,虽然这个力是汽车行驶的原动力,但是它不能使汽车的质心运动。这种气体压力推动气缸内的活塞,经过一套机构转动主动轮(图 11-8 中的后轮),

靠轮与地面的摩擦力 F_A 推动汽车向前进。如果地面光滑，或 F_A 克服不了汽车前进的阻力 F_B，那么后轮将在原处打转，汽车不能前进。

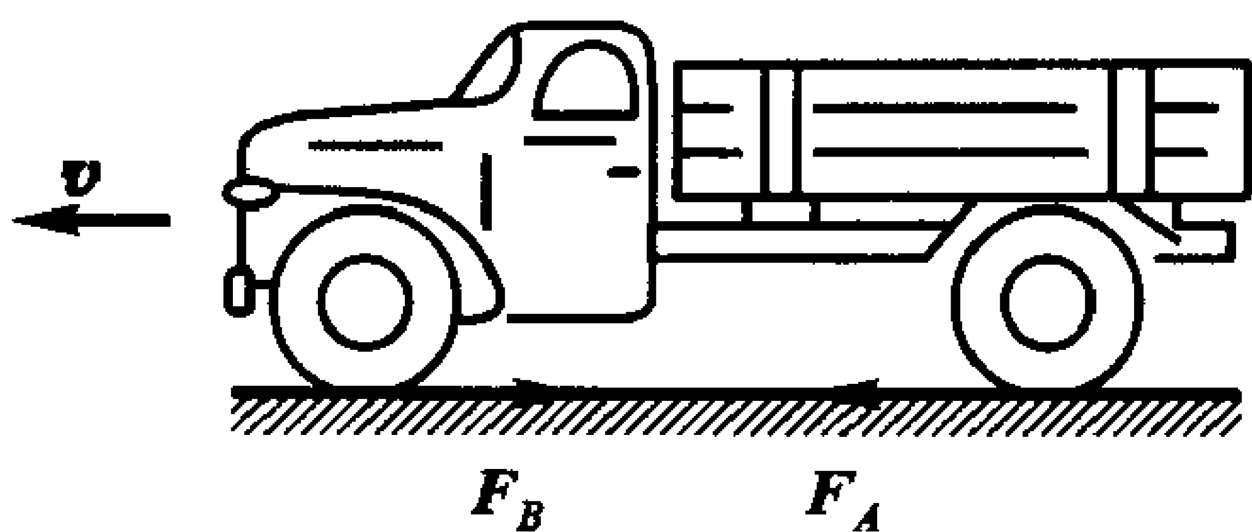


图 11－8

质心运动定理是矢量式，应用时取投影形式。

直角坐标轴上的投影式为

$$ma_{Cx}=\sum F_x^{(e)},\ ma_{Cy}=\sum F_y^{(e)},\ ma_{Cz}=\sum F_z^{(e)} \qquad (11-15)$$

自然轴上的投影式为

$$m\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=\sum F_t^{(e)},\ m\frac{v_C^2}{\rho}=\sum F_n^{(e)},\ \sum F_b^{(e)}=0 \qquad (11-16)$$

下面举例说明质心运动定理的应用。

例 11－5　均质曲柄 AB 长为 r，质量为 m_1，假设受力偶作用以不变的角速度 ω 转动，并带动滑槽连杆以及与它固连的活塞 D，如图 11－9 所示。滑槽、连杆、活塞总质量为 m_2，质心在点 C。在活塞上作用一恒力 $\boldsymbol{F}$。不计摩擦及滑块 B 的质量，求作用在曲柄轴 A 处的最大水平约束力 F_x。

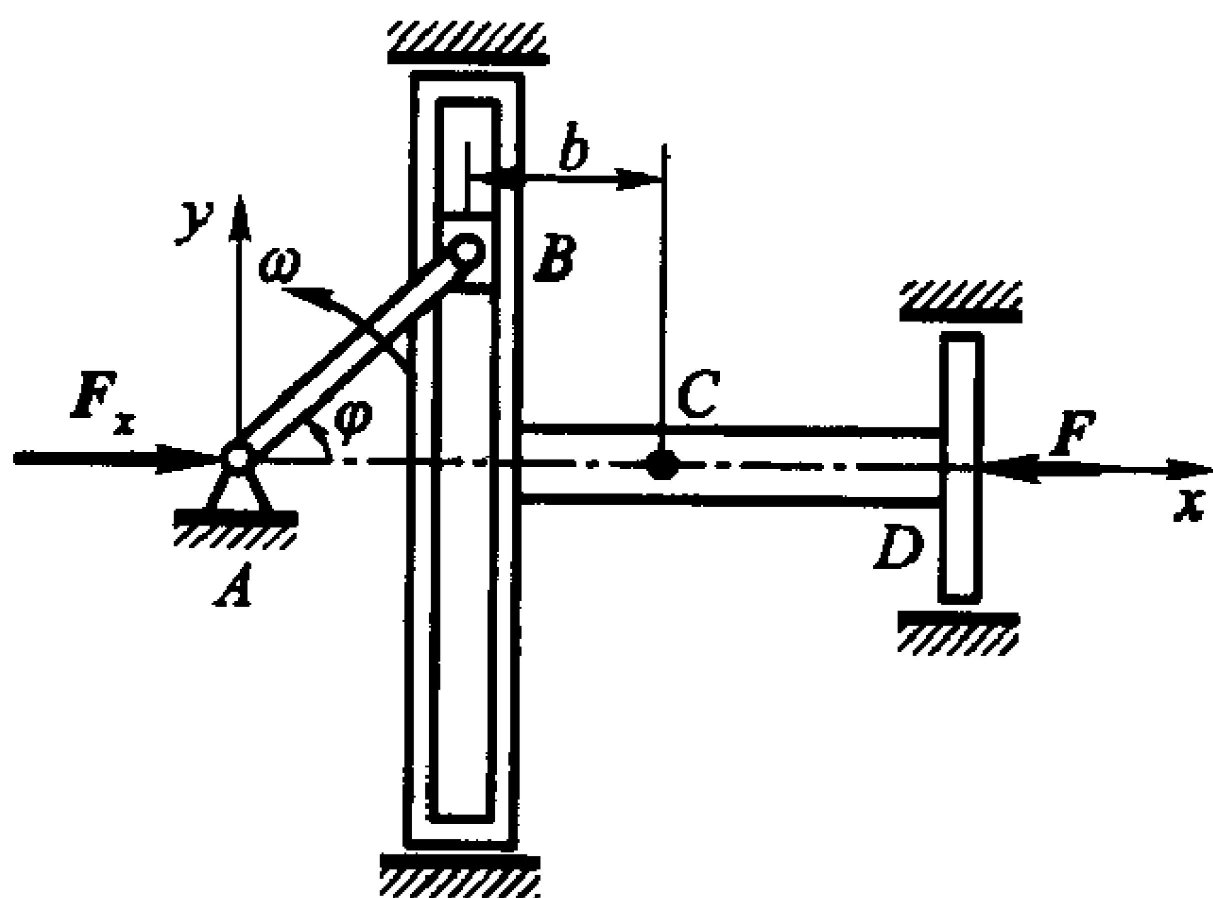


图 11－9

解：　选取整个机构为研究的质点系。作用在水平方向的外力有 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}_x$，且力偶不影响质心运动。

列出质心运动定理在 x 轴上的投影式

$$(m_1+m_2)a_{Cx}=F_x-F$$

为求质心的加速度在 x 轴上的投影，先计算质心的坐标，然后把它对时间取二阶导数，即

$$x_C=\left[m_1\frac{r}{2}\cos\varphi+m_2(r\cos\varphi+b)\right]\cdot\frac{1}{m_1+m_2}$$

$$a_{Cx}=\frac{\mathrm{d}^2x_C}{\mathrm{d}t^2}=\frac{-r\omega^2}{m_1+m_2}\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)\cos\omega t$$

应用质心运动定理，解得

$$F_x=F-r\omega^2\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)\cos\omega t$$

显然，最大水平约束力

$$F_{x\max}=F+r\omega^2\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)$$

3．质心运动守恒定律

由质心运动定理知：如果作用于质点系的外力主矢恒等于零，则质心作匀速直线运动；若开始静止，则质心位置始终保持不变。如果作用于质点系的所有外力在某轴上投影的代数和恒等于零，则质心速度在该轴上的投影保持不变；若开始时速度投影等于零，则质心沿该轴的坐标保持不变。

以上结论，称为质心运动守恒定律。

例 11－6　如图 11－10 所示，设例 11－1 中的电动机没用螺栓固定，各处摩擦不计，初始时电动机静止，求转子以匀角速度 ω 转动时电动机外壳的运动。

解：电动机在水平方向没有受到外力，且初始为静止，因此系统质心的坐标 x_C 保持不变。

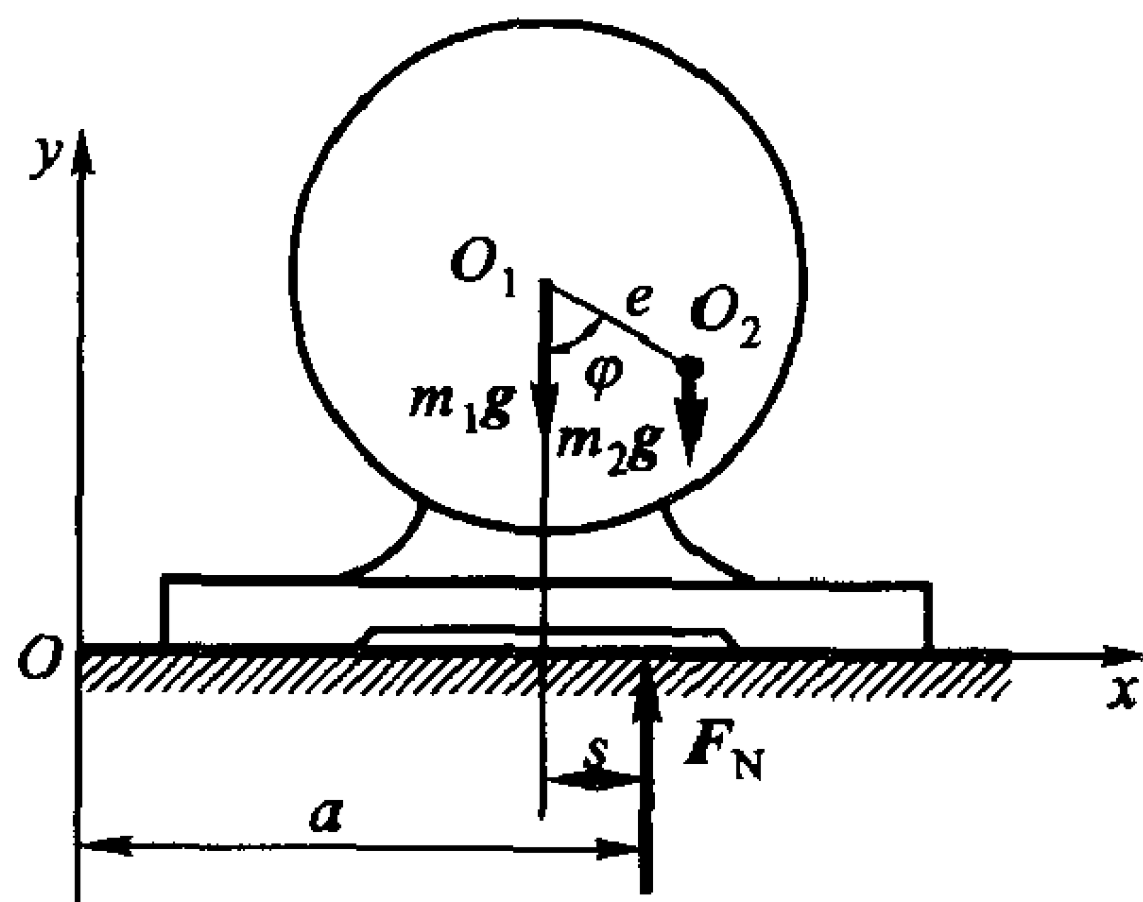


图 11－10

取坐标轴如图所示。转子在静止时转子的质心 O_2 在最低点，设 $x_{C1}=a$。当转子转过角度 φ 时，定子应向左移动，设移动距离为 s，则质心坐标为

$$x_{C2}=\frac{m_1(a-s)+m_2(a+e\sin\varphi-s)}{m_1+m_2}$$

因为在水平方向质心守恒，所以有 $x_{C1}=x_{C2}$，解得

$$s=\frac{m_2}{m_1+m_2}e\sin\varphi$$

电机在水平面上往复运动。

顺便指出，支承面的法向约束力的最小值已由例 11－1 求得为

$$F_{y\min}=(m_1+m_2)g-m_2e\omega^2$$

当 $\omega>\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2e}g}$ 时，有 $F_{y\min}<0$，如果电动机未用螺栓固定，将会离地跳起来。

综合以上各例可知，应用质心运动定理解题的步骤如下：

(1) 分析质点系所受的全部外力，包括主动力和约束力；

(2) 为求未知力，可计算质心坐标，求质心的加速度，然后应用质心运动定理求解；

(3) 在外力已知的条件下，欲求质心的运动规律，其解法与质点动力学第二类问题相同；

(4) 如果外力主矢为零，且初始时质点系为静止，则质心坐标保持不变。分别列出两个时刻质心的坐标，令其相等，即可求得所求质点的位移，如例 11－6。

小　结

1．动量定理

质点的动量定理：$\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$

$$m\boldsymbol{v}_2-m\boldsymbol{v}_1=\int_0^t\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\boldsymbol{I}$$

质点系的动量：$\boldsymbol{p}=\sum m_i \boldsymbol{v}_i = m\boldsymbol{v}_C$

质点系的动量定理：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}=\sum \boldsymbol{F}^{(e)}$

$$\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\sum \boldsymbol{I}^{(e)}$$

质点系动量守恒定律：当$\sum \boldsymbol{F}^{(e)}=0$时，$\boldsymbol{p}=$常矢量。当$\sum F_x^{(e)}=0$时，$p_x=$常量。

2. 质心运动定理：$m\boldsymbol{a}_C=\sum \boldsymbol{F}^{(e)}$

质点系的质心

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{m}$$

$$x_C=\frac{\sum m_i x_i}{m},\ y_C=\frac{\sum m_i y_i}{m},\ z_C=\frac{\sum m_i z_i}{m}$$

质心运动守恒定律：当$\sum \boldsymbol{F}^{(e)}=0$时，$\boldsymbol{v}_C=$常矢量；同时又有$\boldsymbol{v}_{C0}=0$时，$\boldsymbol{r}_C=$常矢量，即质心位置不变。若$\sum F_x^{(e)}=0$，$v_{Cx}=$常量；同时又有$v_{C0x}=0$时，$x_C=$常量，即质心$x$坐标不变。

思 考 题

11－1 求图11－11所示各均质物体的动量。设各物体质量皆为m。

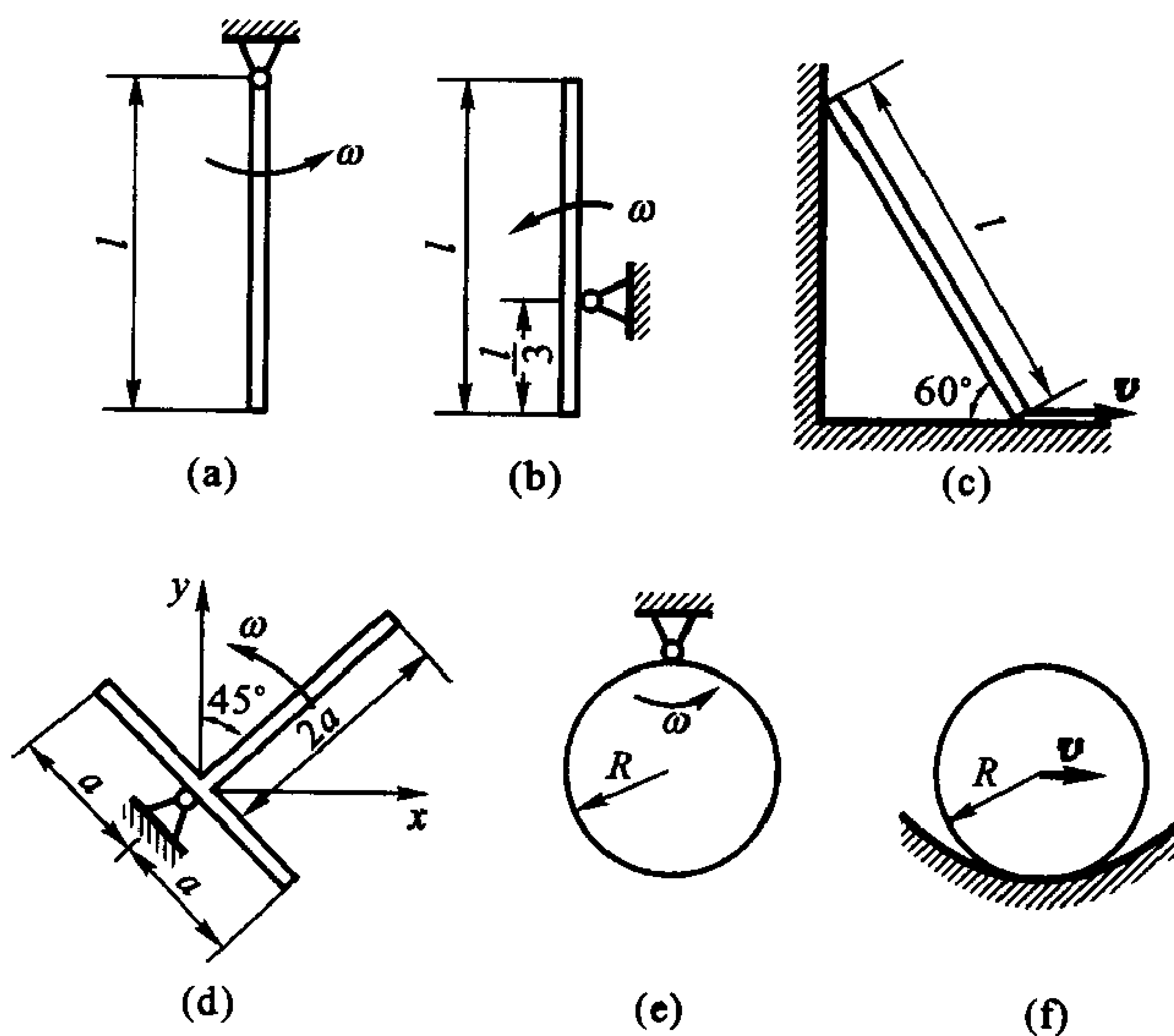


图 11－11

11－2 在光滑的水平面上放置一静止的均质圆盘，当它受一力偶作用时，盘心将如何运

动？盘心运动情况与力偶作用位置有关吗？如果圆盘面内受一大小和方向都不变的力作用，盘心将如何运动？盘心运动情况与此力的作用点有关吗？

11-3　两物块A和B,质量分别为 m_A 和 m_B,初始静止。如A沿斜面下滑的相对速度为 $\boldsymbol{v}_r$,如图11-12所示。设B向左的速度为 $\boldsymbol{v}$,根据动量守恒定律,有

$$m_A v_r \cos\theta = m_B v$$

对吗？

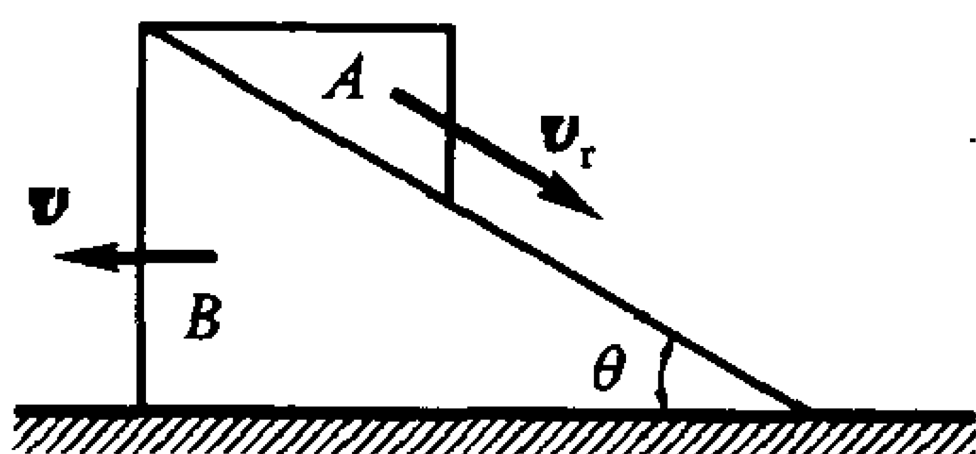


图 11-12

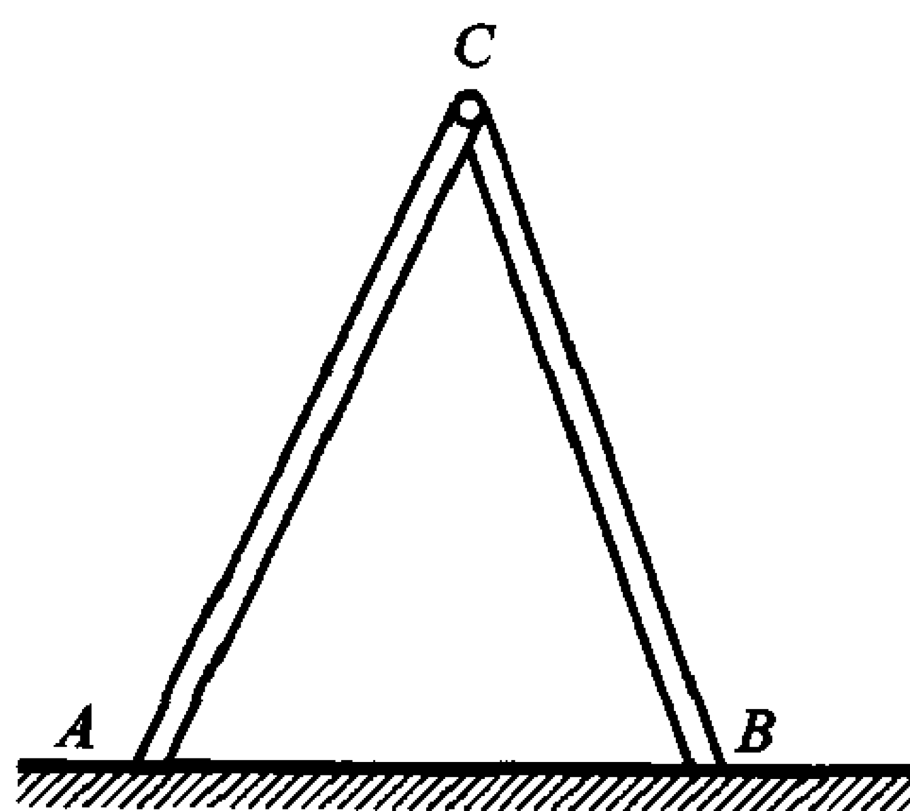


图 11-13

11-4　两均质直杆 AC 和 CB,长度相同,质量分别为 m_1 和 m_2。两杆在点 C 由铰链连接,初始时维持在铅垂面内不动,如图11-13所示。设地面绝对光滑,两杆被释放后将分开倒向地面。问 m_1 与 m_2 相等或不相等时,C 点的运动轨迹是否相同？

11-5　刚体受有一群力作用,不论各力作用点如何,此刚体质心的加速度都一样吗？

习　　题

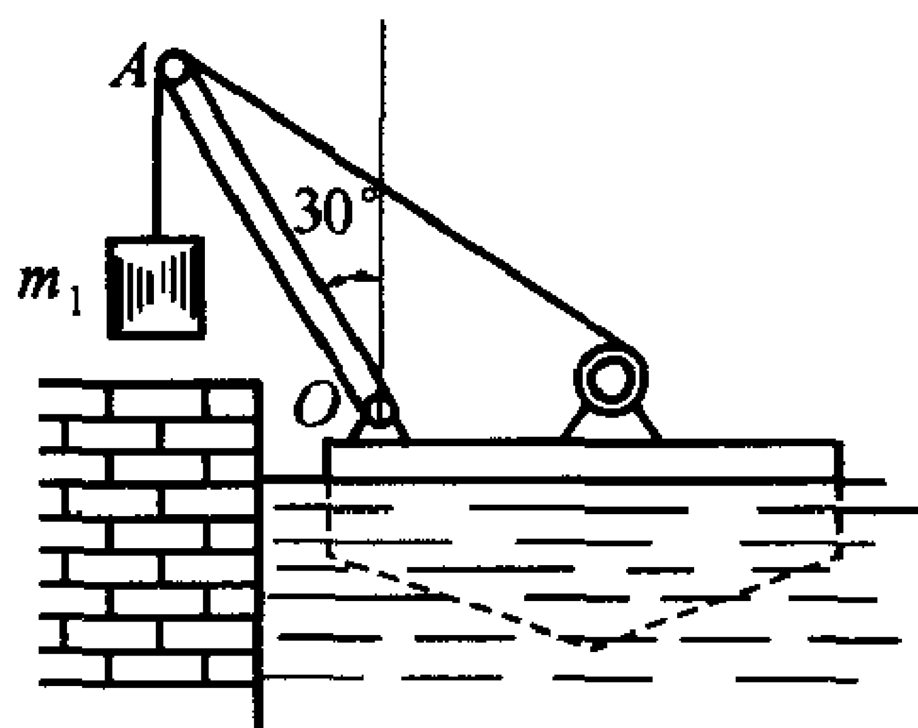
11-1　汽车以 36 km/h 的速度在水平直道上行驶。设车轮在制动后立即停止转动。问车轮对地面的动滑动摩擦因数 f 应为多大方能使汽车在制动后 6 s 停止。

11-2　跳伞者质量为 60 kg,自停留在高空中的直升飞机中跳出,落下 100 m 后,将降落伞打开。设开伞前的空气阻力略去不计,伞重不计,开伞后所受的阻力不变,经 5 s 后跳伞者的速度减为 4.3 m/s。求阻力的大小。

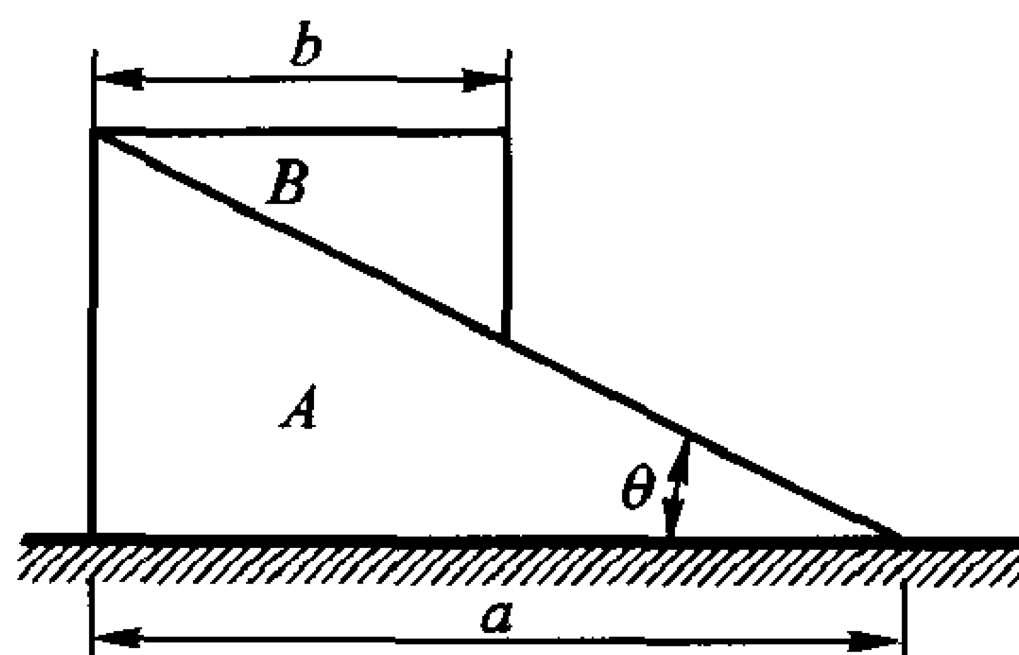
11-3　图示浮动起重机举起质量 $m_1 = 2\,000$ kg 的重物。设起重机质量 $m_2 = 20\,000$ kg,杆长 $OA = 8$ m;开始时杆与铅直位置成 60°角,水的阻力和杆重均略去不计。当起重杆 OA 转到与铅直位置成 30°角时,求起重机的位移。

11-4　图示水平面上放一均质三棱柱 A,在其斜面上又放一均质三棱柱 B。两三棱柱的横截面均为直角三角形。三棱柱 A 的质量 m_A 为三棱柱 B 质量 m_B 的三倍,其尺寸如图示。设各处摩擦不计,初始时系统静止。求当三棱柱 B 沿三棱柱 A 滑下接触到水平面时,三棱柱 A 移动的距离。

11-5　平台车质量 $m_1 = 500$ kg,可沿水平轨道运动。平台车上站有一人,质量 $m_2 = 70$ kg,车与人以共同速度 $\boldsymbol{v}_0$ 向右方运动。当人相对平台车以速度 $v_r = 2$ m/s 向左方跳出时,不计平台车水平方向的阻力及摩擦,问平台车增加的速度为多少？

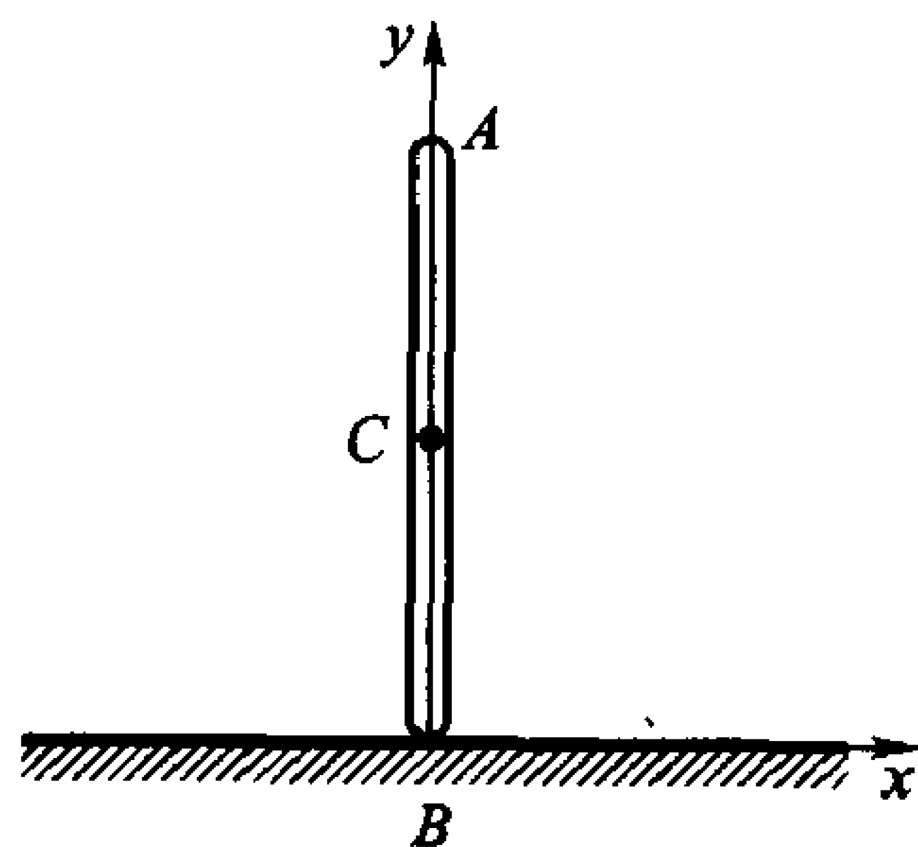


题 11-3 图

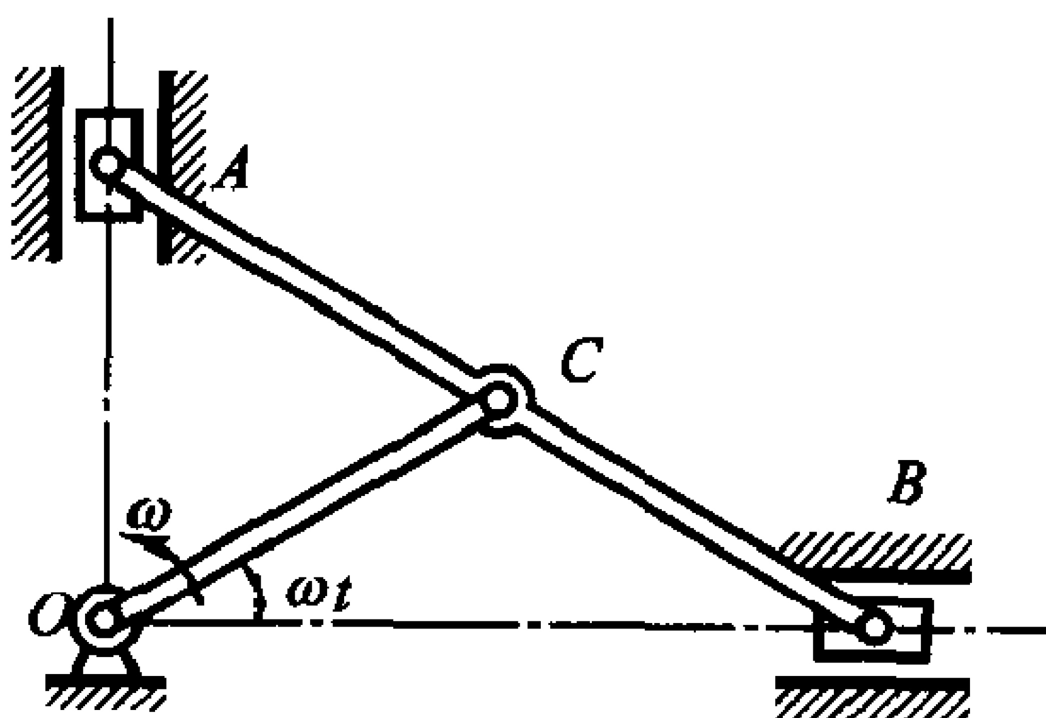


题 11-4 图

11-6 如图所示，均质杆 AB，长 l，直立在光滑的水平面上。求它从铅直位置无初速地倒下时，端点 A 相对图示坐标系的轨迹。



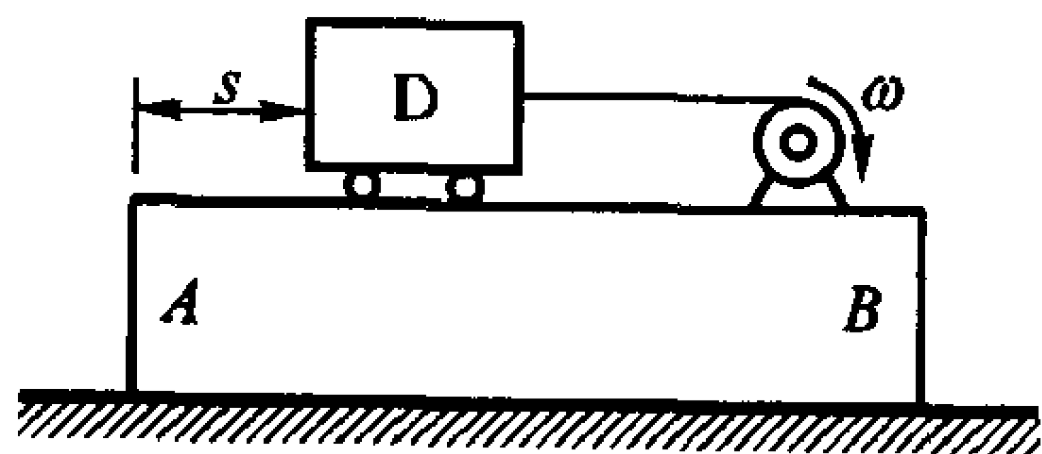
题 11-6 图



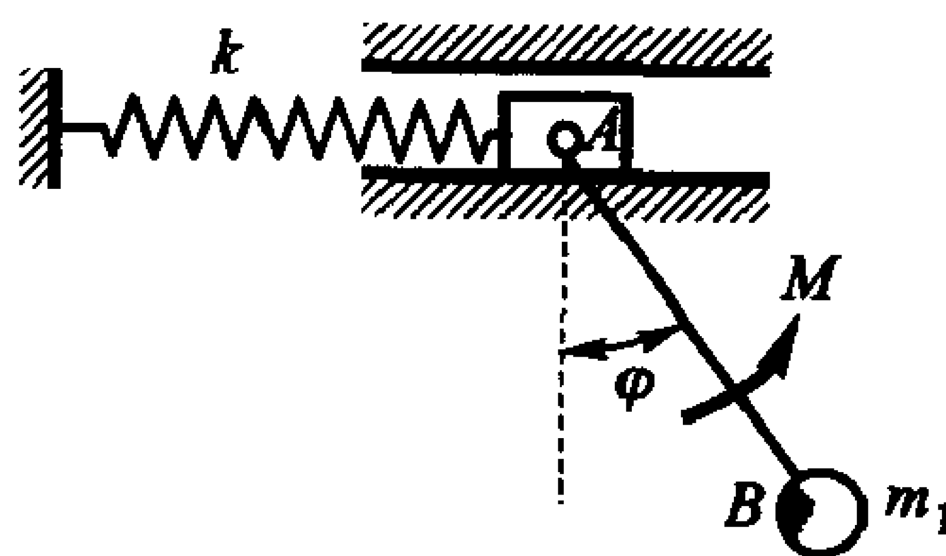
题 11-7 图

11-7 图示椭圆规尺 AB 的质量为 $2m_1$，曲柄 OC 的质量为 m_1，而滑块 A 和 B 的质量均为 m_2。已知：$OC=AC=CB=l$；曲柄和尺的质心分别在其中点上；曲柄绕 O 轴转动的角速度 ω 为常量。当开始时，曲柄水平向右，求此时质点系的动量。

11-8 质量为 m_1 的平台 AB，放于水平面上，平台与水平面间的动滑动摩擦因数为 f。质量为 m_2 的小车 D，由绞车拖动，相对于平台的运动规律为 $s=\dfrac{1}{2}bt^2$，其中 b 为已知常数。不计绞车的质量，求平台的加速度。



题 11-8 图



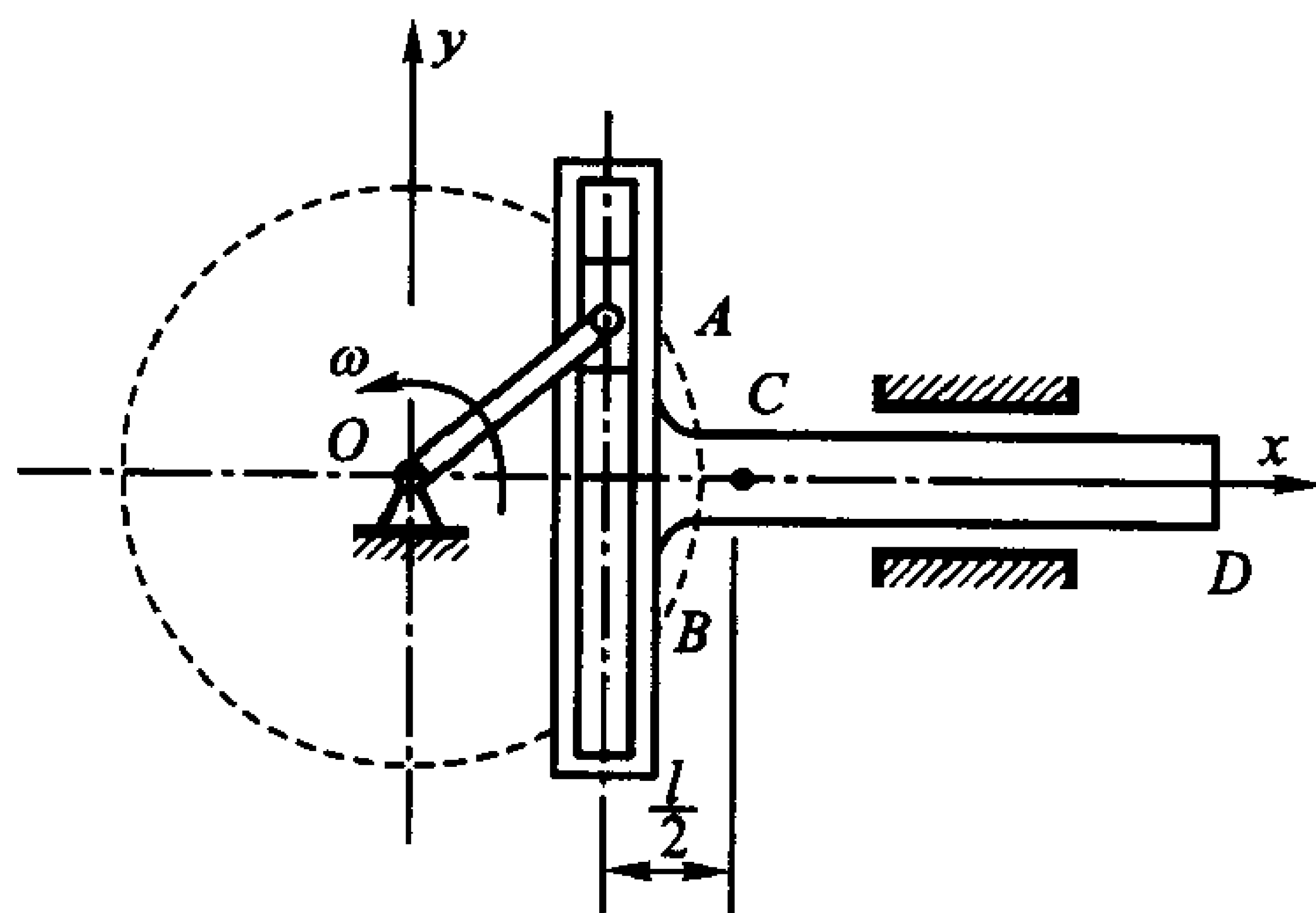
题 11-10 图

***11-9** 求题 11-4 中三棱柱 A 运动的加速度及地面对三棱柱的约束力。

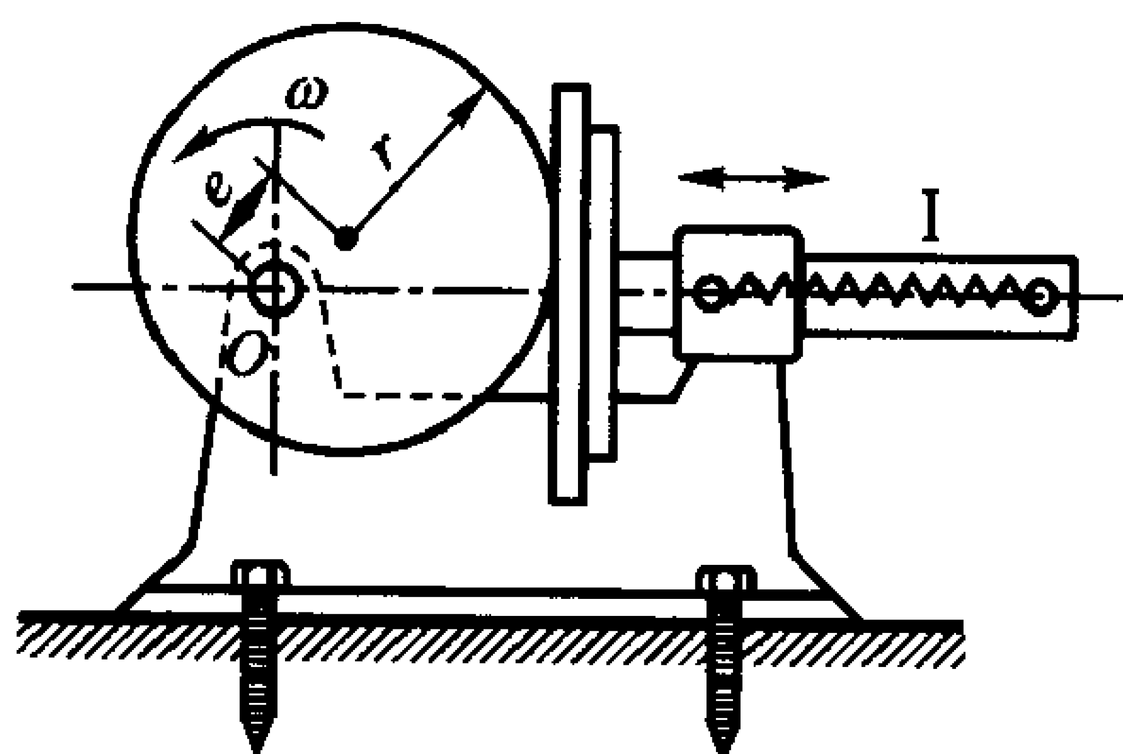
11-10 如图所示，质量为 m 的滑块 A，可以在水平光滑槽中运动，具有刚度系数为 k

的弹簧一端与滑块相连接，另一端固定。杆 AB 长度为 l，质量忽略不计，A 端与滑块 A 铰接，B 端装有质量 m_1，在铅直平面内可绕点 A 旋转。设在力偶 M 作用下转动角速度 ω 为常数。求滑块 A 的运动微分方程。

11－11　在图示曲柄滑杆机构中，曲柄以等角速度 ω 绕 O 轴转动。开始时，曲柄 OA 水平向右。已知：曲柄的质量为 m_1，滑块 A 的质量为 m_2，滑杆的质量为 m_3，曲柄的质心在 OA 的中点，$OA=l$；滑杆的质心在点 C。求：(1) 机构质量中心的运动方程；(2) 作用在轴 O 的最大水平约束力。



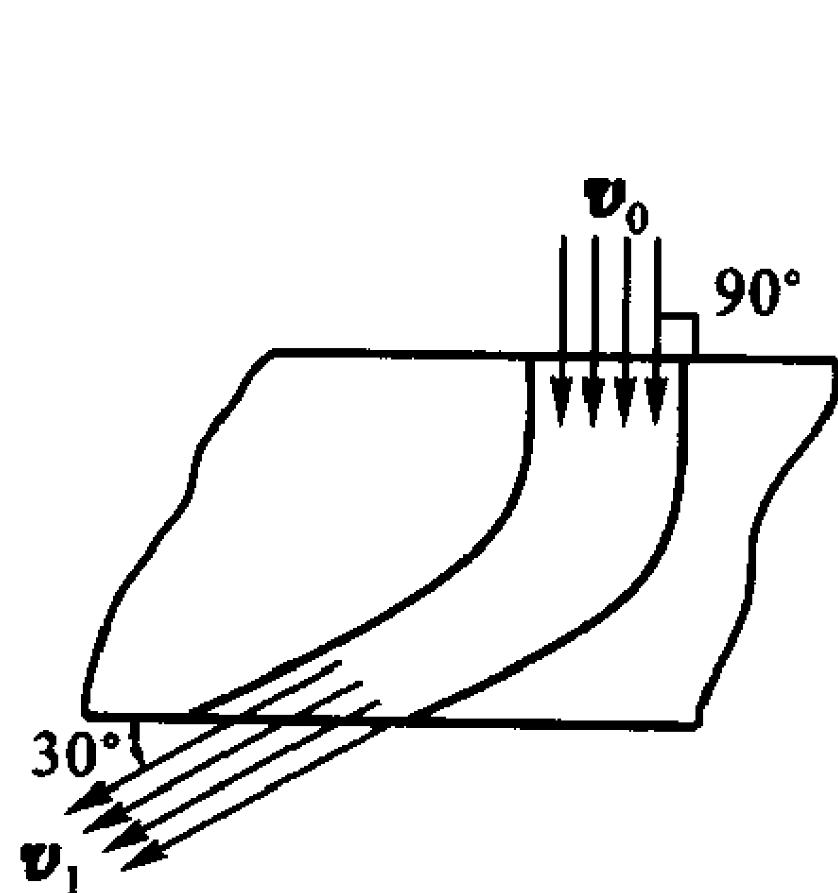
题 11－11 图



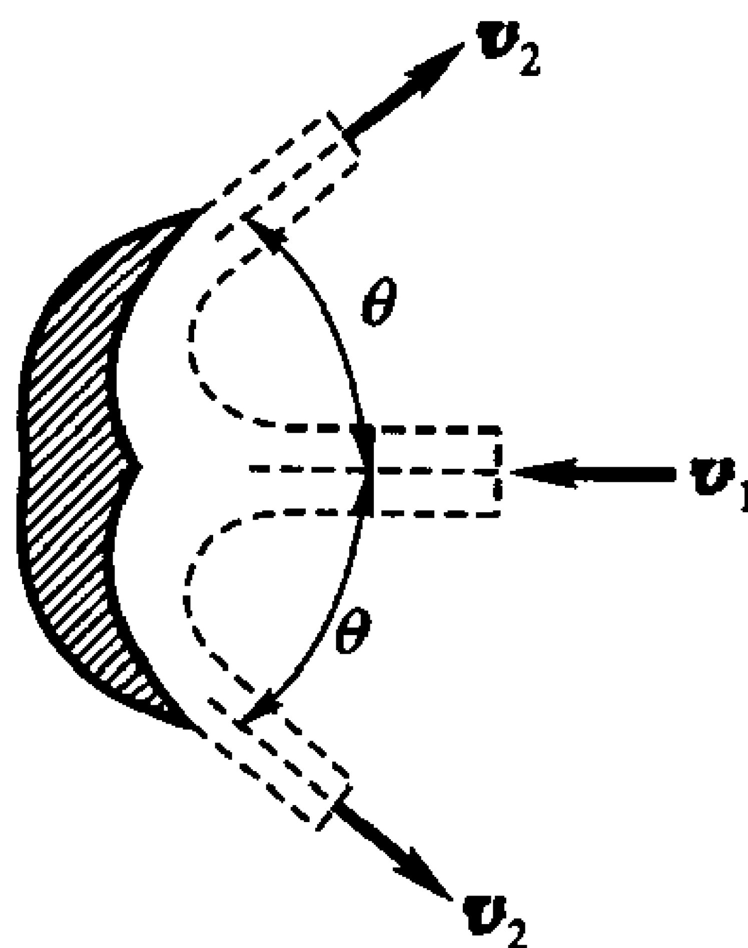
题 11－12 图

11－12　图示凸轮机构中，凸轮以等角速度 ω 绕定轴 O 转动。质量为 m_1 的滑杆 I 借右端弹簧的拉力而顶在凸轮上，当凸轮转动时，滑杆作往复运动。设凸轮为一均质圆盘，质量为 m_2，半径为 r，偏心距为 e。求在任一瞬时机座螺钉的总附加动约束力。

11－13　水流以速度 $v_0=2$ m/s 流入固定水道，速度方向与水平面成 90°角，如图所示。水流进口截面积为 0.02 m^2，出口速度 $v_1=4$ m/s，它与水平面成 30°角。求水作用在水道壁上的水平和铅直的附加压力。



题 11－13 图

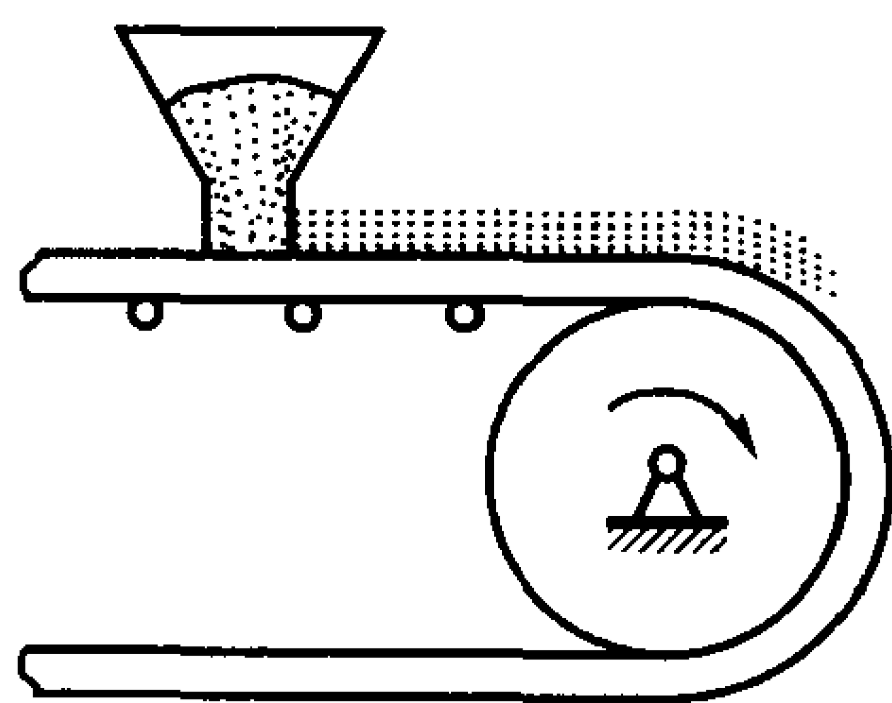


题 11－14 图

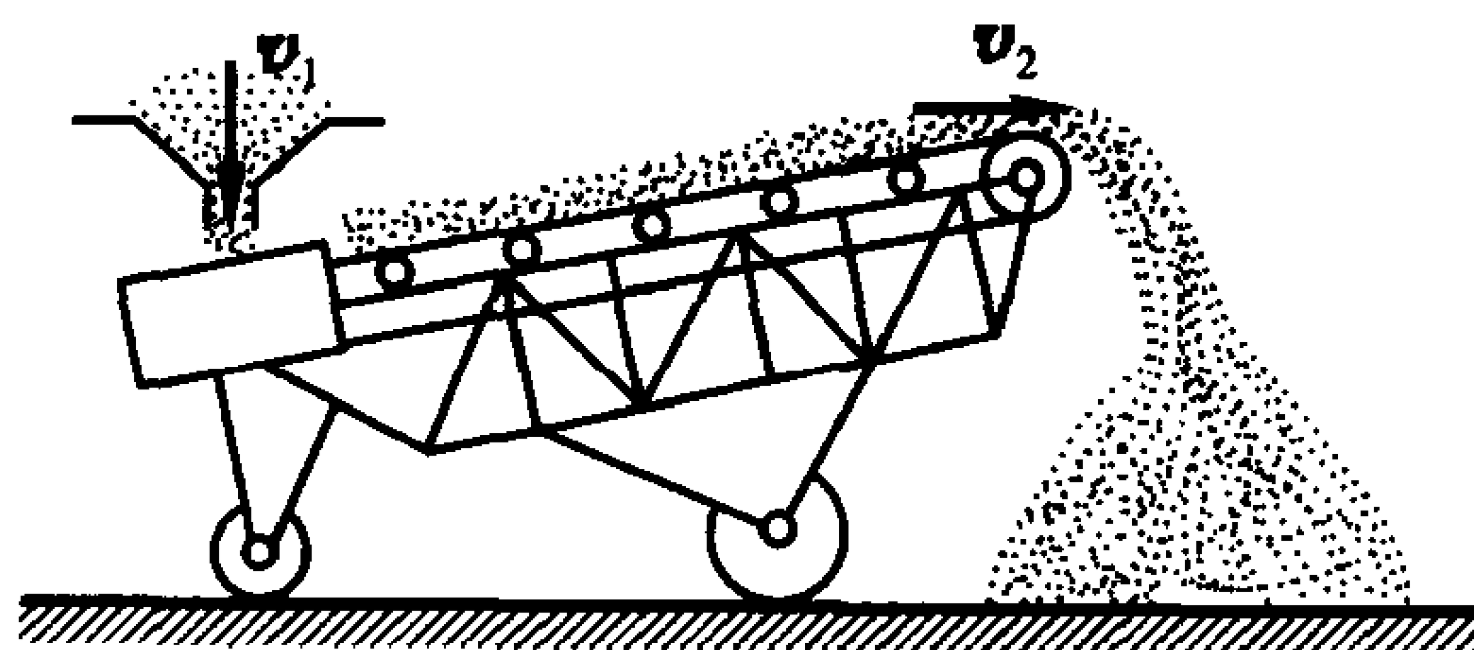
11－14　已知：水的体积流量为 q_V m^3/s，密度为 ρ kg/m^3；水冲击叶片的速度为 v_1 m/s，方向沿水平向左；水流出叶片的速度为 v_2 m/s，与水平线成 θ 角。求图示水柱对涡轮固定叶

片作用力的水平分力。

11－15 图示传送带的运煤量恒为 20 kg/s，胶带速度恒为1.5 m/s。求胶带对煤块作用的水平总推力。



题 11－15 图



题 11－16 图

11－16 图示移动式胶带输送机，每小时输送 109 m^3 的砂子。砂子的密度为 1 400 kg/m^3，输送带速度为 1.6 m/s。设砂子在入口处的速度为 v_1，方向垂直向下，在出口处的速度为 v_2，方向水平向右。如输送机不动，试问此时地面沿水平方向总的约束力有多大？

第十二章　动量矩定理

第十一章阐述的动量定理建立了作用力与动量变化之间的关系，揭示了质点系机械运动规律的一个侧面，而不是全貌。动量矩定理则是从另一个侧面，揭示出质点系相对于某一点的运动规律。本章将推导动量矩定理并阐明其应用。

§12－1　质点和质点系的动量矩

1. 质点的动量矩

设质点 Q 某瞬时的动量为 $m\boldsymbol{v}$，质点相对点 O 的位置用矢径 $\boldsymbol{r}$ 表示，如图 12－1 所示。质点 Q 的动量对于点 O 的矩，定义为质点对于点 O 的**动量矩**，即

$$\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v} \quad (12-1)$$

质点对于点 O 的动量矩是矢量，如图 12－1 所示。

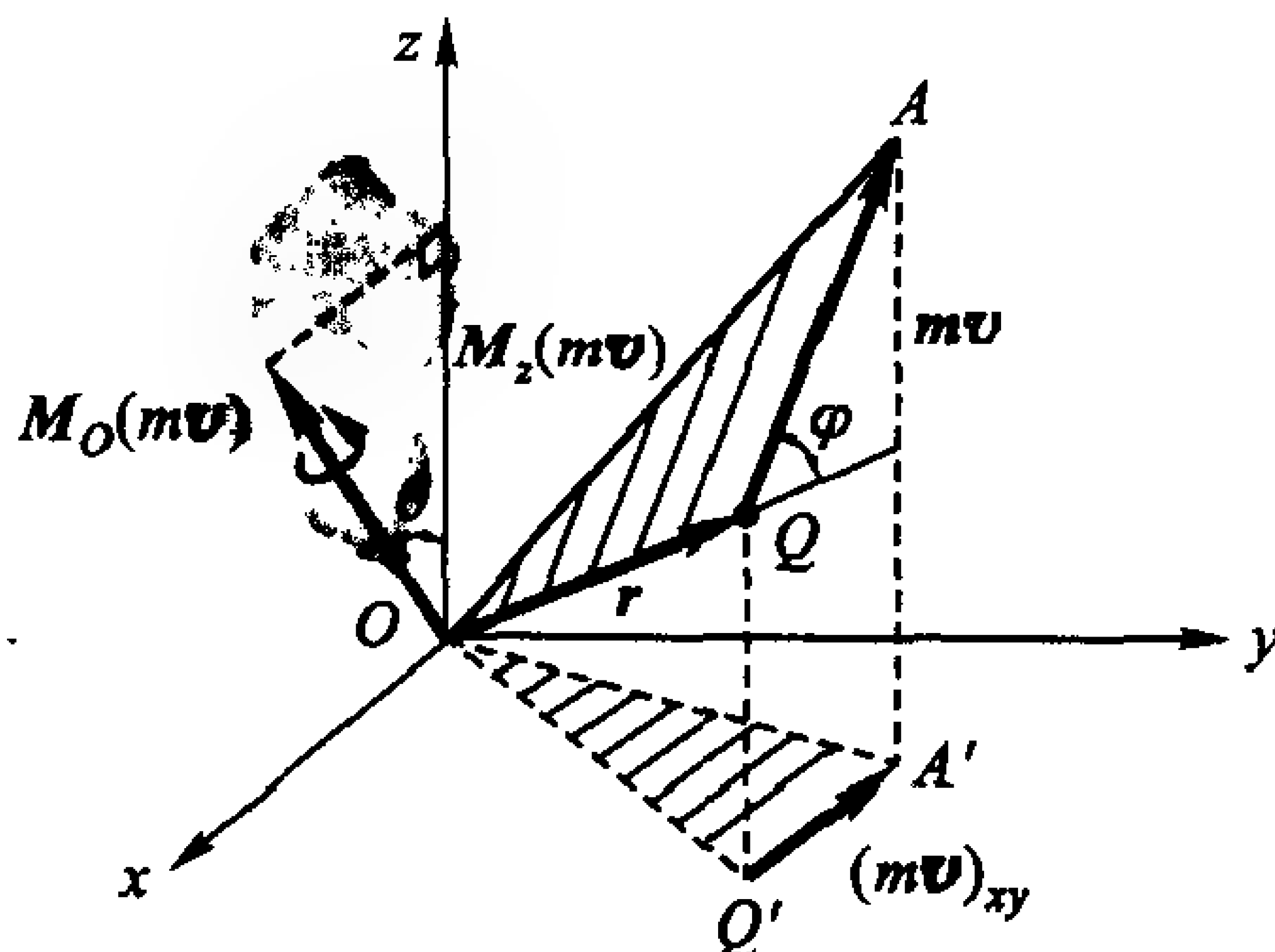


图 12－1

质点动量 $m\boldsymbol{v}$ 在 Oxy 平面内的投影 $(m\boldsymbol{v})_{xy}$ 对于点 O 的矩，定义为质点动量对于 z 轴的矩，简称对于 z 轴的动量矩。对轴的动量矩是代数量，由图 12－1 可见质点对点 O 的动量矩与对 z 轴的动量矩和力对点与对轴的矩相似，有质点对点 O 的动量矩矢在 z 轴上的投影，等于对 z 轴的动量矩，即

$$[\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v})]_z=M_z(m\boldsymbol{v}) \quad (12-2)$$

在国际单位制中动量矩的单位为 kg·m²/s。

2. 质点系的动量矩

质点系对某点 O 的动量矩等于各质点对同一点 O 的动量矩的矢量和，或称为质点系动量对点 O 的主矩，即

$$\boldsymbol{L}_O=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i) \quad (12-3)$$

质点系对某轴 z 的动量矩等于各质点对同一 z 轴动量矩的代数和，即

$$L_z=\sum_{i=1}^{n}M_z(m_i\boldsymbol{v}_i) \quad (12-4)$$

利用式(12-2),得

$$[\boldsymbol{L}_O]_z = L_z \tag{12-5}$$

即质点系对某点 O 的动量矩矢在通过该点的 z 轴上的投影等于质点系对于该轴的动量矩。

刚体平移时,可将全部质量集中于质心,作为一个质点计算其动量矩。

刚体绕定轴转动是工程中最常见的一种运动情况。绕 z 轴转动的刚体如图 12-2 所示,它对转轴的动量矩为

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} M_z(m_i \boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \omega r_i r_i = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

令 $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J_z$,称为刚体对于 z 轴的**转动惯量**。于是得

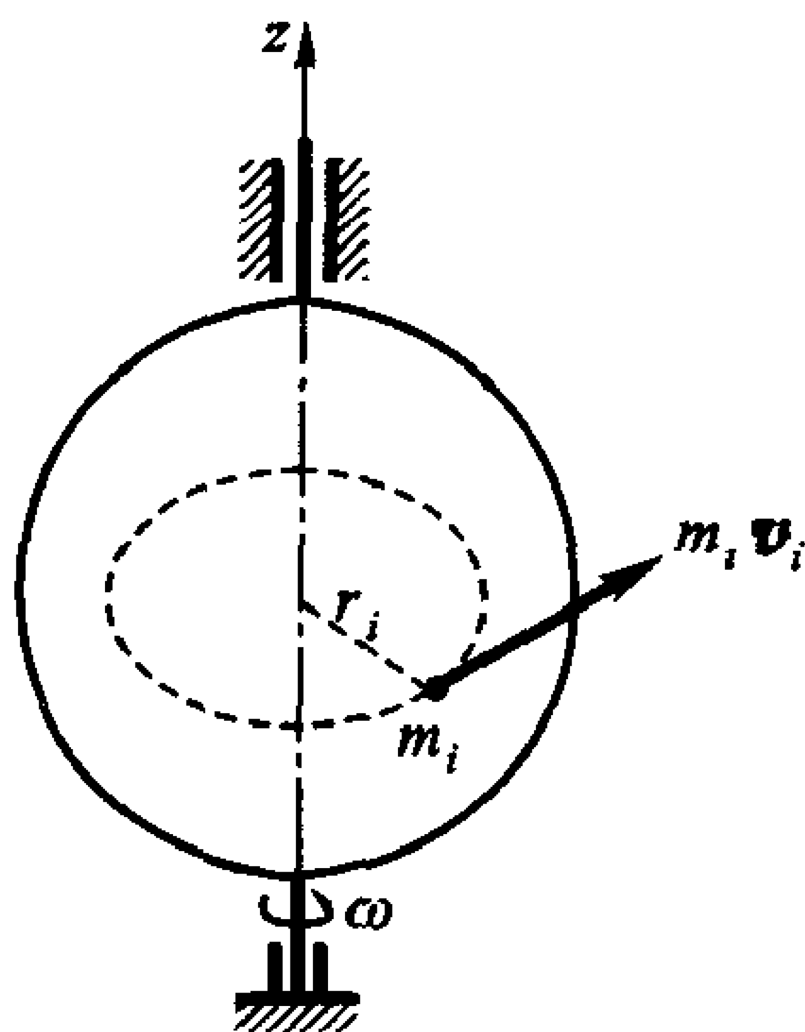


图 12-2

$$L_z = J_z \omega \tag{12-6}$$

即:绕定轴转动刚体对其转轴的动量矩等于刚体对转轴的转动惯量与转动角速度的乘积。

§12-2 动量矩定理

1. 质点的动量矩定理

设质点对定点 O 的动量矩为 $\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v})$,作用力 $\boldsymbol{F}$ 对同一点的矩为 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$,如图 12-3 所示。

将动量矩对时间取一次导数,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})$$

根据质点动量定理 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}$,且 O 为定点,有 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}$,则上式可改写为

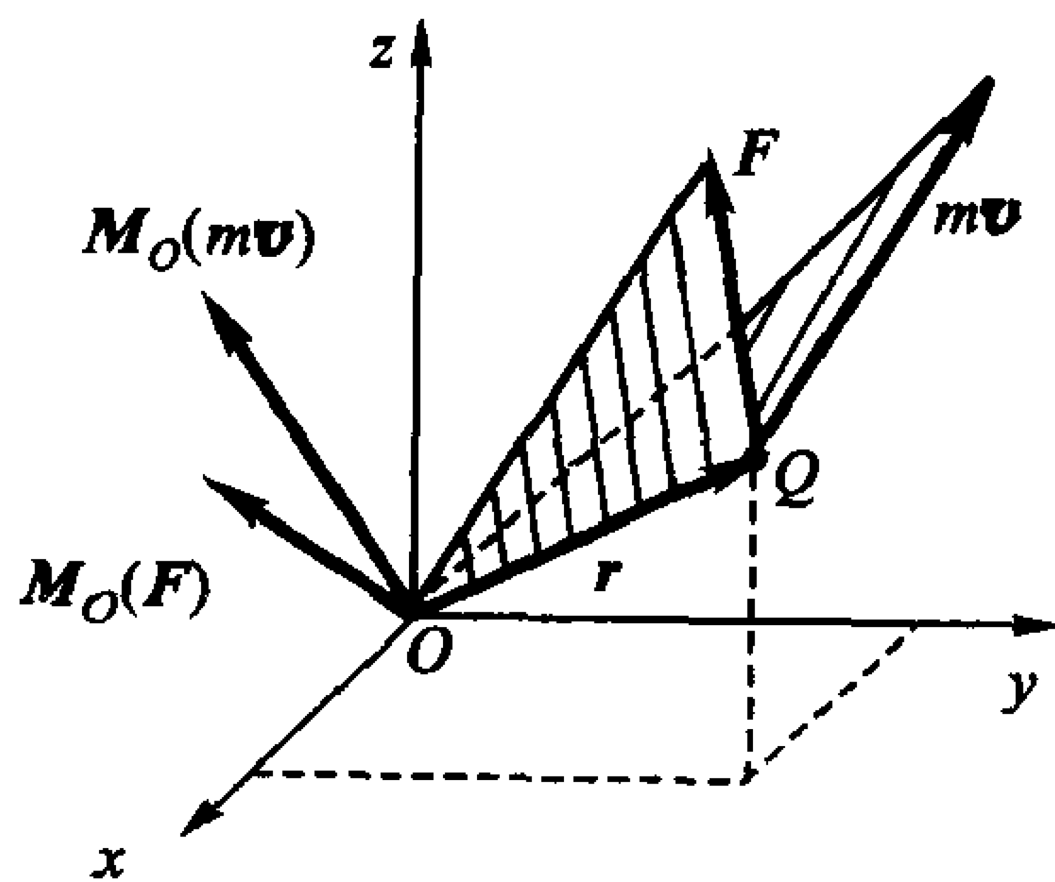


图 12-3

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

因为 $\boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v} = 0$, $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$,于是得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) \tag{12-7}$$

式(12-7)为质点**动量矩定理**:质点对某定点的动量矩对时间的一阶导数,等于作用力对同一点的矩。

取式(12-7)在直角坐标轴上的投影式,并将对点的动量矩与对轴的动量矩的关系式(12-2)代入,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_x(m\boldsymbol{v})=M_x(\boldsymbol{F})\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_y(m\boldsymbol{v})=M_y(\boldsymbol{F})\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_z(m\boldsymbol{v})=M_z(\boldsymbol{F}) \tag{12-8}$$

2. 质点系的动量矩定理

设质点系内有 n 个质点,作用于每个质点的力分为内力 $\boldsymbol{F}_i^{(i)}$ 和外力 $\boldsymbol{F}_i^{(e)}$。根据质点的动量矩定理有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(i)})+\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

这样的方程共有 n 个,相加后得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(i)})+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

由于内力总是大小相等、方向相反地成对出现,因此上式右端的第一项

$$\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(i)})=0$$

上式左端为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_O$$

于是得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_O=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) \tag{12-9}$$

式(12-9)为质点系动量矩定理:质点系对于某定点 O 的动量矩对时间的导数,等于作用于质点系的外力对于同一点的矩的矢量和(外力对点 O 的主矩)。

应用时,取投影式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_x=\sum_{i=1}^{n}M_x(\boldsymbol{F}_i^{(e)}),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_y=\sum_{i=1}^{n}M_y(\boldsymbol{F}_i^{(e)}),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_z=\sum_{i=1}^{n}M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) \tag{12-10}$$

必须指出,上述动量矩定理的表达形式只适用于对固定点或固定轴。对于一般的动点或动轴,其动量矩定理具有较复杂的表达式。

例 12-1 高炉运送矿石用的卷扬机如图 12-4 所示。已知鼓轮的半径为 R,转动惯量为 J,作用在鼓轮上的力偶矩为 M。小车和矿石总质量为 m,轨道的倾角为 θ。设绳的质量和各处摩擦均忽略不计,求小车的加速度 $\boldsymbol{a}$。

解: 取小车与鼓轮组成质点系,视小车为质点。以顺时针为正,此质点系对轴 O 的动

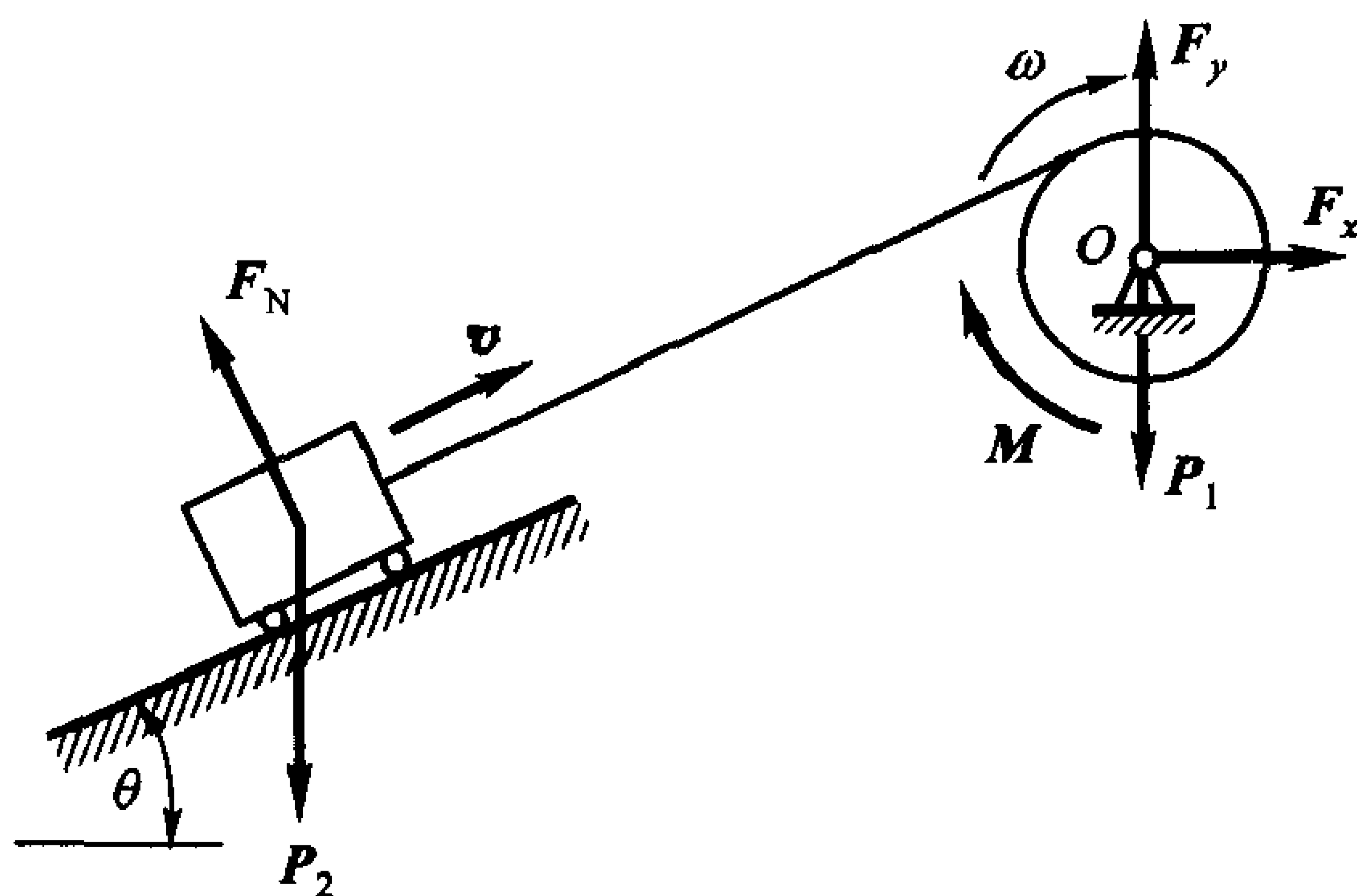


图 12-4

量矩为

$$L_O = J\omega + mvR$$

作用于质点系的外力除力偶 M、重力 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 外，尚有轴承 O 的约束力 $\boldsymbol{F}_x$，$\boldsymbol{F}_y$ 和轨道对小车的约束力 $\boldsymbol{F}_N$。其中 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{F}_x$，$\boldsymbol{F}_y$ 对轴 O 力矩为零。系统外力对轴 O 的矩为

$$M^{(e)} = M - mg\sin\theta \cdot R$$

由质点系对轴 O 的动量矩定理，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J\omega + mvR] = M - mg\sin\theta \cdot R$$

因 $\omega = \frac{v}{R}$，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$，于是解得

$$a = \frac{MR - mgR^2\sin\theta}{J + mR^2}$$

例 12-2 如图 12-5 所示的水轮机转轮，每两叶片间的水流皆相同。在图面内的进口水的速度为 $\boldsymbol{v}_1$，出口速度为 $\boldsymbol{v}_2$，θ_1 和 θ_2 分别为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 与切线方向的夹角。如总的体积流量为 q_V，求水流对转轮的转动力矩。

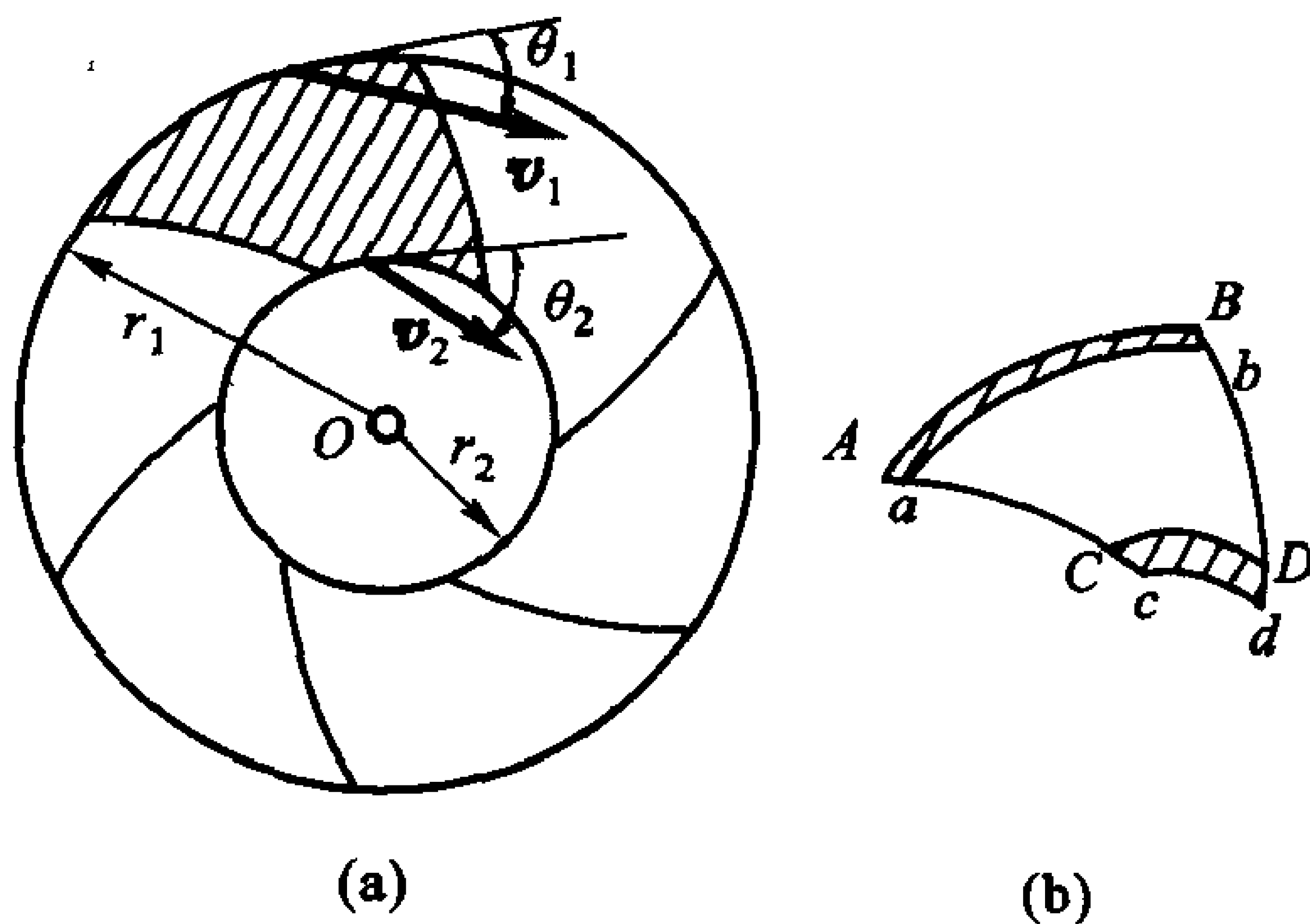


图 12-5

解： 取两叶片间的水(图中阴影部分)为研究的质点系，经过 dt 时间，此部分水由图 12-5b 中的 $ABCD$ 位置移到 $abcd$。设流动是稳定的，则其对转轴 O 的动量矩改变为

$$dL_O = L_{abcd} - L_{ABCD} = L_{CDcd} - L_{ABab}$$

如转轮有 n 个叶片，水的密度为 ρ，则有

$$L_{CDcd} = \frac{1}{n} q_V \rho dt v_2 r_2 \cos\theta_2$$

$$L_{ABab} = \frac{1}{n} q_V \rho dt v_1 r_1 \cos\theta_1$$

由此，

$$dL_O = \frac{1}{n} q_V \rho dt (v_2 r_2 \cos\theta_2 - v_1 r_1 \cos\theta_1)$$

转轮有 n 个叶片，由动量矩定理，水流所受到对点 O 的总力矩为

$$M_O(\boldsymbol{F}) = n\frac{dL_O}{dt} = q_V \rho (v_2 r_2 \cos\theta_2 - v_1 r_1 \cos\theta_1)$$

转轮所受的转动力矩 M 与 $M_O(\boldsymbol{F})$ 等值反向。

3. 动量矩守恒定律

如果作用于质点的力对于某定点 O 的矩恒等于零，则由式(12-7)知，质点对该点的动量矩保持不变，即

$$\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v}) = \text{恒矢量}$$

如果作用于质点的力对于某定轴的矩恒等于零，则由式(12-8)知，质点对该轴的动量矩保持不变。例如 $M_z(\boldsymbol{F})=0$，则

$$M_z(m\boldsymbol{v}) = \text{恒量}$$

以上结论称为质点动量矩守恒定律。

由式(12-9)可知，质点系的内力不能改变质点系的动量矩。

当外力对于某定点(或某定轴)的主矩等于零时，质点系对于该点(或该轴)的动量矩保持不变。这就是质点系动量矩守恒定律。

质点在运动中受到恒指向某定点 O 的力 $\boldsymbol{F}$ 作用，称该质点在有心力作用下运动，如行星绕太阳运动、人造卫星绕地球运动等。如图 12-6 所示，力 $\boldsymbol{F}$ 对于点 O 的矩恒等于零，于是质点对于点 O 的动量矩守恒，即

$$\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v} = \text{恒矢量}$$

由上式可知：

(1) 矢量积 $\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$ 方向不变，即矢径 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 位于一固定平面，因此，质点在有心力作用下运动的轨迹是平面曲线。

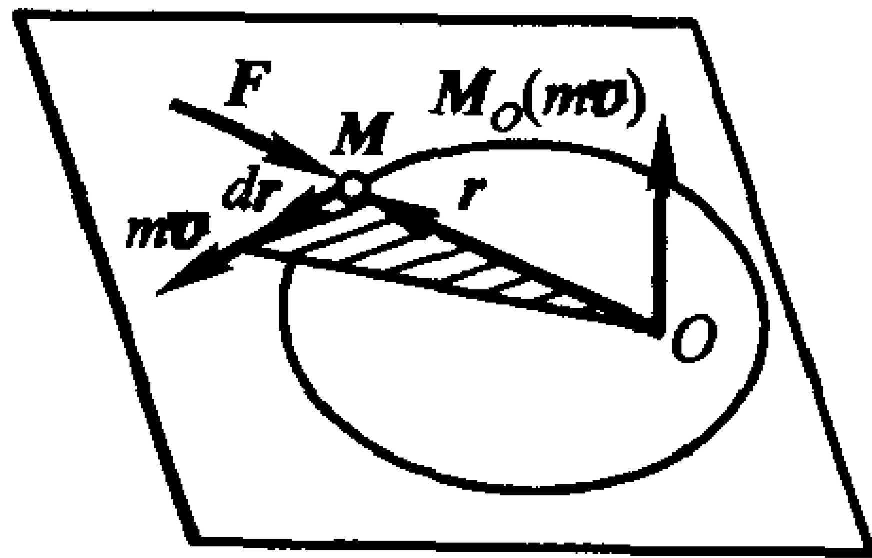


图 12-6

(2) 由 $\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}\times m\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \text{恒矢量}$，可得 $\boldsymbol{r}\times\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \text{恒量}$。由图 12-6 可见，$\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}$ 为图中阴影三角形面积 dA 的两倍，因而有

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\text{常量}$$

A 是质点矢径 $\boldsymbol{r}$ 所扫过的面积，$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ 称为面积速度，上述结论称为面积速度定理。

由此定理可知，当人造卫星绕地球运动时，离地心近时速度大，离地心远时速度小。

例 12－3 图 12－7a 中，小球 A，B 以细绳相连，质量皆为 m，其余构件质量不计。忽略摩擦，系统绕铅垂轴 z 自由转动，初始时系统的角速度为 ω_0。当细绳拉断后，求各杆与铅垂线成 θ 角时系统的角速度 ω（图 12－7b）。

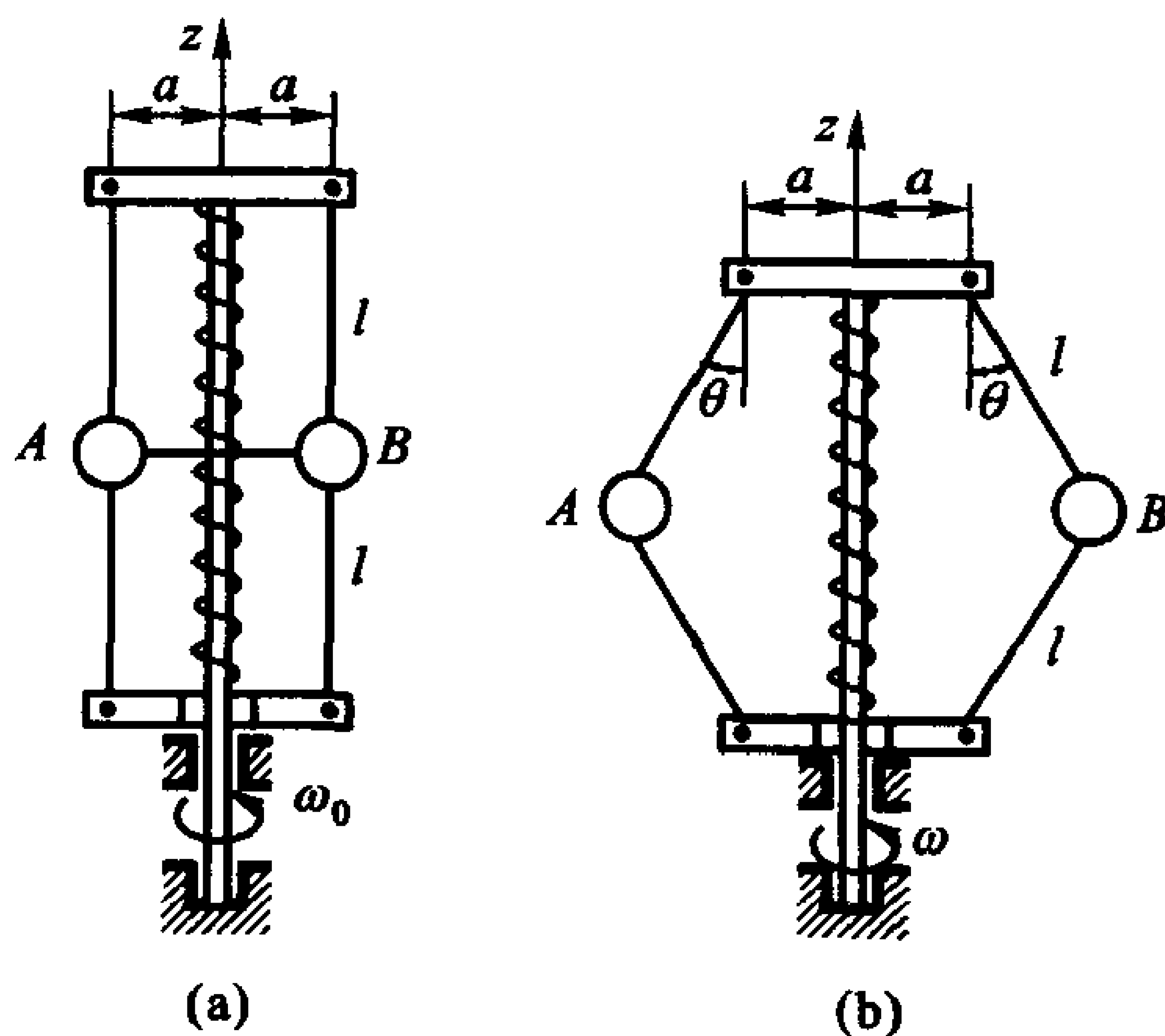


图 12－7

解： 此系统所受的重力和轴承的约束力对于转轴的矩都等于零，因此系统对于转轴的动量矩守恒。

当 $\theta=0$ 时，动量矩

$$L_{z1}=2\ ma\omega_0\ a=2ma^2\omega_0$$

当 $\theta\neq0$ 时，动量矩

$$L_{z2}=2m(a+l\sin\theta)^2\omega$$

由 $L_{z1}=L_{z2}$，得

$$\omega=\frac{a^2}{(a+l\sin\theta)^2}\omega_0$$

§12－3 刚体绕定轴的转动微分方程

设定轴转动刚体上作用有主动力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 和轴承约束力 $\boldsymbol{F}_{N1},\boldsymbol{F}_{N2}$，如图 12－8 所示，这些力都是外力。刚体对于 z 轴的转动惯量为 J_z，角速度为 ω，对于 z 轴的动量矩为 $J_z\omega$。

如果不计轴承中的摩擦，轴承约束力对于 z 轴的力矩等于零，根据质点系对于 z 轴的动量矩定理有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_z\omega) = \sum_{i=1}^{n} M_z(\boldsymbol{F}_i)$$

或

$$J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} M_z(\boldsymbol{F}_i) \qquad (12-11)$$

上式也可写成

$$J_z\alpha = \sum M_z(\boldsymbol{F}) \qquad (12-11)'$$

或

$$J_z\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \sum M_z(\boldsymbol{F}) \qquad (12-11)''$$

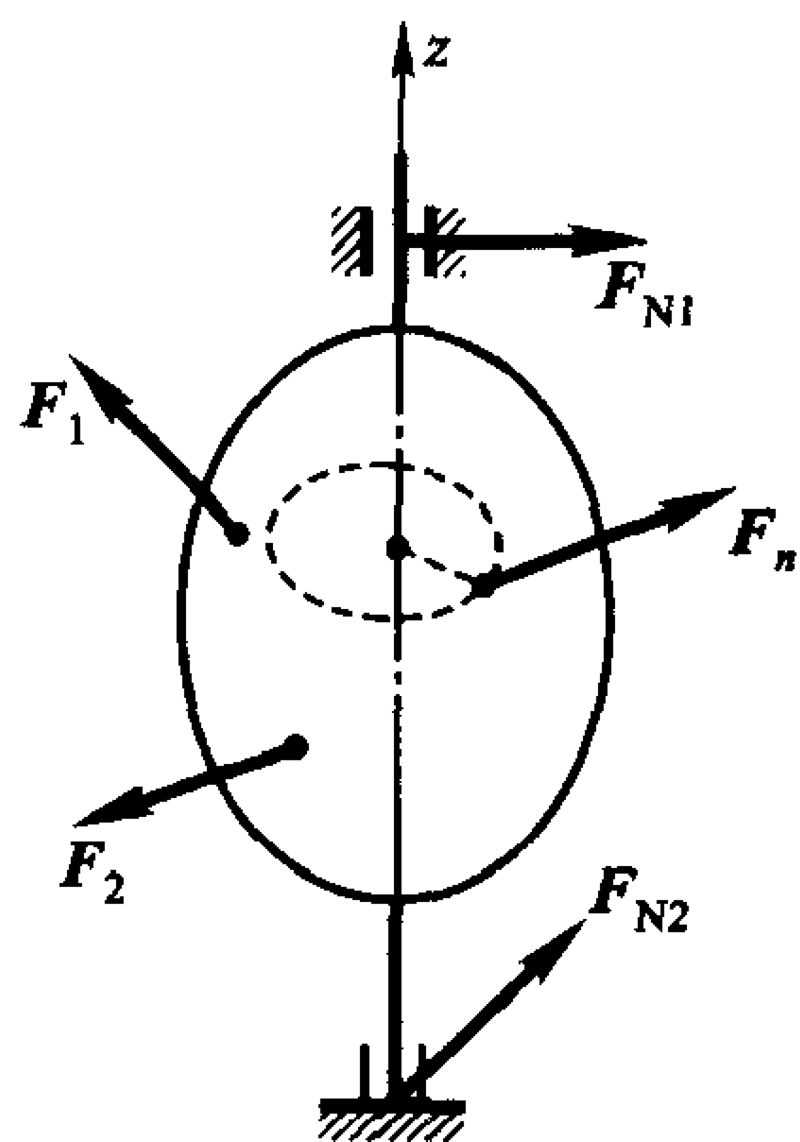


图 12－8

以上各式均称为刚体绕定轴转动微分方程。

由式(12－11)′可见，刚体绕定轴转动时，其主动力对转轴的矩使刚体转动状态发生变化。力矩大，转动角加速度大；如力矩相同，刚体转动惯量大，则角加速度小，反之，角加速度大。可见，刚体转动惯量的大小表现了刚体转动状态改变的难易程度，即：**转动惯量**是刚体转动惯性的度量。

刚体的转动微分方程 $J_z\alpha = \sum M_z(\boldsymbol{F})$ 与质点的运动微分方程 $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$ 有相似的形式，因而，其求解方法也是相似的。

例 12－4 如图 12－9 所示，已知滑轮半径为 R，转动惯量为 J，带动滑轮的胶带拉力为 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$。求滑轮的角加速度 α。

解： 根据刚体绕定轴的转动微分方程有

$$J\alpha = (F_1 - F_2)R$$

于是得

$$\alpha = \frac{(F_1 - F_2)R}{J}$$

由上式可见，只有当定滑轮为匀速转动(包括静止)或虽非匀速转动，但可忽略滑轮的转动惯量时，跨过定滑轮的胶带拉力才是相等的。

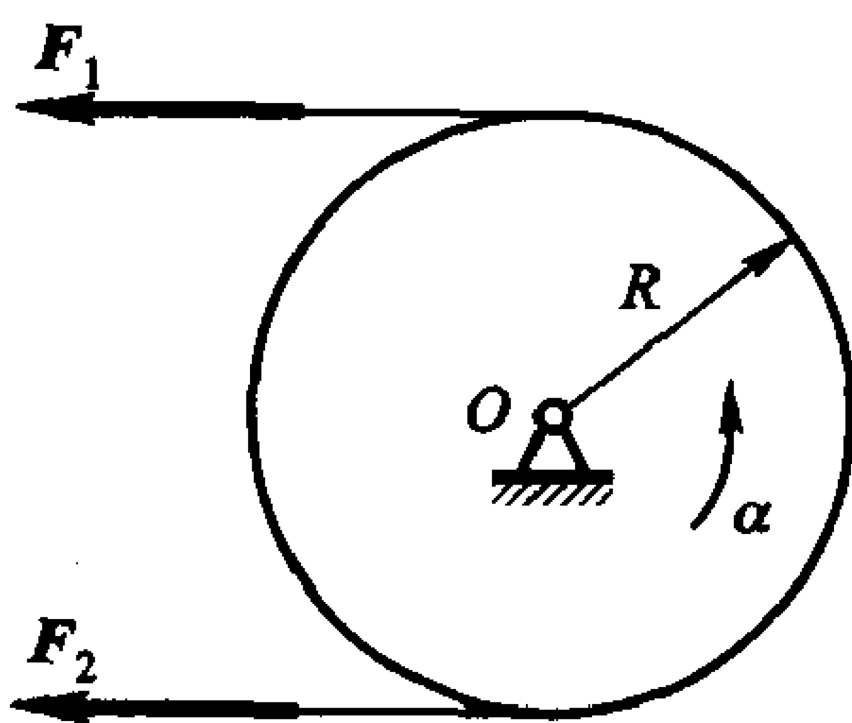


图 12－9

例 12－5 图 12－10 中物理摆(或称为复摆)的质量为 m，C 为其质心，摆对悬挂点的转动惯量为 J_O。求微小摆动的周期。

解： 设 φ 角以逆时针方向为正。当小 φ 角为正时，重力对点 O 之矩为负。由此，摆的转动微分方程为

$$J_O\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mga\sin\varphi$$

刚体作微小摆动，有 $\sin\varphi \approx \varphi$，于是转动微分方程可写为

$$J_O\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mga\varphi$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mga}{J_O}\varphi=0$$

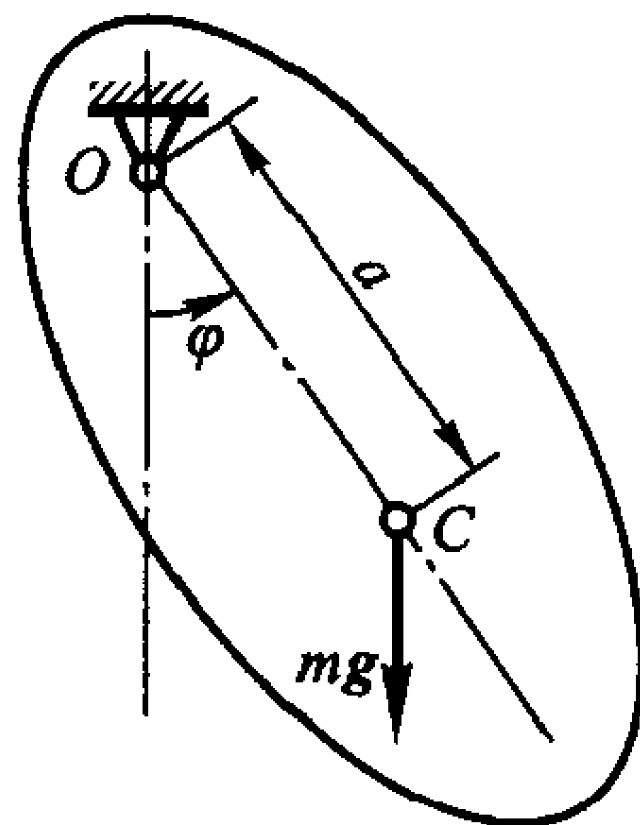


图 12-10

此方程的通解为

$$\varphi=\varphi_0\sin\left(\sqrt{\frac{mga}{J_O}}t+\theta\right)$$

φ_0 称为角振幅，θ 是初相位，它们都由运动初始条件确定。

摆动周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mga}}$$

工程中可用上式，通过测定零件（如曲柄、连杆等）的摆动周期，以计算其转动惯量。

例 12-6 飞轮对轴 O 的转动惯量为 J_O，以角速度 ω_0 绕轴 O 转动，如图 12-11 所示。制动时，闸块给轮以正压力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$。已知闸块与轮之间的滑动摩擦因数为 f，轮的半径为 R，轴承的摩擦忽略不计。求制动所需的时间 t。

解： 以轮为研究对象。作用于轮上的力除 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 外，还有摩擦力 $\boldsymbol{F}$ 和重力、轴承约束力。取逆时针方向为正，刚体的转动微分方程为

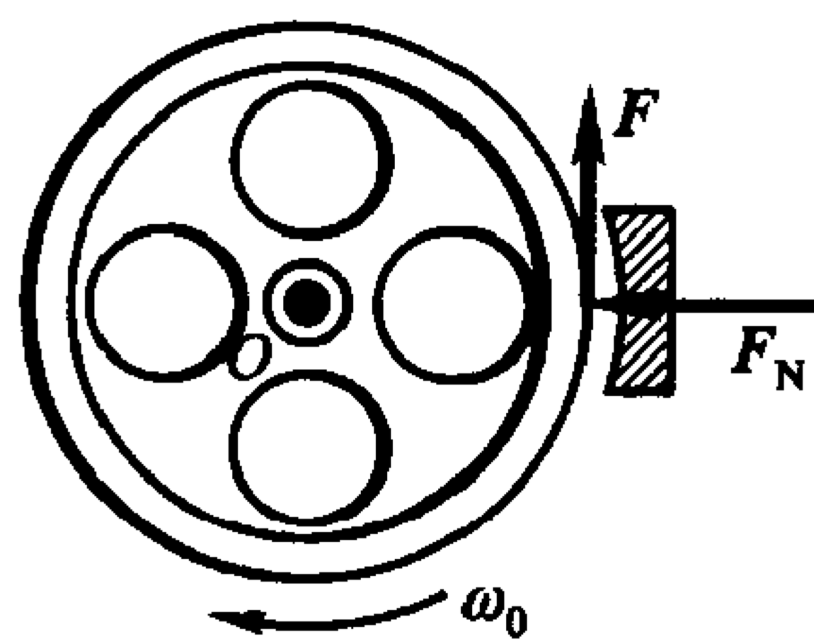


图 12-11

$$J_O\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=FR=fF_{\mathrm{N}}R$$

将上式积分，并根据已知条件确定积分上下限，有

$$\int_{-\omega_0}^{0}J_O\mathrm{d}\omega=\int_0^t fF_{\mathrm{N}}R\mathrm{d}t$$

由此解得

$$t=\frac{J_O\omega_0}{fF_{\mathrm{N}}R}$$

例 12-7 传动轴系如图 12-12a 所示。设轴 Ⅰ 和 Ⅱ 的转动惯量分别为 J_1 和 J_2，传动比 $i_{12}=\frac{R_2}{R_1}$，R_1 和 R_2 分别为轮 Ⅰ 和 Ⅱ 的半径。今在轴 Ⅰ 上作用主动力矩 M_1，轴 Ⅱ 上有阻力矩 M_2，转向如图所示。设各处摩擦忽略不计，求轴 Ⅰ 的角加速度。

解： 轴 Ⅰ 与轴 Ⅱ 为两个转动刚体，应分别取为两个研究对象，受力情况如图 12-12b 所示。

两轴对轴心的转动微分方程分别为

$$J_1\alpha_1=M_1-F_{\mathrm{t}}'R_1,\ J_2\alpha_2=F_{\mathrm{t}}R_2-M_2$$

因 $F_{\mathrm{t}}'=F_{\mathrm{t}}$，$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=i_{12}=\frac{R_2}{R_1}$，于是得

$$\alpha_1=\frac{M_1-\frac{M_2}{i_{12}}}{J_1+\frac{J_2}{i_{12}^2}}$$

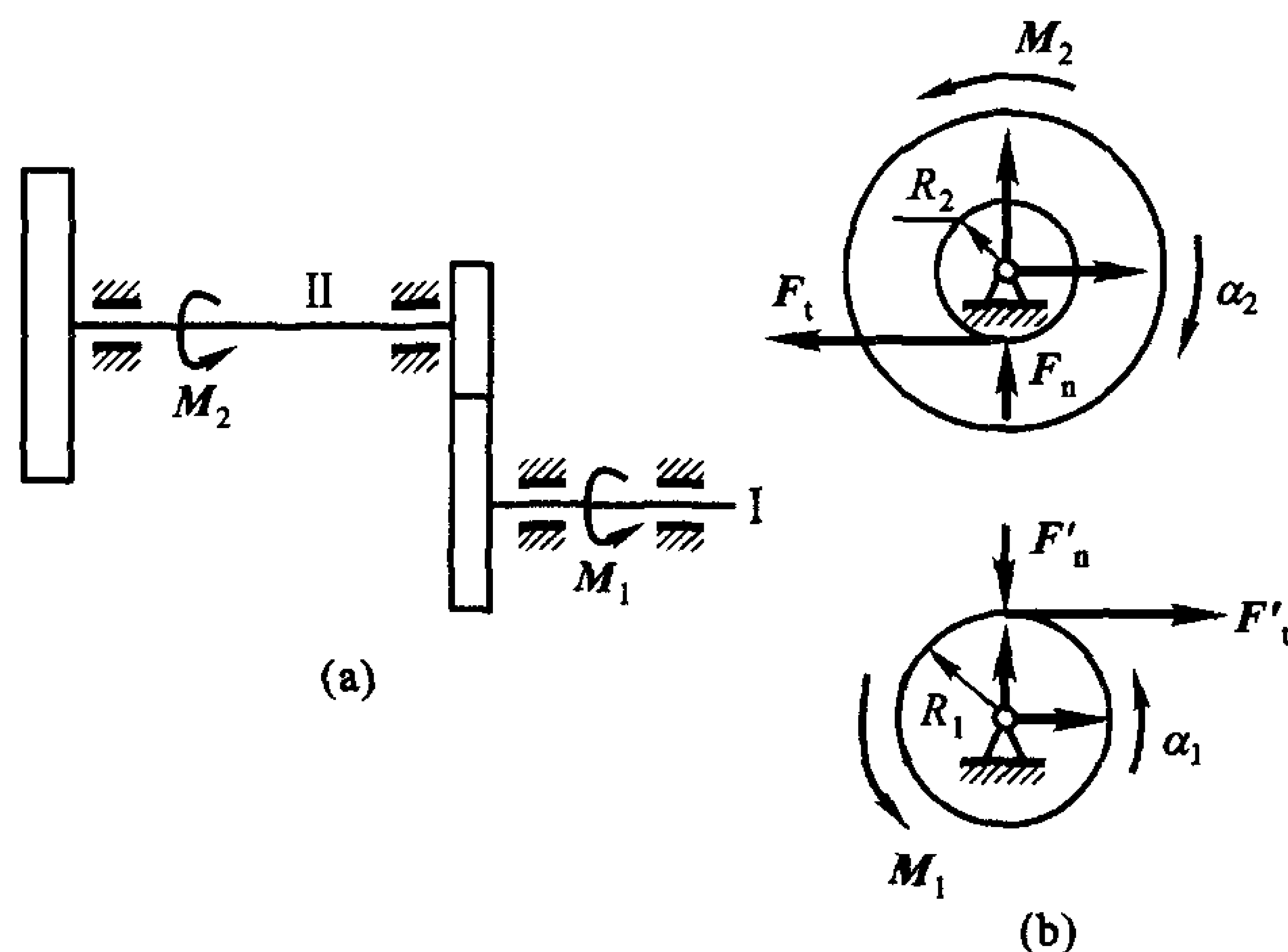


图 12－12

§ 12－4　刚体对轴的转动惯量

刚体的转动惯量是刚体转动时惯性的度量,刚体对任意轴 z 的转动惯量定义为

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \tag{12-12}$$

由上式可见,转动惯量的大小不仅与质量大小有关,而且与质量的分布情况有关。在国际单位制中其单位为 $\mathrm{kg \cdot m^2}$。

工程中,常常根据工作需要来选定转动惯量的大小。例如往复式活塞发动机、冲床和剪床等机器常在转轴上安装一个大飞轮,并使飞轮的质量大部分分布在轮缘,如图 12－13 所示。这样的飞轮转动惯量大,机器受到冲击时,角加速度小,可以保持比较平稳的运转状态。又如,仪表中的某些零件必须具有较高的灵敏度,因此这些零件的转动惯量必须尽可能地小,为此,这些零件用轻金属制成,并且尽量减小体积。

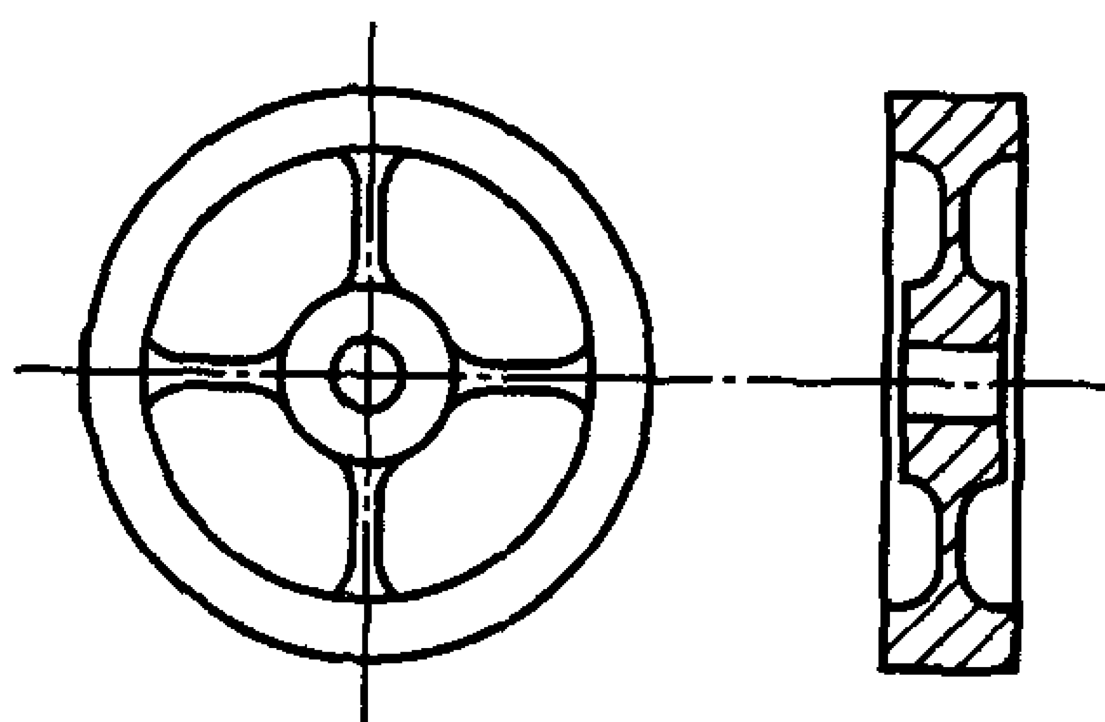


图 12－13

1. 简单形状物体的转动惯量计算

(1) 均质细直杆(图 12－14)对于 z 轴的转动惯量

设杆长为 l,单位长度的质量为 ρ_l,取杆上一微段 $\mathrm{d}x$,其质量 $m = \rho_l \mathrm{d}x$,则

此杆对于 z 轴的转动惯量为

$$J_z = \int_0^l (\rho_l \mathrm{d}x \cdot x^2) = \rho_l \cdot \frac{l^3}{3}$$

杆的质量 $m = \rho_l l$，于是

$$J_z = \frac{1}{3} m l^2 \qquad (12-13)$$

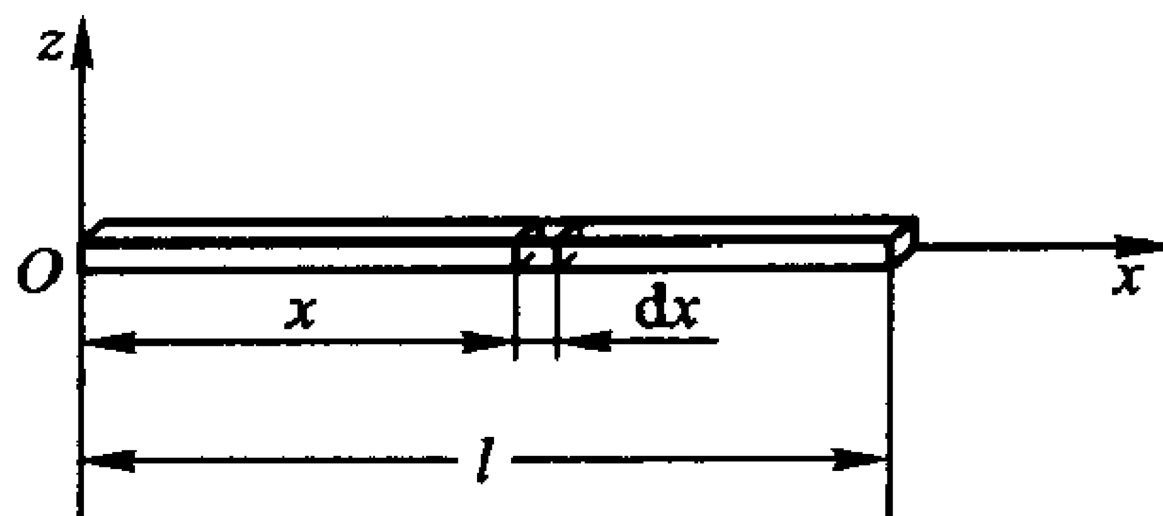


图 12－14

(2) 均质薄圆环(图 12－15)对于中心轴的转动惯量

设圆环质量为 m，质量 m_i 到中心轴的距离都等于半径 R，所以圆环对于中心轴 z 的转动惯量为

$$J_z = \sum m_i R^2 = R^2 \sum m_i = mR^2 \qquad (12-14)$$

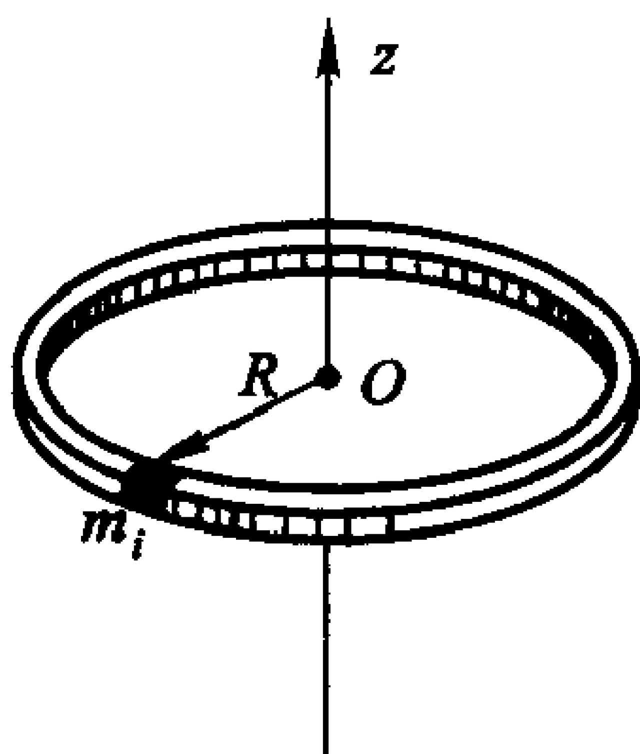


图 12－15

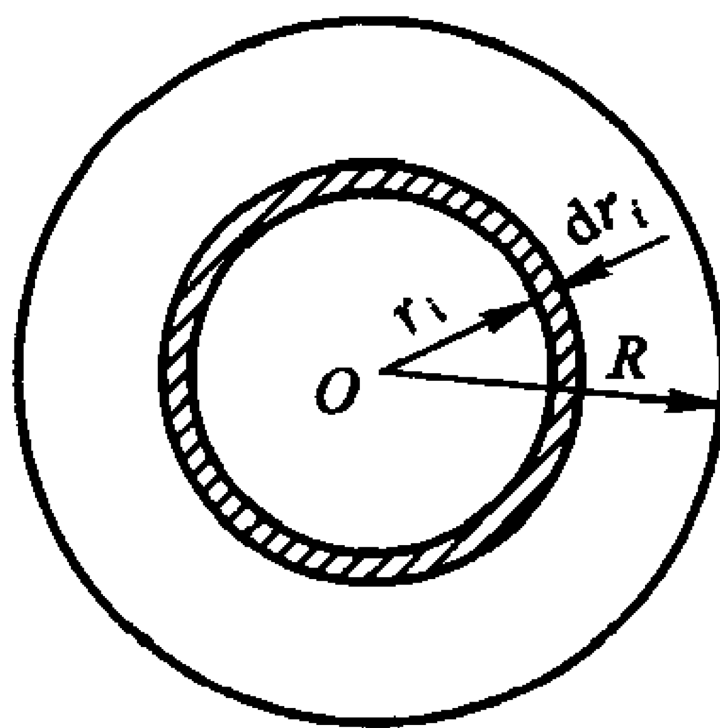


图 12－16

(3) 均质圆板(图 12－16)对于中心轴的转动惯量

设圆板的半径为 R，质量为 m。将圆板分为无数同心的薄圆环，任一圆环的半径为 r_i，宽度为 $\mathrm{d}r_i$，则薄圆环的质量为

$$m_i = 2\pi r_i \mathrm{d}r_i \cdot \rho_A$$

式中 $\rho_A = \frac{m}{\pi R^2}$，是均质圆板单位面积的质量。因此圆板对于中心轴的转动惯量为

$$J_O = \int_0^R 2\pi r \rho_A \mathrm{d}r \cdot r^2 = 2\pi \rho_A \frac{R^4}{4}$$

或

$$J_O = \frac{1}{2} mR^2 \qquad (12-15)$$

2. 回转半径(或惯性半径)

回转半径(或惯性半径)定义为

$$\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}} \qquad (12-16)$$

对于几何形状相同的均质物体,其回转半径的公式是相同的,例如:

细直杆　$\rho_z=\frac{\sqrt{3}}{3}l$,均质圆环　$\rho_z=R$,均质圆板　$\rho_z=\frac{\sqrt{2}}{2}R$

由式(12-16),有

$$J_z=m\rho_z^2 \tag{12-17}$$

即物体的转动惯量等于该物体的质量与回转半径平方的乘积。

在机械工程手册中,列出了简单几何形状或几何形状已标准化的零件的回转半径,以供工程技术人员查阅。

3. 平行轴定理

定理　刚体对于任一轴的转动惯量,等于刚体对于通过质心、并与该轴平行的轴的转动惯量,加上刚体的质量与两轴间距离平方的乘积,即

$$J_z=J_{zC}+md^2 \tag{12-18}$$

证明:如图 12-17 所示,设点 C 为刚体的质心,刚体对于通过质心的 z_1 轴的转动惯量为 J_{zC},刚体对于平行于该轴的另一轴 z 的转动惯量为 J_z,两轴间距离为 d。分别以 C,O 两点为原点,作直角坐标轴系 $Cx_1y_1z_1$ 和 $Oxyz$,不失一般性,可令轴 y 与轴 y_1 重合。由图易见:

$$J_{zC}=\sum m_ir_1^2=\sum m_i(x_1^2+y_1^2),J_z=\sum m_ir^2=\sum m_i(x^2+y^2)$$

因为 $x=x_1$,$y=y_1+d$,于是

$$J_z=\sum m_i[x_1^2+(y_1+d)^2]=\sum m_i(x_1^2+y_1^2)+2d\sum m_iy_1+d^2\sum m_i$$

由质心坐标公式

$$y_C=\frac{\sum m_iy_1}{\sum m_i}$$

当坐标原点取在质心 C 时,$y_C=0$,$\sum m_iy_i=0$,又有$\sum m_i=m$,于是得

$$J_z=J_{zC}+md^2$$

定理证毕。

由平行轴定理可知,刚体对于诸平行轴,以通过质心的轴的转动惯量为最小。

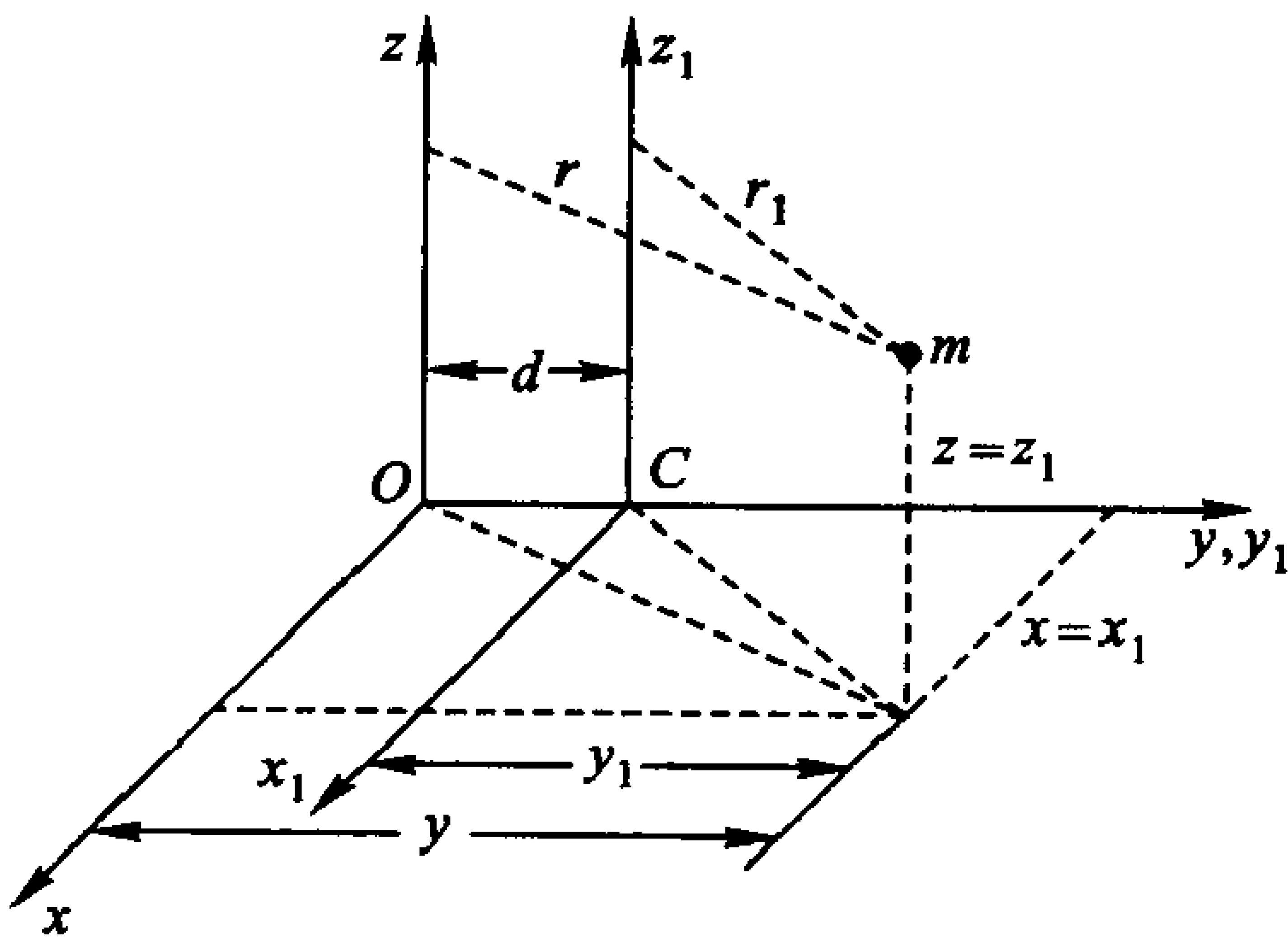


图 12-17

例 12-8　质量为 m,长为 l 的均质细直杆如图 12-18 所示,求此杆对于垂直于杆轴且通过质心 C 的轴 z_C 的转动惯量。

解:　由式(12-13)知,均质细直杆对于通过杆端点 A 且与杆垂直的 z 轴的转动惯量为

$$J_z=\frac{1}{3}ml^2$$

应用平行轴定理，对于 z_C 轴的转动惯量为

$$J_{zC}=J_z-m\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{1}{12}ml^2 \tag{12-19}$$

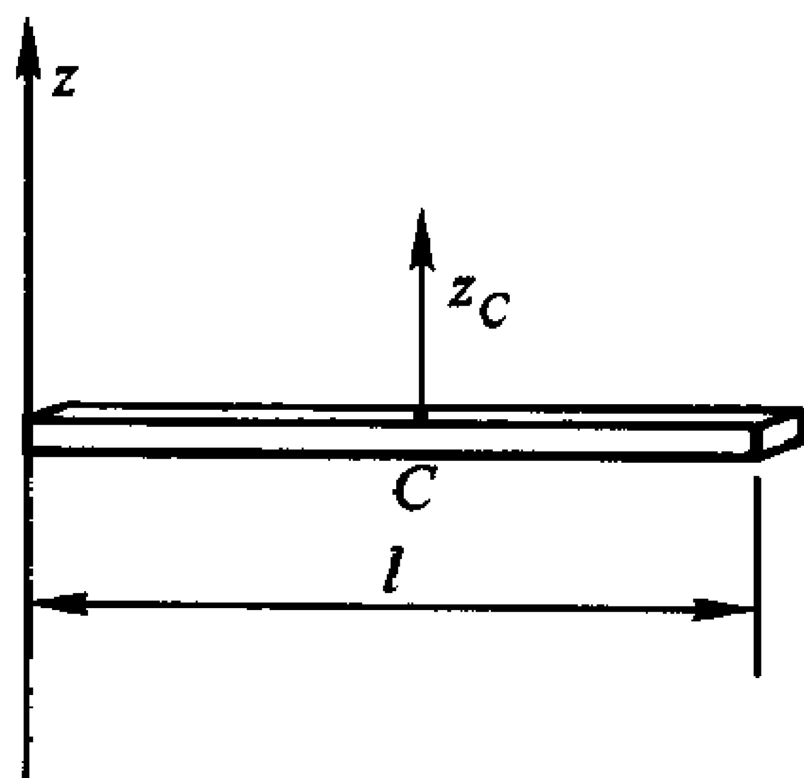


图 12-18

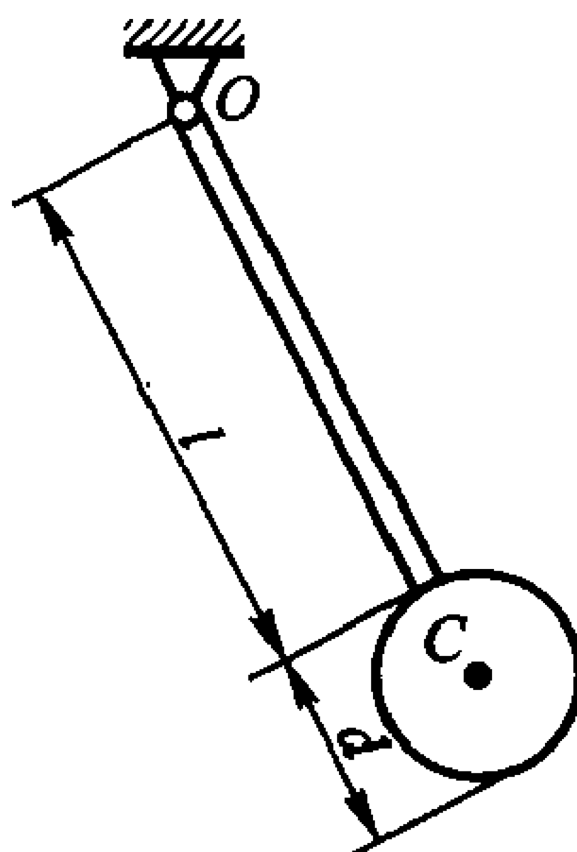


图 12-19

例 12-9　钟摆简化如图 12-19 所示。已知均质细杆和均质圆盘的质量分别为 m_1 和 m_2，杆长为 l，圆盘直径为 d。求摆对于通过悬挂点 O 的水平轴的转动惯量。

解：　摆对于水平轴 O 的转动惯量

$$J_O=J_{O杆}+J_{O盘}$$

式中

$$J_{O杆}=\frac{1}{3}m_1l^2$$

设 J_C 为圆盘对于中心 C 的转动惯量，则

$$\begin{aligned}J_{O盘}&=J_C+m_2\left(l+\frac{d}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{2}m_2\left(\frac{d}{2}\right)^2+m_2\left(l+\frac{d}{2}\right)^2\\&=m_2\left(\frac{3}{8}d^2+l^2+ld\right)\end{aligned}$$

于是得

$$J_O=\frac{1}{3}m_1l^2+m_2\left(\frac{3}{8}d^2+l^2+ld\right)$$

例 12-10　如图 12-20 所示，质量为 m 的均质空心圆柱体外径为 R_1，内径为 R_2，求对于中心轴 z 的转动惯量。

解：　空心圆柱可看成由两个实心圆柱体组成，外圆柱体的转动惯量为 J_1，内圆柱体的转动惯量 J_2 取负值，即

$$J_z=J_1-J_2$$

设 m_1、m_2 分别为外、内圆柱体的质量，则

$$J_1=\frac{1}{2}m_1R_1^2,J_2=\frac{1}{2}m_2R_2^2$$

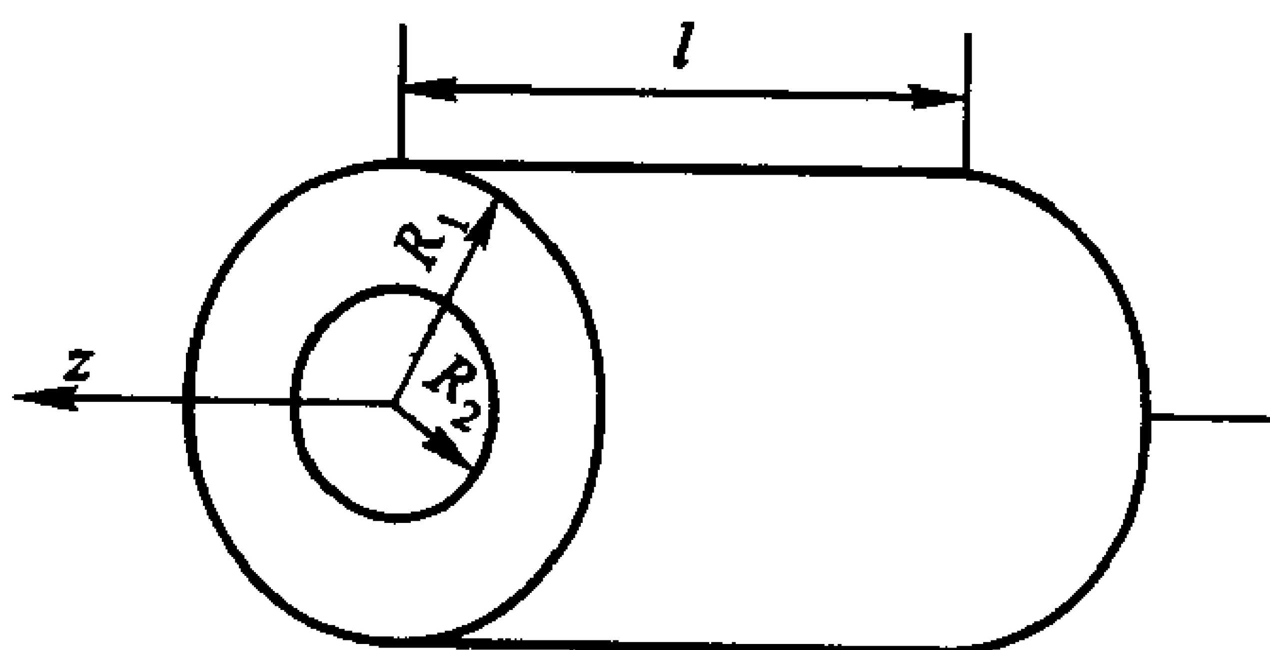


图 12-20

于是

$$J_z=\frac{1}{2}m_1R_1^2-\frac{1}{2}m_2R_2^2$$

设单位体积的质量为 ρ，则

$$m_1=\rho\pi R_1^2l,m_2=\rho\pi R_2^2l$$

代入前式，得

$$J_z=\frac{1}{2}\rho\pi l(R_1^4-R_2^4)=\frac{1}{2}\rho\pi l(R_1^2-R_2^2)(R_1^2+R_2^2)$$

注意到 $\rho\pi l(R_1^2-R_2^2)=m$，则得

$$J_z=\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2) \tag{12-20}$$

工程中，对于几何形状复杂的物体，常用实验方法测定其转动惯量。

例如，欲求曲柄对于轴 O 的转动惯量，可将曲柄在轴 O 悬挂起来，并使其作微幅摆动，如图 12－21 所示。由例 12－5 有

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

其中 mg 为曲柄重量，l 为重心 C 到轴心 O 的距离。测定 mg，l 和摆动周期 T，则曲柄对于轴 O 的转动惯量可按照下式计算：

$$J=\frac{T^2mgl}{4\pi^2}$$

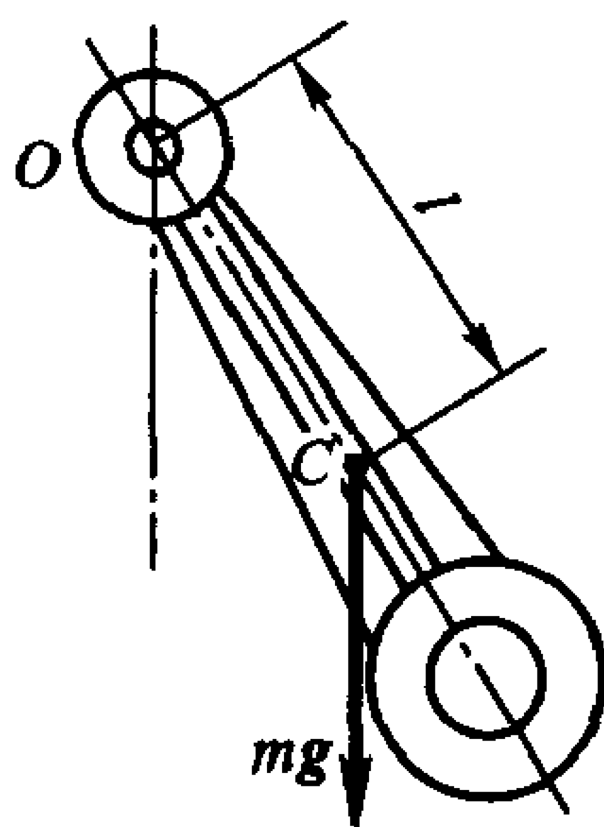


图 12－21

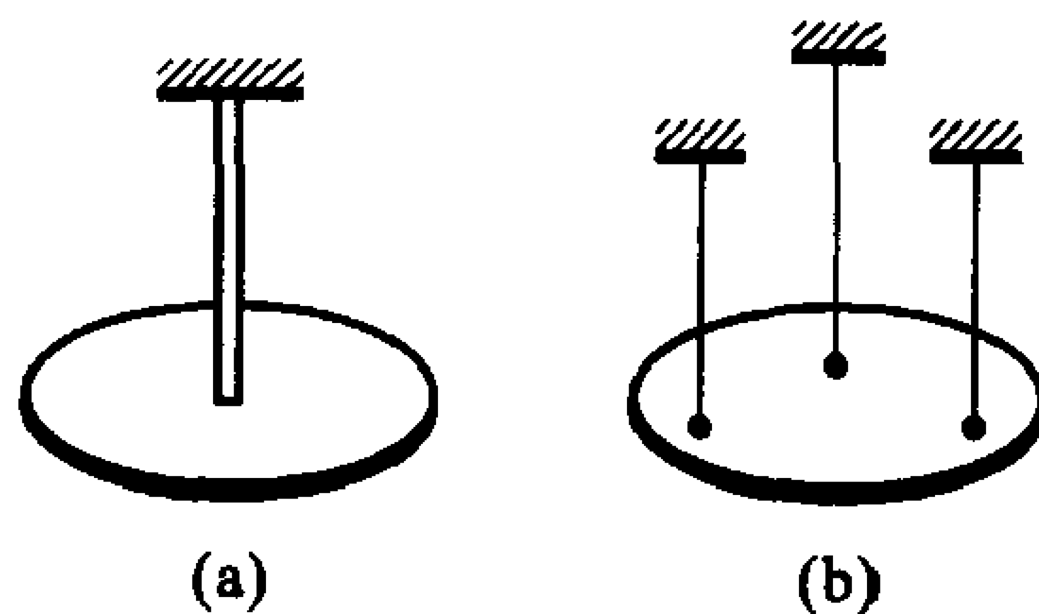


图 12－22

又如，欲求圆轮对于中心轴的转动惯量，可用单轴扭振（图 12－22a）、三线悬挂扭振（图 12－22b）等方法测定扭振周期，根据周期与转动惯量之间的关系计算转动惯量。

表 12－1 列出一些常见均质物体的转动惯量和惯性半径，供应用。

表 12－1　均质物体的转动惯量

物体的形状	简　　图	转动惯量	惯性半径	体积
细直杆		$J_{z_C}=\frac{m}{12}l^2$ $J_z=\frac{m}{3}l^2$	$\rho_{z_C}=\frac{l}{2\sqrt{3}}$ $\rho_z=\frac{l}{\sqrt{3}}$	
薄壁圆筒		$J_z=mR^2$	$\rho_z=R$	$2\pi Rlh$
圆柱		$J_z=\frac{1}{2}mR^2$ $J_x=J_y$ $=\frac{m}{12}(3R^2+l^2)$	$\rho_z=\frac{R}{\sqrt{2}}$ $\rho_x=\rho_y=$ $\sqrt{\frac{1}{12}(3R^2+l^2)}$	$\pi R^2 l$
空心圆柱		$J_z=\frac{m}{2}(R^2+r^2)$	$\rho_z=\sqrt{\frac{1}{2}(R^2+r^2)}$	$\pi l(R^2-r^2)$
薄壁空心球		$J_z=\frac{2}{3}mR^2$	$\rho_z=\sqrt{\frac{2}{3}}R$	$\frac{3}{2}\pi Rh$
实心球		$J_z=\frac{2}{5}mR^2$	$\rho_z=\sqrt{\frac{2}{5}}R$	$\frac{4}{3}\pi R^3$
圆锥体		$J_z=\frac{3}{10}mr^2$ $J_x=J_y$ $=\frac{3}{80}m(4r^2+l^2)$	$\rho_z=\sqrt{\frac{3}{10}}r$ $\rho_x=\rho_y$ $=\sqrt{\frac{3}{80}(4r^2+l^2)}$	$\frac{\pi}{3}r^2 l$

续表

物体的形状	简图	转动惯量	惯性半径	体积
圆环		$J_z = m\left(R^2 + \frac{3}{4}r^2\right)$	$\rho_z = \sqrt{R^2 + \frac{3}{4}r^2}$	$2\pi^2 r^2 R$
椭圆形薄板		$J_z = \frac{m}{4}(a^2 + b^2)$ $J_y = \frac{m}{4}a^2$ $J_x = \frac{m}{4}b^2$	$\rho_z = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ $\rho_y = \frac{a}{2}$ $\rho_x = \frac{b}{2}$	πabh
长方体		$J_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$ $J_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$ $J_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$	$\rho_z = \sqrt{\frac{1}{12}(a^2 + b^2)}$ $\rho_y = \sqrt{\frac{1}{12}(a^2 + c^2)}$ $\rho_x = \sqrt{\frac{1}{12}(b^2 + c^2)}$	abc
矩形薄板		$J_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$ $J_y = \frac{m}{12}a^2$ $J_x = \frac{m}{12}b^2$	$\rho_z = \sqrt{\frac{1}{12}(a^2 + b^2)}$ $\rho_y = 0.289a$ $\rho_x = 0.289b$	abh

§ 12-5 质点系相对于质心的动量矩定理

前面阐述的动量矩定理只适用于惯性参考系中的固定点或固定轴，对于一般的动点或动轴，动量矩定理具有较复杂的形式。然而，相对于质点系的质心或通过质心的动轴，动量矩定理仍保持其简单的形式。

以质心 C 为原点，取一平移参考系 $Cx'y'z'$ 如图 12－23。在此平移参考系内，任一质点 m_i 的相对矢径为 $\boldsymbol{r}'_i$、相对速度为 $\boldsymbol{v}_{ir}$，令质点系相对于其质心 C 的动量矩为

$$\boldsymbol{L}_C=\sum \boldsymbol{M}_C(m_i\boldsymbol{v}_{ir})=\sum \boldsymbol{r}'_i\times m_i\boldsymbol{v}_{ir} \tag{12-21}$$

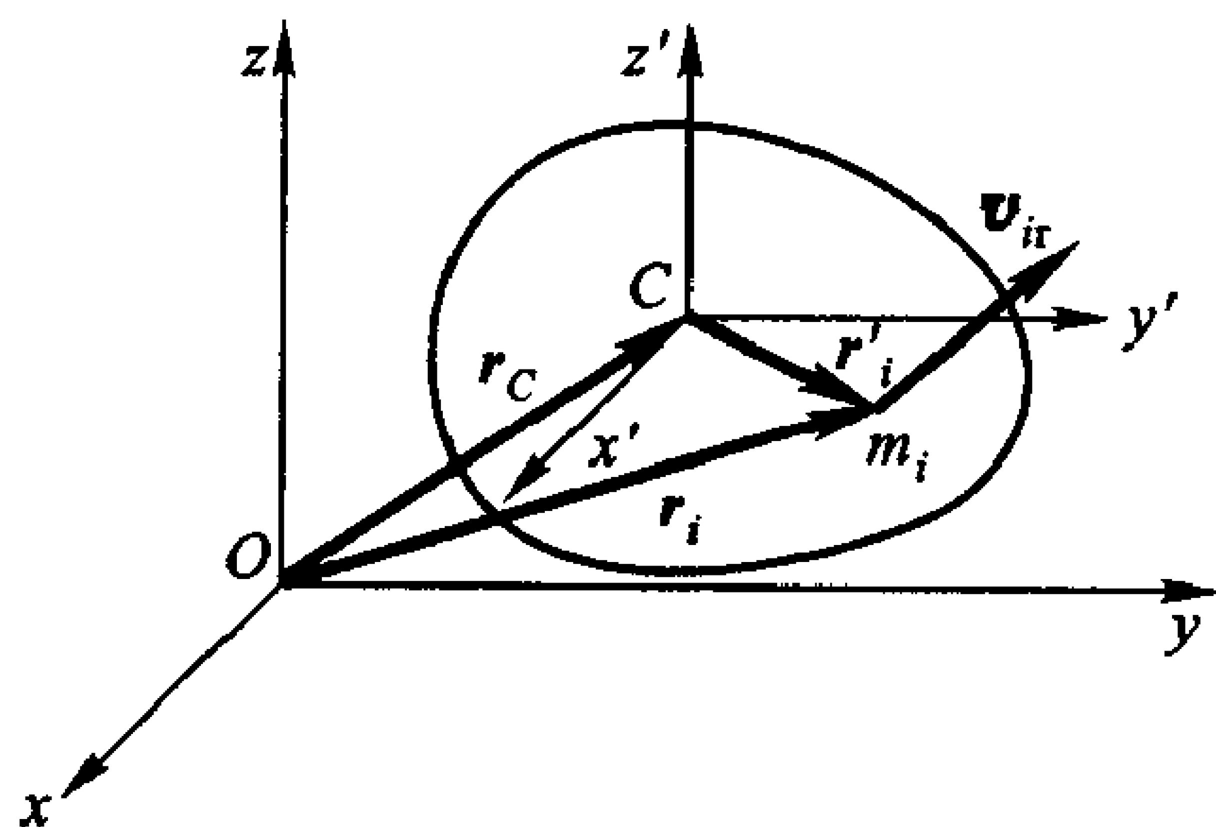


图 12－23

实际上，以质点的相对速度或以其绝对速度计算质点系对于质心的动量矩，其结果是相等的(读者可自行推证)。即

$$\boldsymbol{L}_C=\sum \boldsymbol{r}'_i\times m_i\boldsymbol{v}_{ir}=\sum \boldsymbol{r}'_i\times m_i\boldsymbol{v}_i$$

质点 m_i 对固定点 O 的矢径为 $\boldsymbol{r}_i$、绝对速度为 $\boldsymbol{v}_i$，则质点系对定点 O 的动量矩为

$$\boldsymbol{L}_O=\sum \boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum \boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i$$

由图可见

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}'_i$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_O&=\sum(\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}'_i)\times m_i\boldsymbol{v}_i\\&=\boldsymbol{r}_C\times\sum m_i\boldsymbol{v}_i+\sum \boldsymbol{r}'_i\times m_i\boldsymbol{v}_i\end{aligned}$$

根据点的速度合成定理，有

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_{ir}$$

由质点系动量计算式(11－1)和(11－3)，有

$$\sum m_i\boldsymbol{v}_i=m\boldsymbol{v}_C$$

其中 m 为质点系总质量，$\boldsymbol{v}_C$ 为其质心 C 的速度。代入上两式，质点系对于定点 O 的动量矩可写为

$$\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{r}_C\times m\boldsymbol{v}_C+\sum \boldsymbol{r}'_i\times m_i\boldsymbol{v}_C+\sum \boldsymbol{r}'_i\times m_i\boldsymbol{v}_{ir}$$

上式最后一项就是 $\boldsymbol{L}_C$，而由质心坐标公式有

$$\sum m_i\boldsymbol{r}'_i=m\boldsymbol{r}'_C$$

其中 $\boldsymbol{r}'_C$ 为质心 C 对于动系 $Cx'y'z'$ 的矢径。此处 C 为此动系的原点，显然 $\boldsymbol{r}'_C=0$，即 $\sum m_i\boldsymbol{r}'_i=0$，于是上式中间一项为零，而

$$\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{r}_C\times m\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{L}_C \tag{12-22}$$

式(12－22)表明，质点系对任一点 O 的动量矩等于集中于系统质心的动量 $m\boldsymbol{v}_C$ 对于点 O 的动量矩再加上此系统对于质心 C 的动量矩 $\boldsymbol{L}_C$(为矢量和)。

质点系对于定点 O 的动量矩定理可写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_C\times m\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{L}_C)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

展开上式括弧,注意右端项中 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}_i'$,于是上式化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t}\times m\,\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{r}_C\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\,\boldsymbol{v}_C+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i'\times\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}_C,\quad\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_C$$
$$\boldsymbol{v}_C\times\boldsymbol{v}_C=0,\quad m\boldsymbol{a}_C=\sum\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

于是上式成为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i'\times\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

上式右端是外力对于质心的主矩,于是得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})\tag{12－23}$$

即质点系相对于质心的动量矩对时间的导数,等于作用于质点系的外力对质心的主矩。这个结论称为质点系对于质心的动量矩定理。该定理在形式上与质点系对于固定点的动量矩定理完全一样。

§ 12－6　刚体的平面运动微分方程

平面运动刚体的位置,可由基点的位置与刚体绕基点的转角确定。取质心 C 为基点,如图 12－24 所示,它的坐标为 x_C,y_C。设 D 为刚体上的任一点,CD 与 x 轴的夹角为 φ,则刚体的位置可由 x_C,y_C 和 φ 确定。刚体的运动分解为随质心的平移和绕质心的转动两部分。

图 12－24 中 $Cx'y'$ 为固连于质心 C 的平移参考系,平面运动刚体相对于此动系的运动就是绕质心 C 的转动,则刚体对质心的动量矩为

$$L_C=J_C\omega\tag{12－24}$$

其中 J_C 为刚体对通过质心 C 且与运动平面垂直的轴的转动惯量,ω 为其角速度。

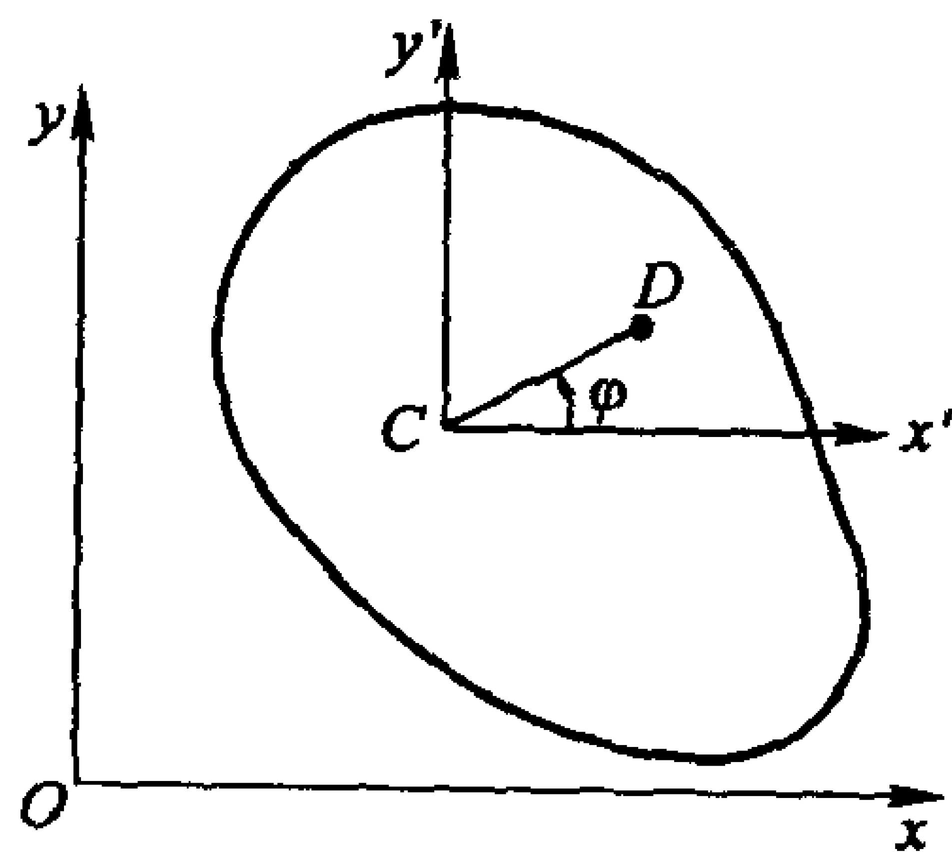


图 12－24

设在刚体上作用的外力可向质心所在的运动平面简化为一平面力系 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3,\cdots,\boldsymbol{F}_n$,则应用

质心运动定理和相对于质心的动量矩定理，得

$$m\boldsymbol{a}_C=\sum \boldsymbol{F}^{(e)},\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_C\omega)=J_C\alpha=\sum M_C(\boldsymbol{F}^{(e)}) \tag{12-25}$$

其中 m 为刚体质量，$\boldsymbol{a}_C$ 为质心加速度，$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$为刚体角加速度。上式也可写成

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t^2}=\sum \boldsymbol{F}^{(e)},J_C\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=\sum M_C(\boldsymbol{F}^{(e)}) \tag{12-26}$$

以上两式称为刚体的平面运动微分方程。应用时，前一式取其投影式。

例 12-11　半径为 r、质量为 m 的均质圆轮沿水平直线滚动，如图 12-25 所示。设轮的惯性半径为 ρ_C，作用于圆轮的力偶矩为 M。求轮心的加速度。如果圆轮对地面的静滑动摩擦因数为 f_s，问力偶矩 M 必须符合什么条件方不致使圆轮滑动？

解：　根据刚体的平面运动微分方程可列出如下三个方程：

$$ma_{Cx}=F$$

$$ma_{Cy}=F_N-mg$$

$$m\rho_C^2\alpha=M-Fr$$

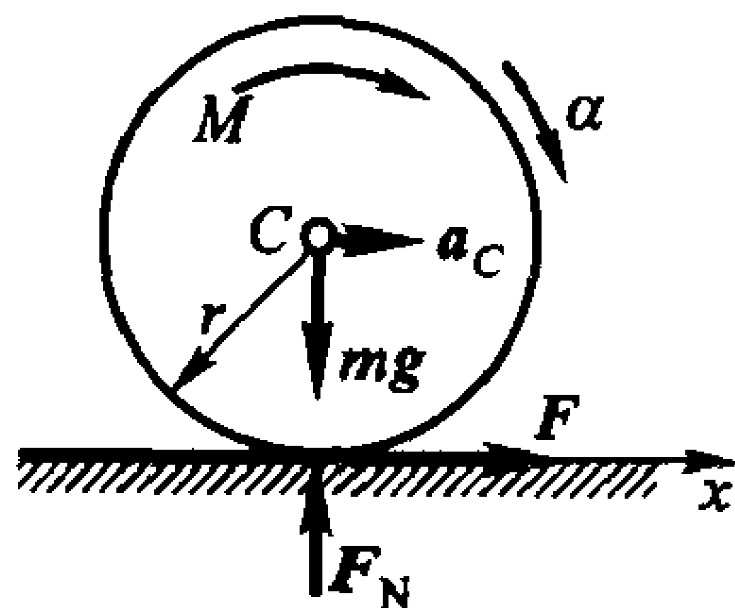


图 12-25

式中 M 和 α 均以顺时针转向为正。因 $a_{Cy}=0$，故 $a_{Cx}=a_C$。

根据圆轮滚而不滑的条件，有 $a_C=r\alpha$。以此式与上列三方程联立求解，得

$$F=ma_C,\quad F_N=mg$$

$$a_C=\frac{Mr}{m(\rho_C^2+r^2)},\quad M=\frac{F(r^2+\rho_C^2)}{r}$$

欲使圆轮滚动而不滑动，必须有 $F\leqslant f_sF_N$，或 $F\leqslant f_s mg$。于是得圆轮只滚不滑的条件为

$$M\leqslant f_s mg\frac{r^2+\rho_C^2}{r}$$

例 12-12　均质圆轮半径为 r，质量为 m，受到轻微扰动后，在半径为 R 的圆弧上往复滚动，如图 12-26 所示。设表面足够粗糙，使圆轮在滚动时无滑动。求质心 C 的运动规律。

解：　圆轮在曲面上作平面运动，受到的外力有重力 $m\boldsymbol{g}$，圆弧表面的法向约束力 $\boldsymbol{F}_N$ 和摩擦力 $\boldsymbol{F}$。

设 θ 角以逆时针方向为正，取切线轴的正向如图，并设圆轮以顺时针转动为正，则图示瞬时刚体平面运动微分方程在自然轴上的投影式为

$$ma_C^t=F-mg\sin\theta \tag{a}$$

$$m\frac{v_C^2}{R-r}=F_N-mg\cos\theta \tag{b}$$

$$J_C\alpha=-Fr \tag{c}$$

由运动学知，当圆轮只滚不滑时，角加速度的大小为

$$\alpha=\frac{a_C^t}{r} \tag{d}$$

取 s 为质心的弧坐标，由图 12－26 有

$$s=(R-r)\theta$$

注意到 $a_C^t=\frac{d^2s}{dt^2}, J_C=\frac{1}{2}mr^2$，当 θ 很小时，$\sin\theta\approx\theta$，联立式(a)、(c)、(d)求得

$$\frac{3}{2}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{g}{R-r}s=0$$

令 $\omega_0^2=\frac{2g}{3(R-r)}$，则上式成为

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega_0^2s=0$$

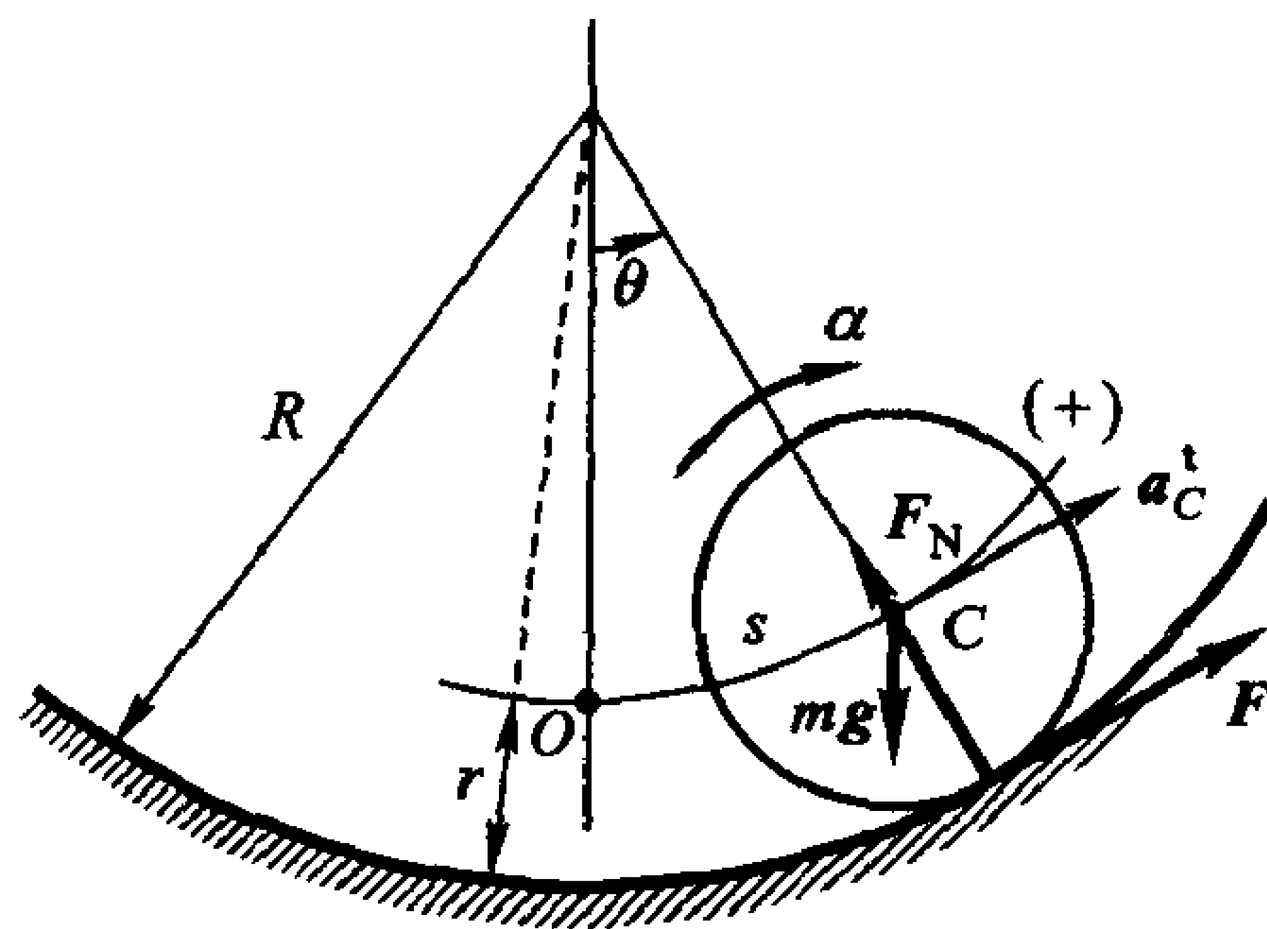


图 12－26

此方程的解为

$$s=s_0\sin(\omega_0t+\beta)$$

式中 s_0 和 β 为两个常数，由运动起始条件确定。如 $t=0$ 时，$s=0$，初速度为 v_0，于是

$$0=s_0\sin\beta, v_0=s_0\omega_0\cos\beta$$

解得

$$\tan\beta=0,\quad \beta=0°, s_0=\frac{v_0}{\omega_0}=v_0\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

最后得质心沿轨迹的运动方程

$$s=v_0\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}\sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{(R-r)}}t\right)$$

由式(b)可求得圆轮在滚动时对地面的压力 F_N'

$$F_N'=F_N=m\frac{v_C^2}{R-r}+mg\cos\theta$$

式中右端第一项为附加动压力，其中

$$v_C=\frac{ds}{dt}=v_0\cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}}t\right)$$

小　　结

1．动量矩

质点对点 O 的动量矩是矢量

$$\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$$

质点系对于点 O 的动量矩也是矢量，为

$$\boldsymbol{L}_O=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i$$

若 z 轴通过点 O，则质点系对于 z 轴的动量矩，为

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} M_z(m_i \boldsymbol{v}_i) = [\boldsymbol{L}_O]_z$$

若 C 为质点系的质心，对任一点 O 有

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_C + \boldsymbol{r}_C \times m\,\boldsymbol{v}_C$$

2. 动量矩定理

对于定点 O 和定轴 z 有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}^{(e)}),\ \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \sum M_z(\boldsymbol{F}^{(e)})$$

若 C 为质心、C_z 轴通过质心，也有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i^{(e)}),\ \frac{\mathrm{d}L_{Cz}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} M_{Cz}(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

3. 转动惯量

$$J_z = \sum m_i r_i^2$$

若 z_C 与 z 轴平行，有

$$J_z = J_{zC} + md^2$$

4. 刚体绕 z 轴转动的动量矩为

$$L_z = J_z \omega$$

若 z 轴为定轴或通过质心，有

$$J_z \alpha = \sum M_z(\boldsymbol{F}^{(e)})$$

5. 刚体的平面运动微分方程为

$$m\boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}^{(e)},\ J_C \alpha = \sum M_C(\boldsymbol{F}^{(e)})$$

思　考　题

12-1　某质点对于某定点 O 的动量矩矢量表达式为

$$\boldsymbol{L}_O = 6t^2\boldsymbol{i} + (8t^3+5)\boldsymbol{j} - (t-7)\boldsymbol{k}$$

式中 t 为时间，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为沿固定直角坐标轴的单位矢量。求此质点上作用力对点 O 的力矩。

12-2　某质点系对空间任一固定点的动量矩都完全相同，且不等于零。这种运动情况可能吗？

12-3　平面运动刚体，如所受外力主矢为零，刚体只能是绕质心的转动吗？如所受外力对质心的主矩为零，刚体只能是平移吗？

12-4　试计算第十一章思考题 11-1 题中 a,b,d,e 各物体对其转轴的动量矩。

12-5　如图 12-27 所示传动系统中 J_1, J_2 为轮Ⅰ、轮Ⅱ的转动惯量，轮Ⅰ的角加速度 $\alpha_1 = \dfrac{M_1}{J_1+J_2}$，对不对？

12-6　如图 12-28 所示，在铅垂面内，杆 OA 可绕轴 O 自由转动，均质圆盘可绕其质心轴 A 自由转动。如杆 OA 水平时系统为静止，问自由释放后圆盘作什么运动？

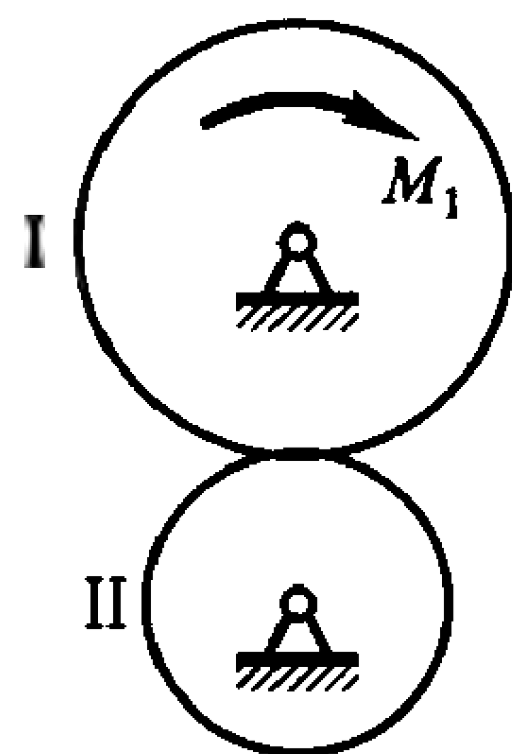


图 12－27

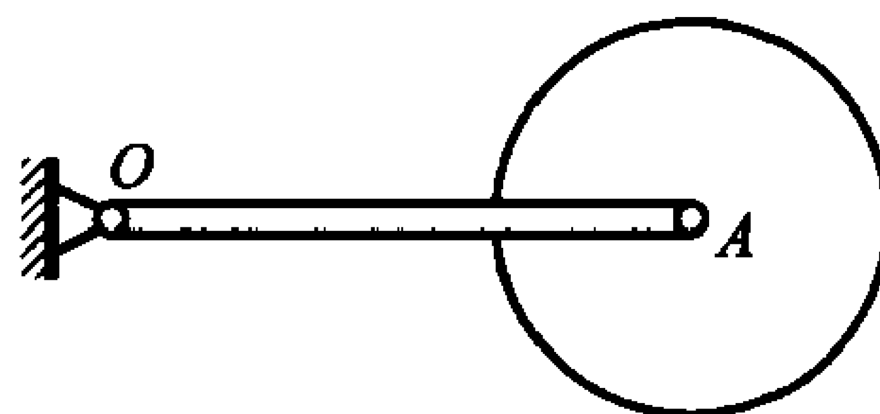


图 12－28

12－7　质量为 m 的均质圆盘，平放在光滑的水平面上，其受力情况如图 12－29 所示。设开始时，圆盘静止，图中 $r=\frac{R}{2}$。试说明各圆盘将如何运动。

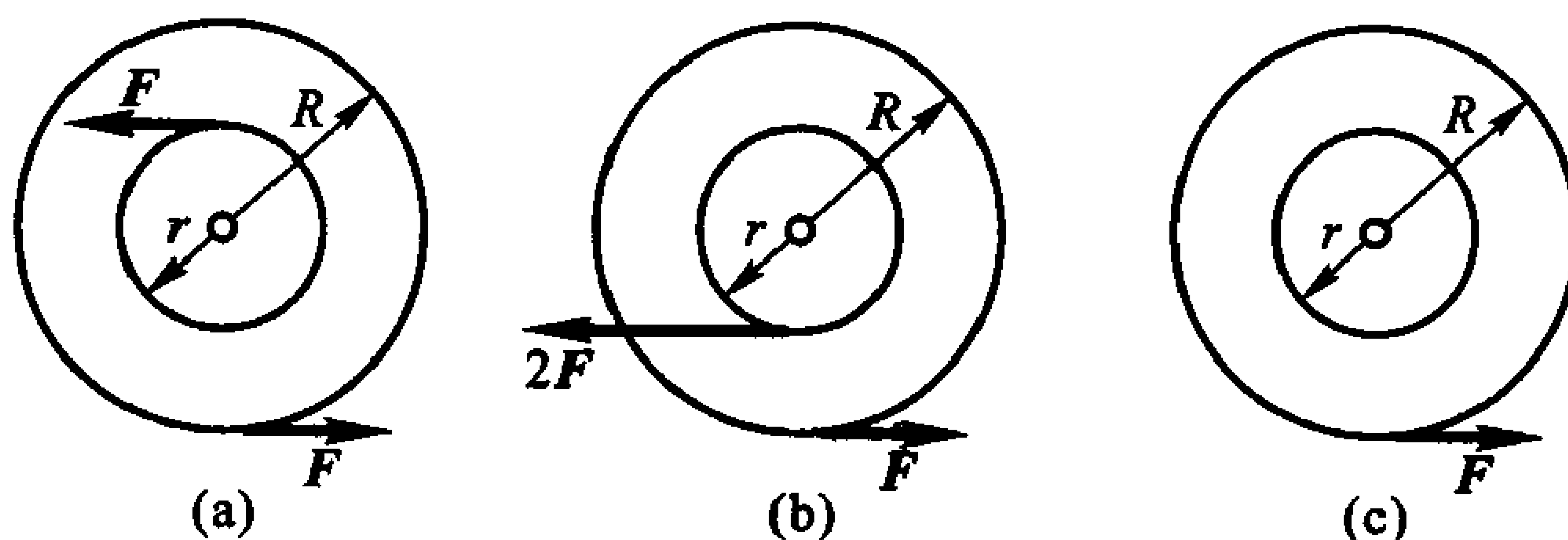


图 12－29

12－8　一半径为 R 的均质圆轮在水平面上只滚动而不滑动。如不计滚动摩阻，试问在下列两种情况下，轮心的加速度是否相等？接触面的摩擦力是否相同？

(1) 在轮上作用一顺时针转向的力偶，力偶矩为 M；

(2) 在轮心作用一水平向右的力 $\boldsymbol{F}$，$F=\frac{M}{R}$。

12－9　均质圆轮沿水平面只滚不滑，如在圆轮面内作用一水平力 $\boldsymbol{F}$。问力作用于什么位置能使地面摩擦力等于零？在什么情况下，地面摩擦力能与力 $\boldsymbol{F}$ 同方向？

12－10　均质圆轮沿地面只滚不滑时，轮与地面接触点 P 为瞬心，此时恰有 $J_P\alpha=M_P$。式中 J_P 为轮对瞬心的转动惯量，α 为角加速度，M_P 为外力对瞬心的力矩。对一般平面运动刚体，上式对吗？用于此轮为什么能对？

12－11　类比式(12－22)，质点系对任一动点 A 的动量矩与固定点 O 的动量矩之间有什么关系？

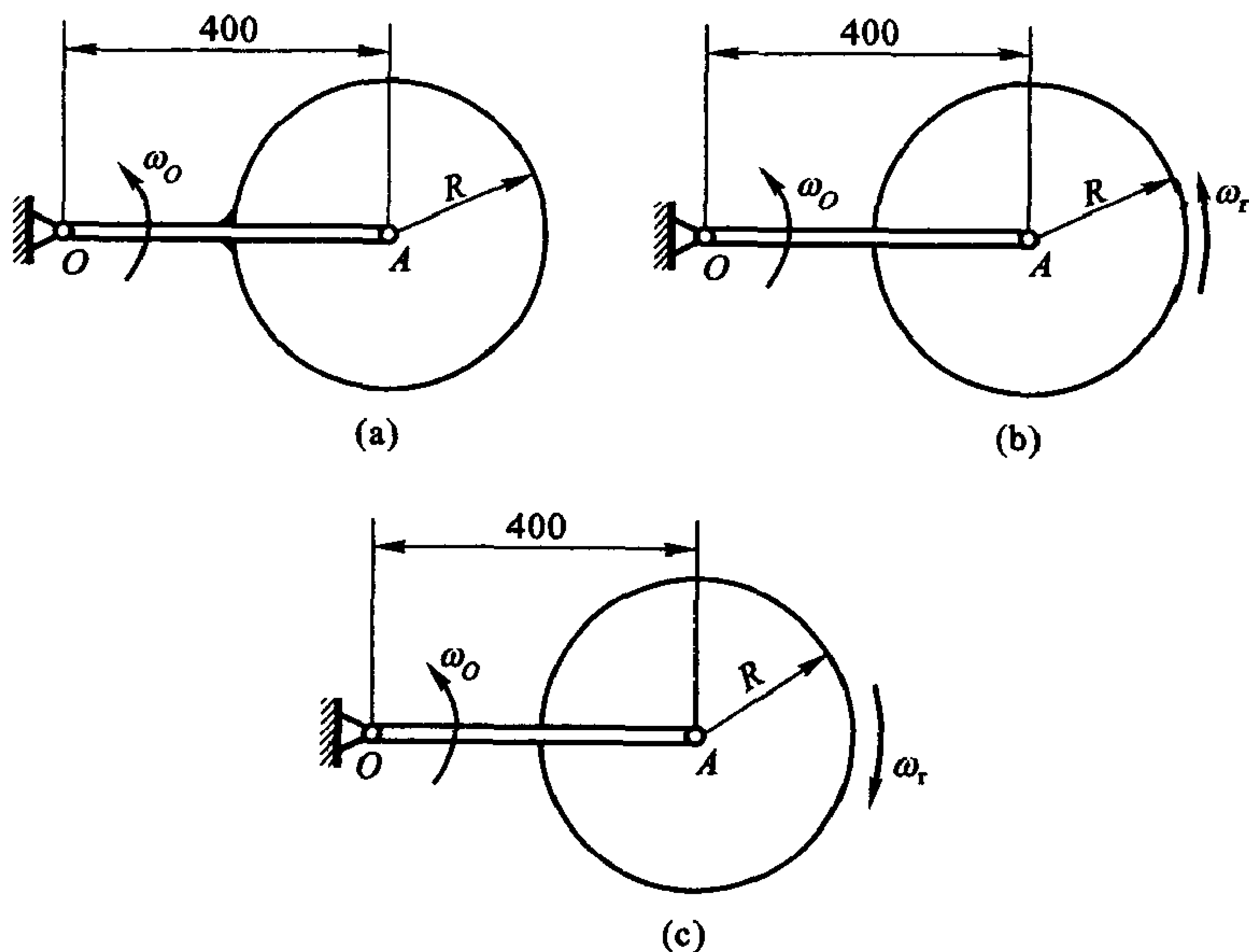
习　题

12－1　质量为 m 的点在平面 Oxy 内运动，其运动方程为

$$x=a\cos\omega t,\ y=b\sin 2\omega t$$

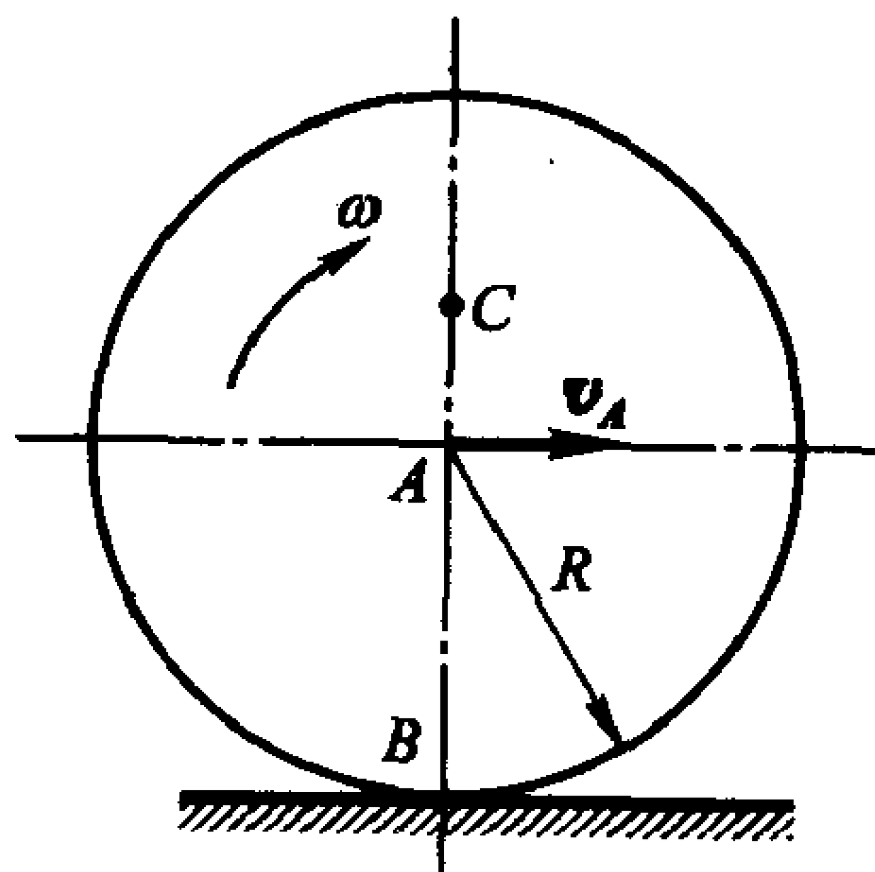
其中 a，b 和 ω 为常量。求质点对原点 O 的动量矩。

12－2 无重杆 OA 以角速度 ω_O 绕轴 O 转动，质量 $m=25$ kg、半径 $R=200$ mm 的均质圆盘以三种方式安装于杆 OA 的点 A，如图所示。在图 a 中，圆盘与杆 OA 焊接在一起；在图 b 中，圆盘与杆 OA 在点 A 铰接，且相对杆 OA 以角速度 ω_r 逆时针向转动；在图 c 中，圆盘相对杆 OA 以角速度 ω_r 顺时针向转动。已知 $\omega_O=\omega_r=4$ rad/s，计算在此三种情况下，圆盘对轴 O 的动量矩。

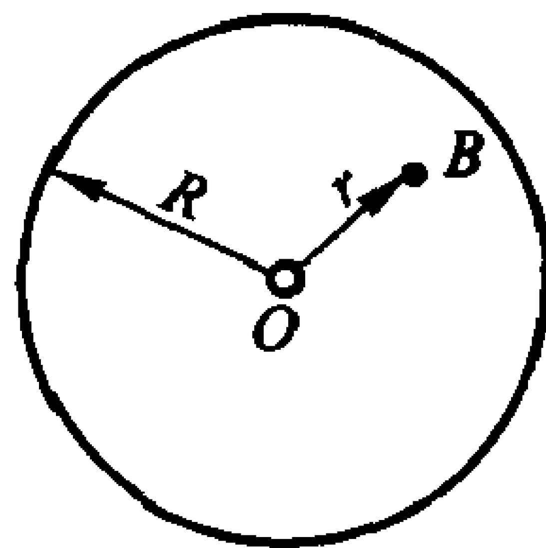


题 12－2 图

12－3 如图所示，质量为 m 的偏心轮在水平面上作平面运动。轮子轴心为 A，质心为 C，$AC=e$；轮子半径为 R，对轴心 A 的转动惯量为 J_A；C，A，B 三点在同一铅直线上。(1) 当轮子只滚不滑时，若 $\boldsymbol{v}_A$ 已知，求轮子的动量和对地面上 B 点的动量矩。(2) 当轮子又滚又滑时，若 $\boldsymbol{v}_A$，ω 已知，求轮子的动量和对地面上 B 点的动量矩。



题 12－3 图

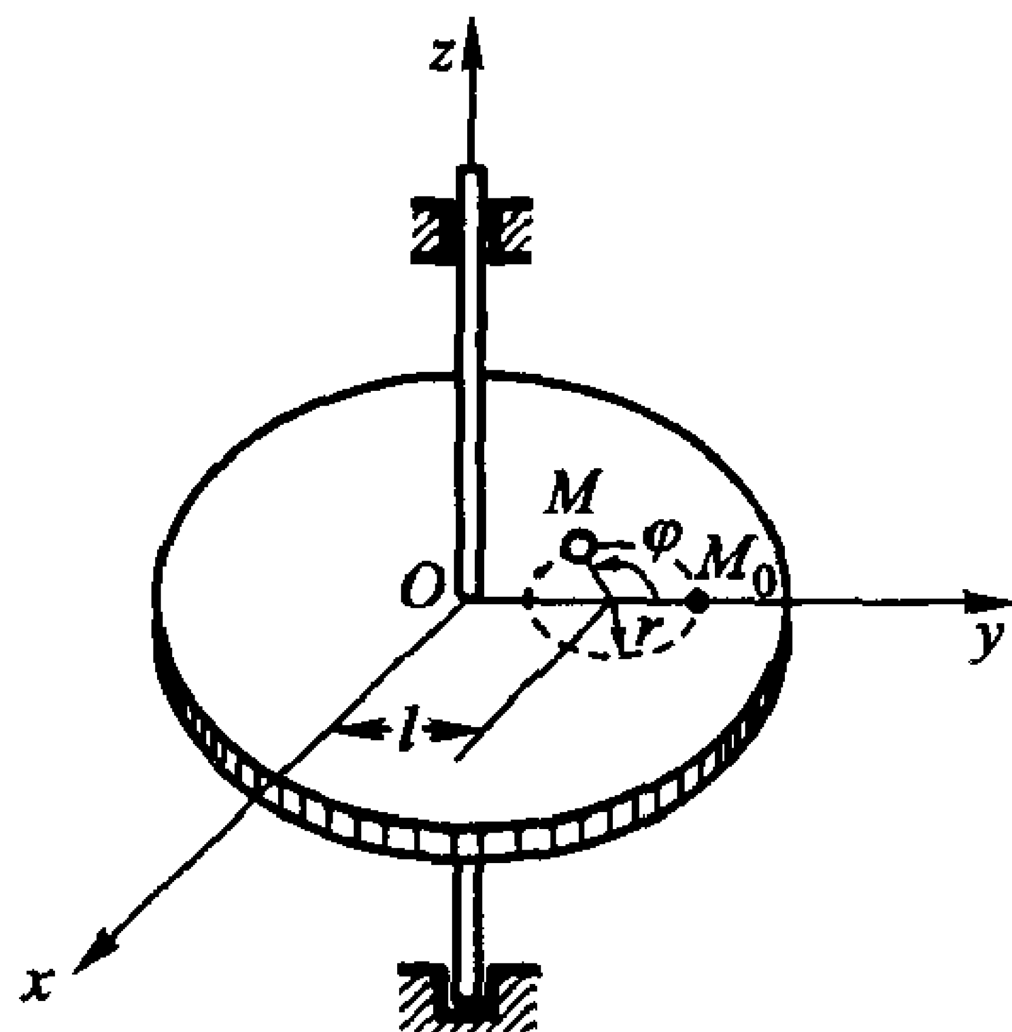


题 12－4 图

12－4 一半径为 R、质量为 m_1 的均质圆盘，可绕通过其中心 O 的铅直轴无摩擦地旋

转,如图所示。一质量为 m_2 的人在盘上由点 B 按规律 $s=\frac{1}{2}at^2$ 沿半径为 r 的圆周行走。开始时,圆盘和人静止。求圆盘的角速度和角加速度。

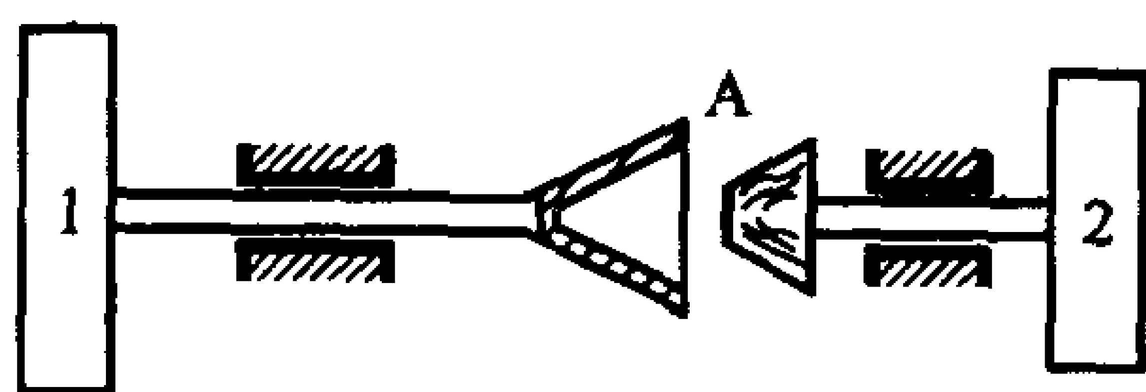
12-5　图示水平圆板可绕 z 轴转动。在圆板上有一质点 M 作圆周运动,已知其速度的大小为常量,等于 v_0,质点 M 的质量为 m,圆的半径为 r,圆心到 z 轴的距离为 l,点 M 在圆板上的位置由角 φ 确定,如图所示。如圆板的转动惯量为 J,并且当点 M 离 z 轴最远在点 M_0 时,圆板的角速度为零。轴的摩擦和空气阻力略去不计,求圆板的角速度与 φ 角的关系。



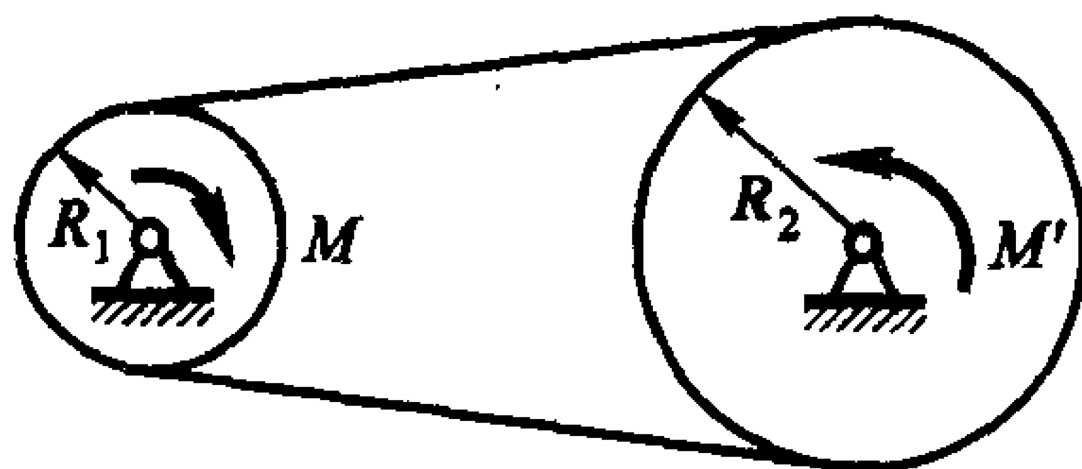
题 12-5 图

12-6　图示 A 为离合器,开始时轮 2 静止,轮 1 具有角速度 ω_0。当离合器接合后,依靠摩擦使轮 2 启动。已知轮 1 和 2 的转动惯量分别为 J_1 和 J_2。求:(1) 当离合器接合后,两轮共同转动的角速度;(2) 若经过 t 秒两轮的转速相同,求离合器应有多大的摩擦力矩。

12-7　图示两轮的半径各为 R_1 和 R_2,其质量各为 m_1 和 m_2,两轮以胶带相连接,各绕两平行的固定轴转动。如在第一个带轮上作用矩为 M 的主动力偶,在第二个带轮上作用矩为 M' 的阻力偶。带轮可视为均质圆盘,胶带与轮间无滑动,胶带质量略去不计。求第一个带轮的角加速度。

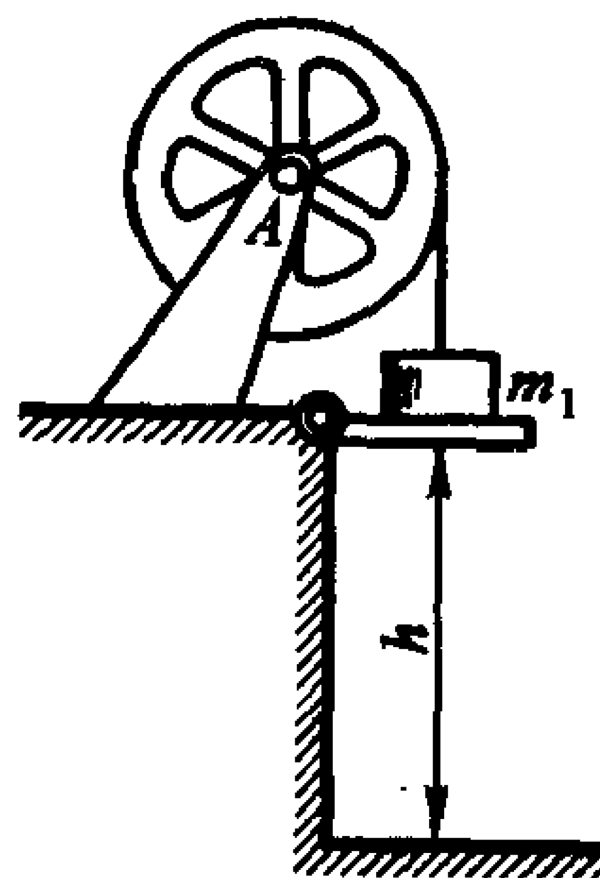


题 12-6 图



题 12-7 图

12-8　如图所示,为求半径 $R=0.5$ m 的飞轮对于通过其重心轴 A 的转动惯量,在飞轮上绕以细绳,绳的末端系一质量为 $m_1=8$ kg 的重锤,重锤自高度 $h=2$ m 处落下,测得落下时间 $t_1=16$ s。为消去轴承摩擦的影响,再用质量为 $m_2=4$ kg 的重锤作第二次试验,此重锤自同一高度落下的时间为 $t_2=25$ s。假定摩擦力矩为一常数,且与重锤的重量无关,求飞轮的转动惯量和轴承的摩擦力矩。

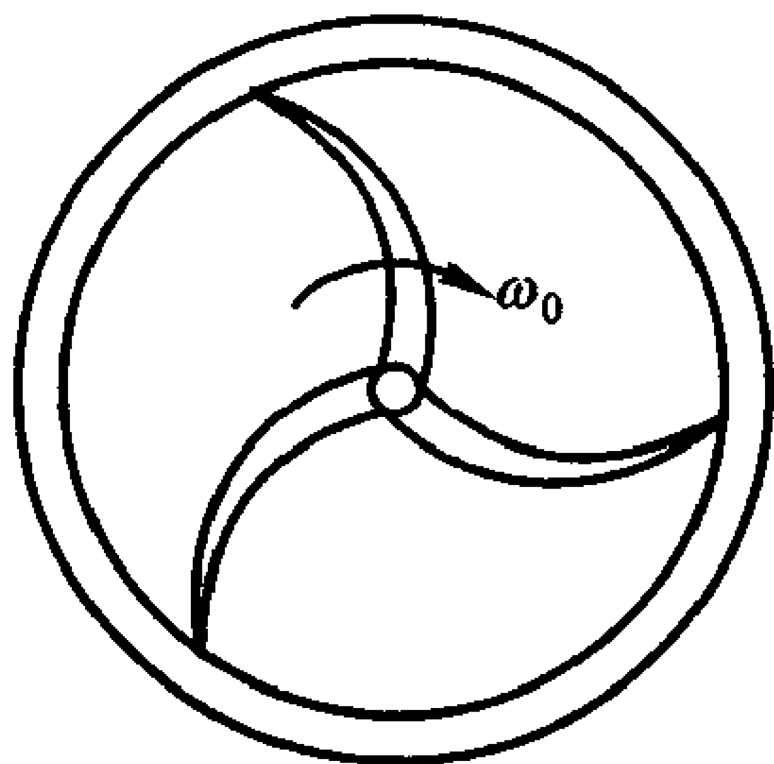


题 12-8 图

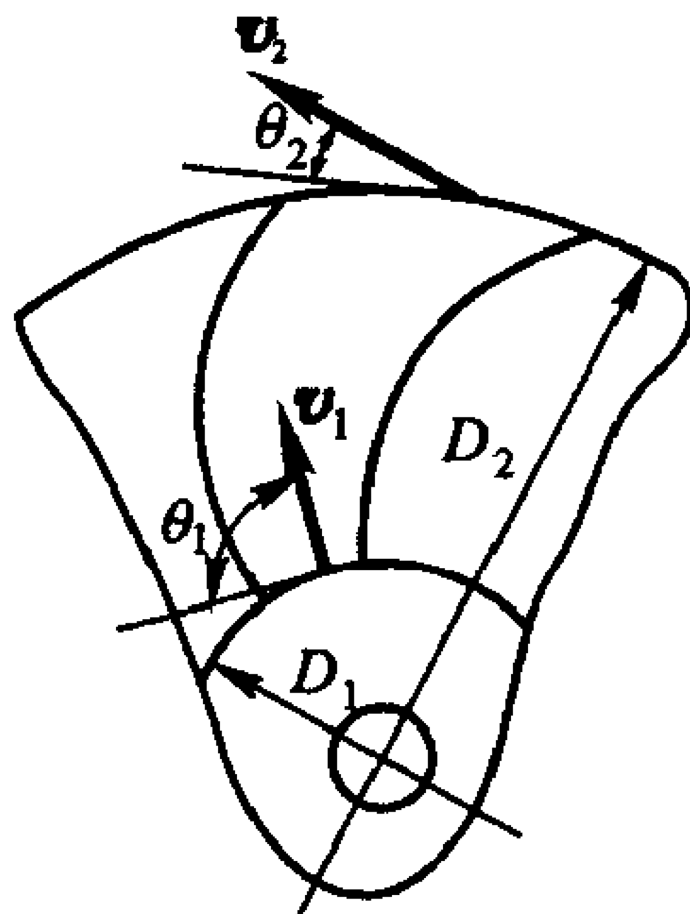
12-9　图示通风机的转动部分以初角速度 ω_0 绕中心轴转动,空气的阻力矩与角速度成正比,即 $M=k\omega$,其中 k 为常数。如转动部分对其轴的转动惯量为 J,问经过多少时间其转动角速度减少为初角速度的一半?又在此时间内共转过多少转?

12-10　图示离心式空气压缩机的转速 $n=8\,600$ r/min,体积流量为 $q_V=370$ m³/min,第一级叶轮气道进口直径为 $D_1=0.355$ m,出口直径为 $D_2=0.6$ m。气流进口绝对速度 v_1

$=109\ \text{m/s}$,与切线成角 $\theta_1=90^\circ$;气流出口绝对速度 $v_2=183\ \text{m/s}$,与切线成角 $\theta_2=21^\circ30'$。设空气密度 $\rho=1.16\ \text{kg/m}^3$,试求这一级叶轮的转矩。



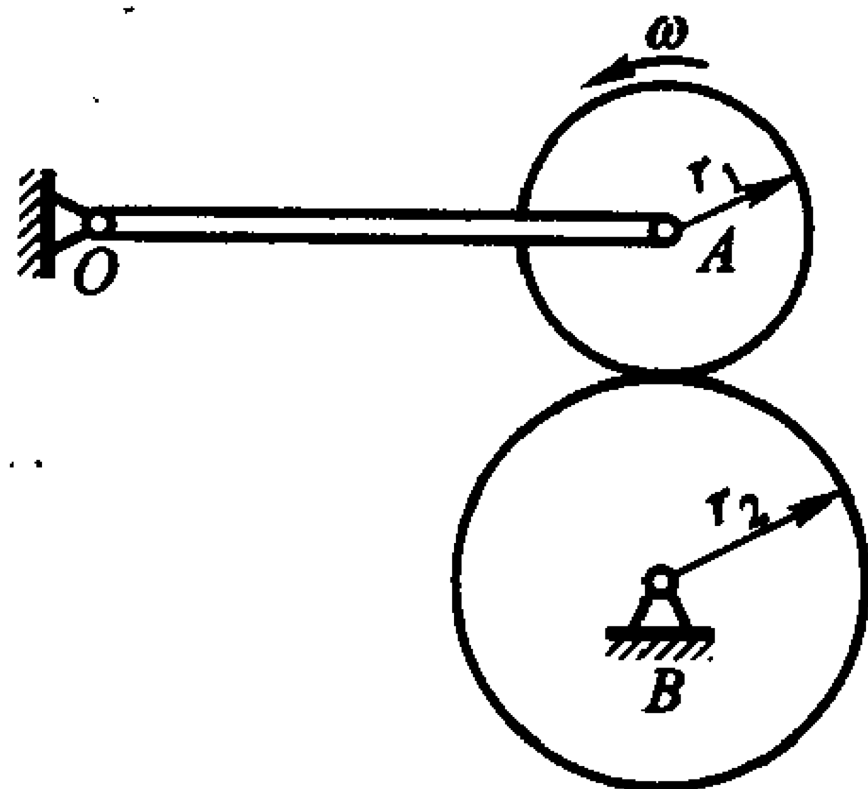
题 12-9 图



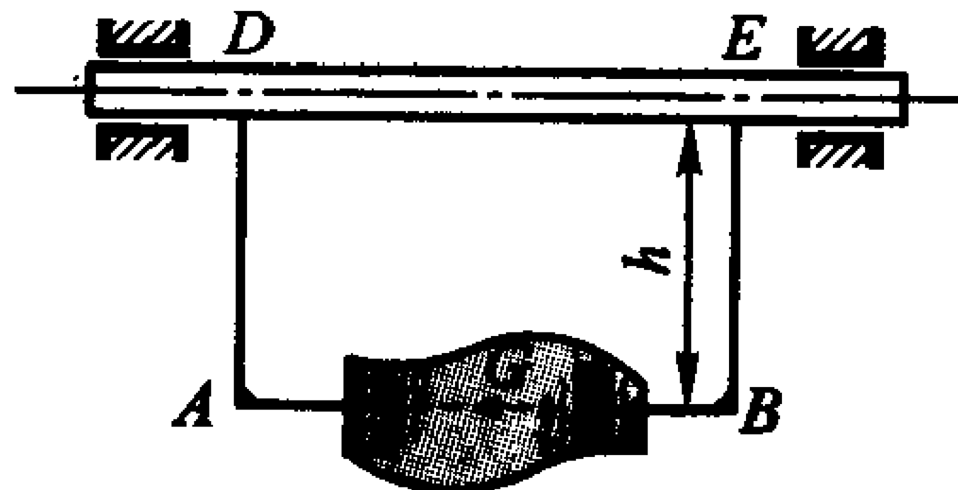
题 12-10 图

12-11 均质圆轮 A 质量为 m_1,半径为 r_1,以角速度 ω 绕杆 OA 的 A 端转动,此时将轮放置在质量为 m_2 的另一均质圆轮 B 上,其半径为 r_2,如图所示。轮 B 原为静止,但可绕其中心轴自由转动。放置后,轮 A 的重量由轮 B 支持。略去轴承的摩擦和杆 OA 的重量,并设两轮间的摩擦因数为 f。问自轮 A 放在轮 B 上到两轮间没有相对滑动为止,经过多少时间?

12-12 为求刚体对于通过重心 G 的轴 AB 的转动惯量,用两杆 AD,BE 与刚体牢固连接,并借两杆将刚体活动地挂在水平轴 DE 上,如图所示。轴 AB 平行于 DE,然后使刚体绕轴 DE 作微小摆动,求出振动周期 T。如果刚体的质量为 m,轴 AB 与 DE 间的距离为 h,杆 AD 和 BE 的质量忽略不计。求刚体对轴 AB 的转动惯量。



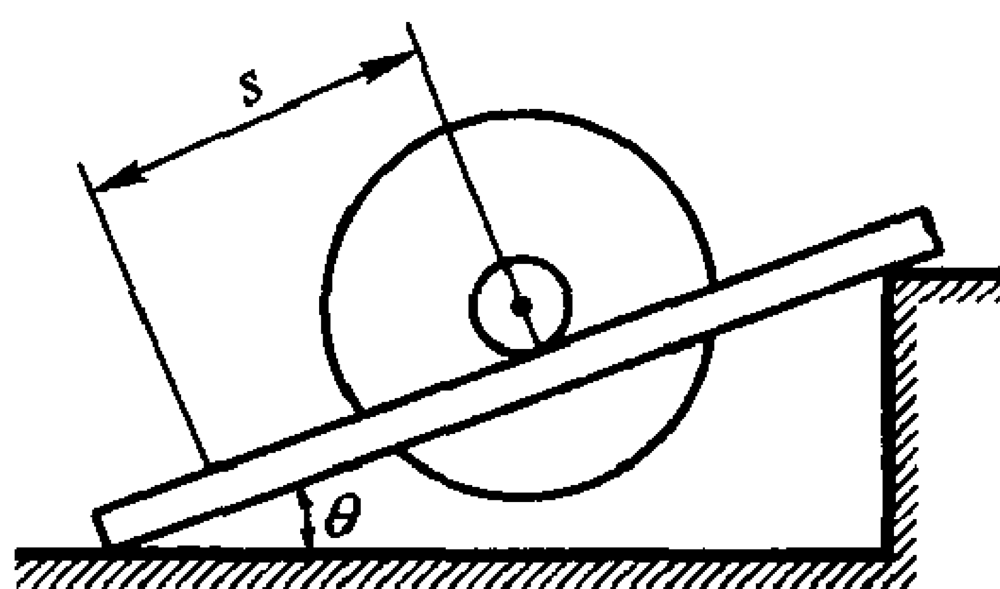
题 12-11 图



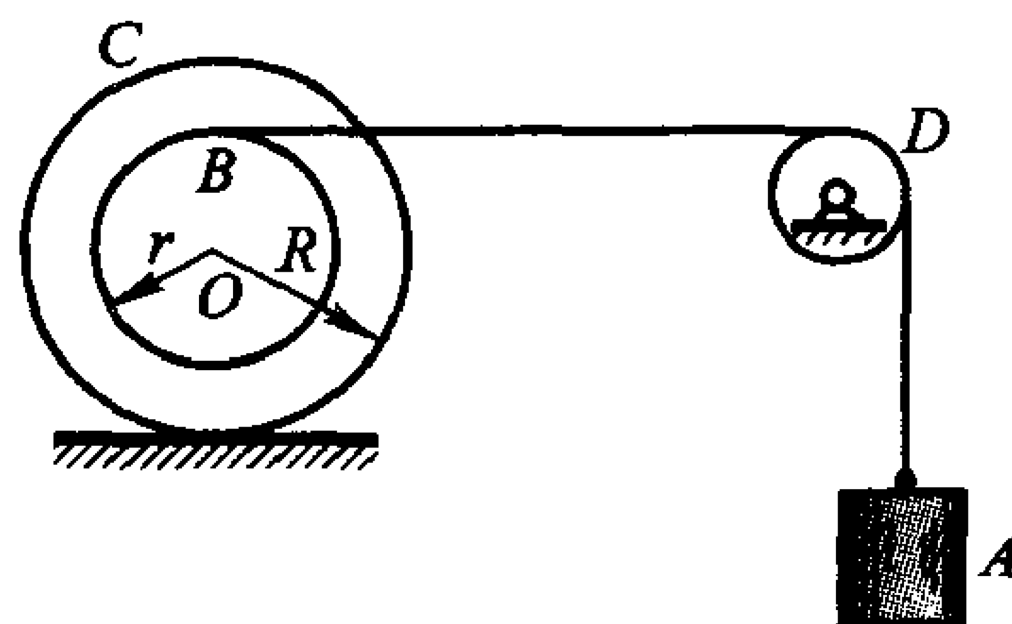
题 12-12 图

12-13 如图所示,有一轮子,轴的直径为 50 mm,无初速地沿倾角 $\theta=20^\circ$ 的轨道只滚不滑,5 秒内轮心滚过的距离为 $s=3\ \text{m}$。求轮子对轮心的惯性半径。

12-14 重物 A 质量为 m_1,系在绳子上,绳子跨过不计质量的固定滑轮 D,并绕在鼓轮 B 上,如图所示。由于重物下降,带动了轮 C,使它沿水平轨道只滚不滑。设鼓轮半径为 r,轮 C 的半径为 R,两者固连在一起,总质量为 m_2,对于其水平轴 O 的回转半径为 ρ。求重物 A 的加速度。

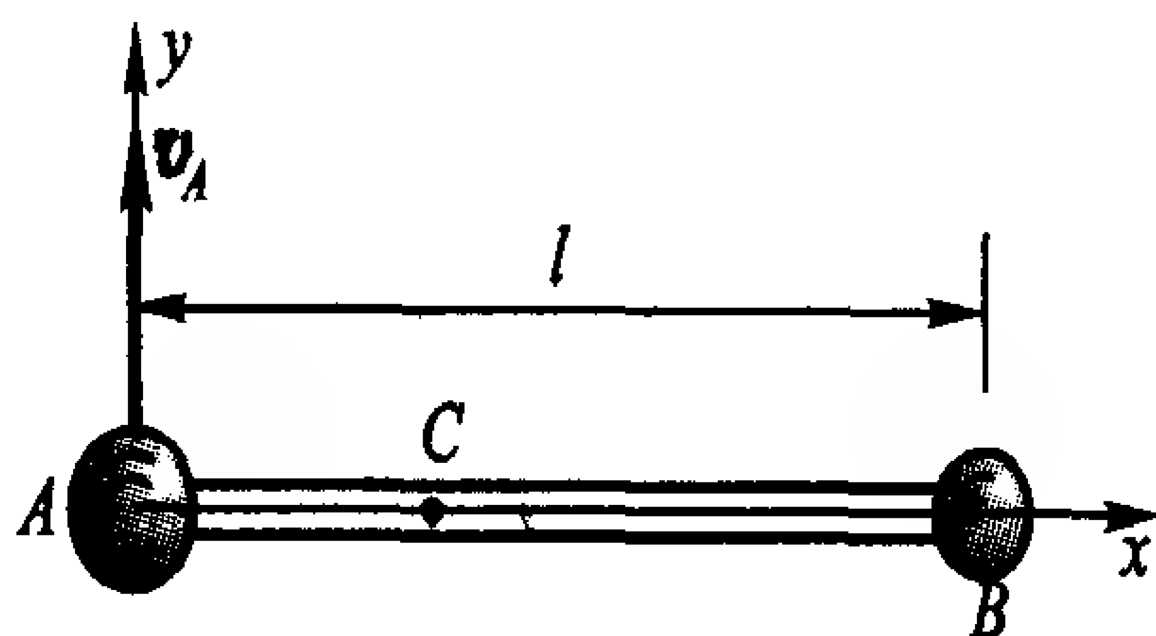


题 12－13 图

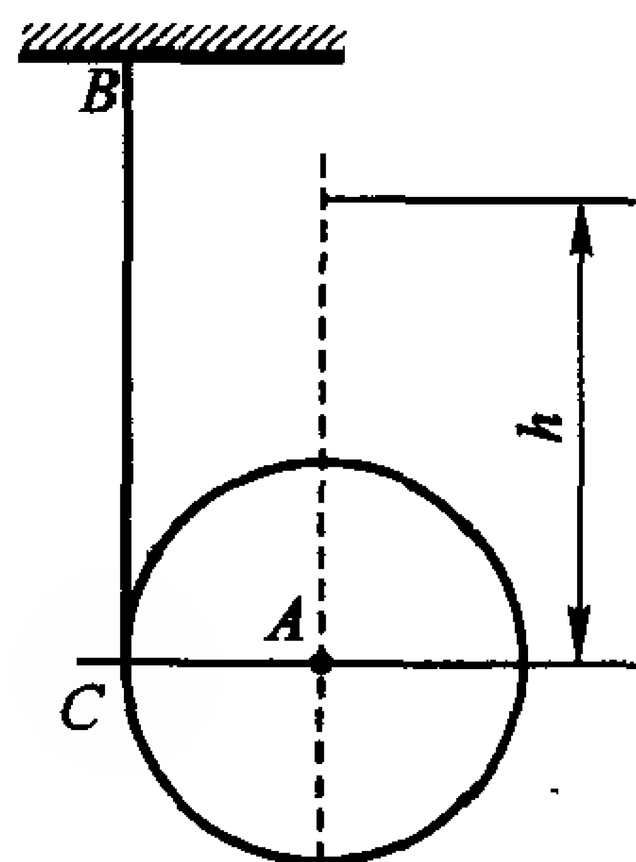


题 12－14 图

12－15　图示两小球 A 和 B，质量分别为 $m_A=2\ \text{kg}$，$m_B=1\ \text{kg}$，用 $AB=l=0.6\ \text{m}$ 的杆连接。在初瞬时，杆在水平位置，B 不动，而 A 的速度 $v_A=0.6\ \pi\text{m/s}$，方向铅直向上，如图所示。杆的质量和小球的尺寸忽略不计。求(1) 两小球在重力作用下的运动；(2) 在 $t=2\ \text{s}$ 时，两小球相对于定坐标系 Axy 的位置；(3) $t=2\ \text{s}$ 时杆轴线方向的内力。



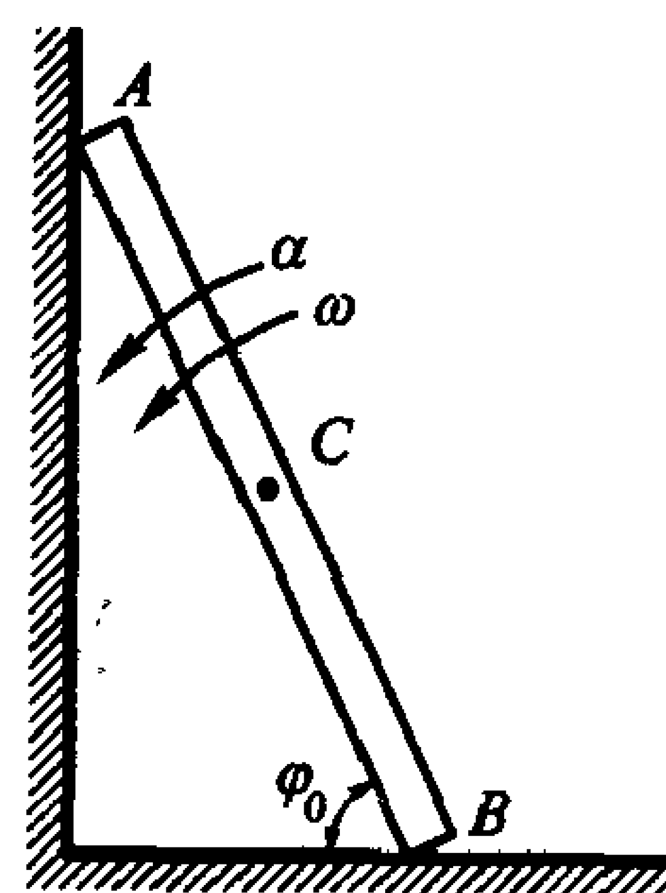
题 12－15 图



题 12－16 图

12－16　均质圆柱体 A 的质量为 m，在外圆上绕以细绳，绳的一端 B 固定不动，如图所示。当 BC 铅垂时圆柱下降，其初速为零。求当圆柱体的轴心降落了高度 h 时轴心的速度和绳子的张力。

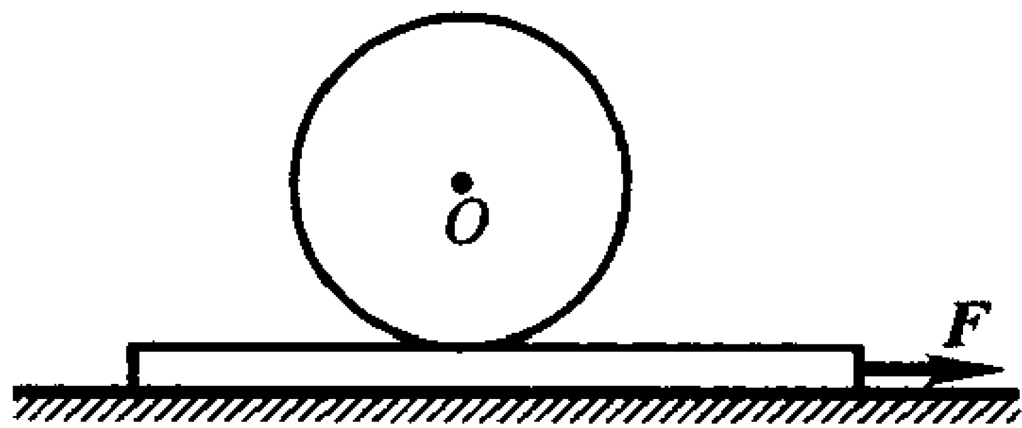
12－17　图示均质杆 AB 长为 l，放在铅直平面内，杆的一端 A 靠在光滑的铅直墙上，另一端 B 放在光滑的水平地板上，并与水平面成 φ_0 角。此后，杆由静止状态倒下。求：(1) 杆在任意位置时的角加速度和角速度；(2) 当杆脱离墙时，此杆与水平面所夹的角。



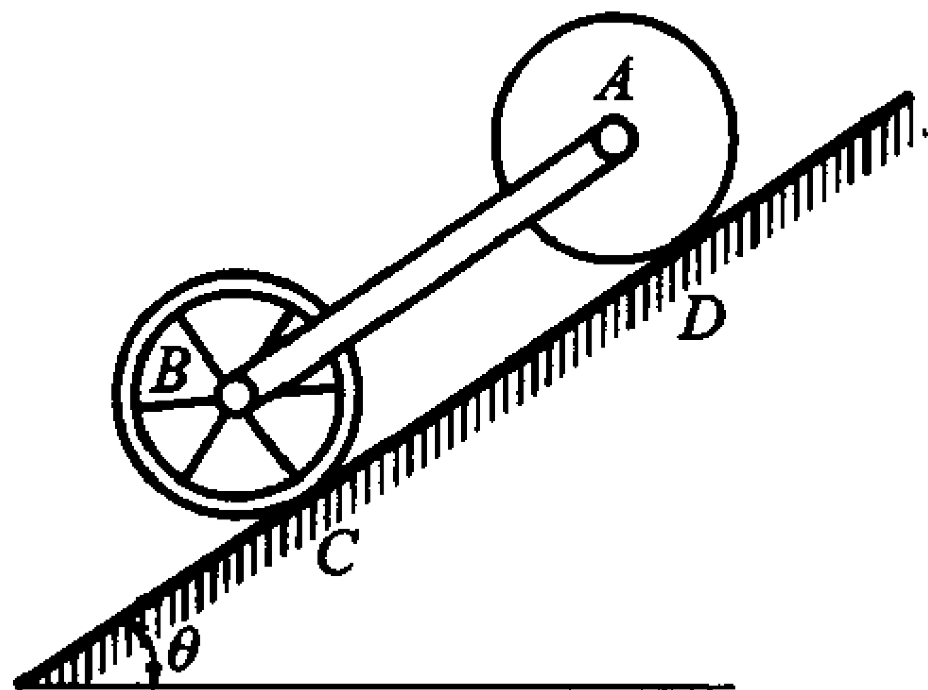
题 12－17 图

12－18　如图所示，板的质量为 m_1，受水平力 $\boldsymbol{F}$ 作用，沿水平面运动，板与平面间的动摩擦因数为 f。在板上放一质量为 m_2 的均质实心圆柱，此圆柱对板只滚不滑。求板的加速度。

12－19　均质实心圆柱体 A 和薄铁环 B 的质量均为 m，半径都等于 r，两者用杆 AB 铰接，无滑动地沿斜面滚下，斜面与水平面的夹角为 θ，如图所示。如杆的质量忽略不计，求杆 AB 的加速度和杆的内力。

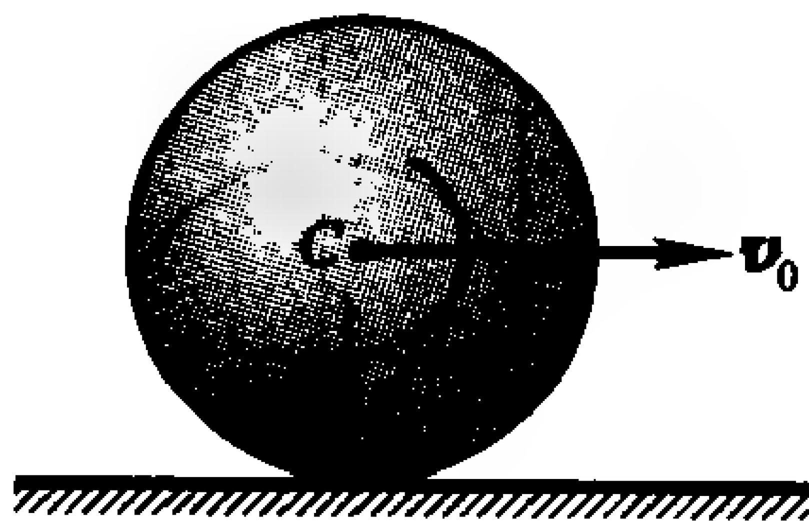


题 12－18 图

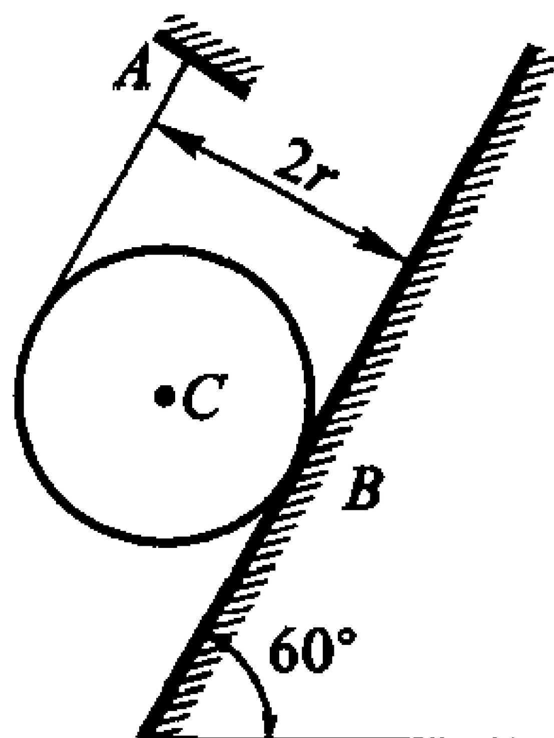


题 12－19 图

12－20 半径为 r 的均质圆柱体的质量为 m，放在粗糙的水平面上，如图所示。设其质心 C 初速度为 $\boldsymbol{v}_0$，方向水平向右，同时圆柱如图所示方向转动，其初角速度为 ω_0，且有 $r\omega_0 < v_0$。如圆柱体与水平面的摩擦因数为 f，问经过多少时间，圆柱体才能只滚不滑地向前运动，并求该瞬时圆柱体中心的速度。



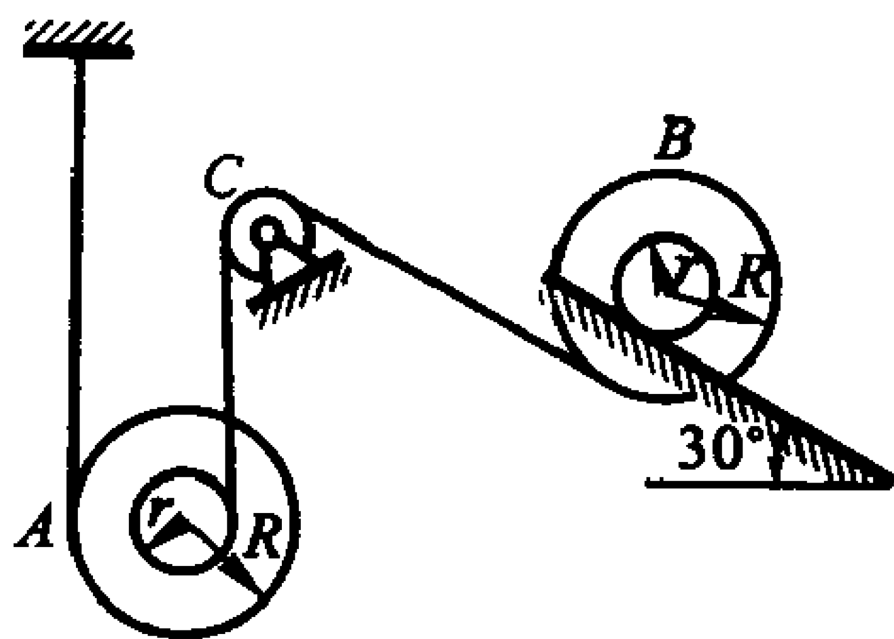
题 12－20 图



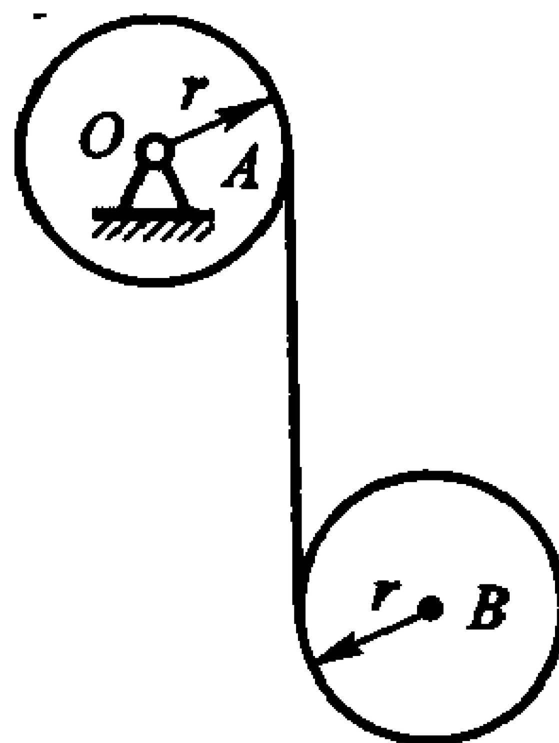
题 12－21 图

12－21 图示均质圆柱体的质量为 m，半径为 r，放在倾角为 60°的斜面上。一细绳缠绕在圆柱体上，其一端固定于点 A，此绳与点 A 相连部分与斜面平行。若圆柱体与斜面间的摩擦因数 $f=\dfrac{1}{3}$，求其中心沿斜面落下的加速度 a_C。

12－22 A，B 两轮质量皆为 m，转动惯量皆为 mr^2，且有 $R=2r$，如图所示。小定滑轮 C 及绕于两轮上的细绳质量不计，轮 B 沿斜面只滚不滑。求 A，B 两轮心的加速度。



题 12－22 图



题 12－23 图

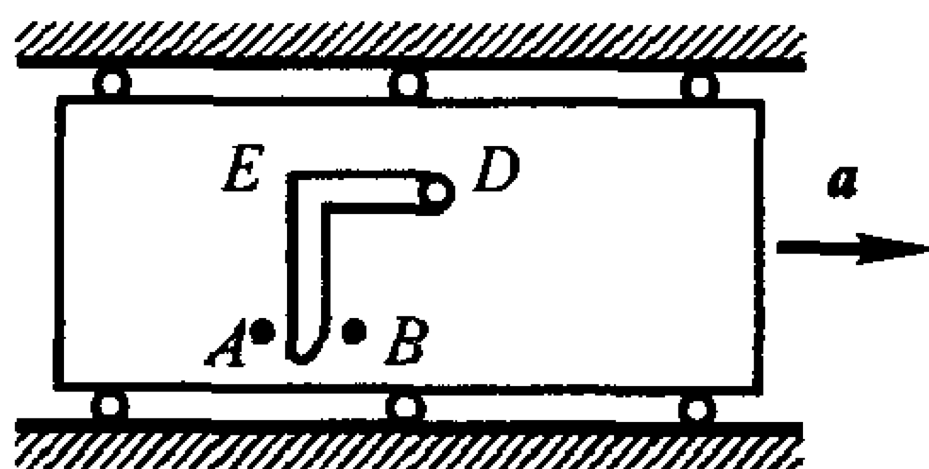
12－23 均质圆柱体 A 和 B 的质量均为 m，半径均为 r，一绳缠在绕固定轴 O 转动的圆柱 A 上，绳的另一端绕在圆柱 B 上，直线绳段铅垂，如图所示。摩擦不计。求：(1) 圆柱体 B

下落时质心的加速度；(2) 若在圆柱体 A 上作用一逆时针转向，矩为 M 的力偶，试问在什么条件下圆柱体 B 的质心加速度将向上。

12-24　质量 $m=3$ kg 且长度 $ED=EA=200$ mm 的直角弯杆，在 D 点铰接于加速运动的板上。为了防止杆的转动，在板上 A，B 两点固定两个光滑螺栓，整个系统位于铅垂面内，板沿直线轨道运动。

(1) 若板的加速度 $a=2g$（g 为重力加速度），求螺栓 A 或 B 及铰 D 对弯杆的约束力；

(2) 若弯杆在 A，B 处均不受力，求板的加速度 a 及铰 D 对弯杆的约束力。



题 12-24 图

第十三章　动能定理

能量转换与功之间的关系是自然界中各种形式运动的普遍规律，在机械运动中则表现为**动能定理**。不同于动量和动量矩定理，动能定理是从能量的角度来分析质点和质点系的动力学问题，有时这是更为方便和有效的。同时，它还可以建立机械运动与其他形式运动之间的联系。

本章将讨论力的功、动能和势能等重要概念，推导动能定理和机械能守恒定律，并将综合运用动量定理、动量矩定理和动能定理分析较复杂的动力学问题。

§13-1　力　的　功

质点 M 在大小和方向都不变的力 $\boldsymbol{F}$ 作用下，沿直线走过一段路程 s，力 $\boldsymbol{F}$ 在这段路程内所积累的效应用力的**功**来量度，以 W 记之，定义为

$$W = F\cos\theta \cdot s$$

式中 θ 为力 $\boldsymbol{F}$ 与直线位移方向之间的夹角。功是代数量，在国际单位制中，功的单位为 J(焦耳)，等于 1 N 的力在同方向 1 m 路程上作的功。

质点 M 在变力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿曲线运动，如图 13-1 所示。力 $\boldsymbol{F}$ 在无限小**位移** $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 中可视为常力，经过的一小段弧长 $\mathrm{d}s$ 可视为直线，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 可视为沿点 M 的切线。在一无限小位移中力作的功称为元功，以 δW 记之[①]。

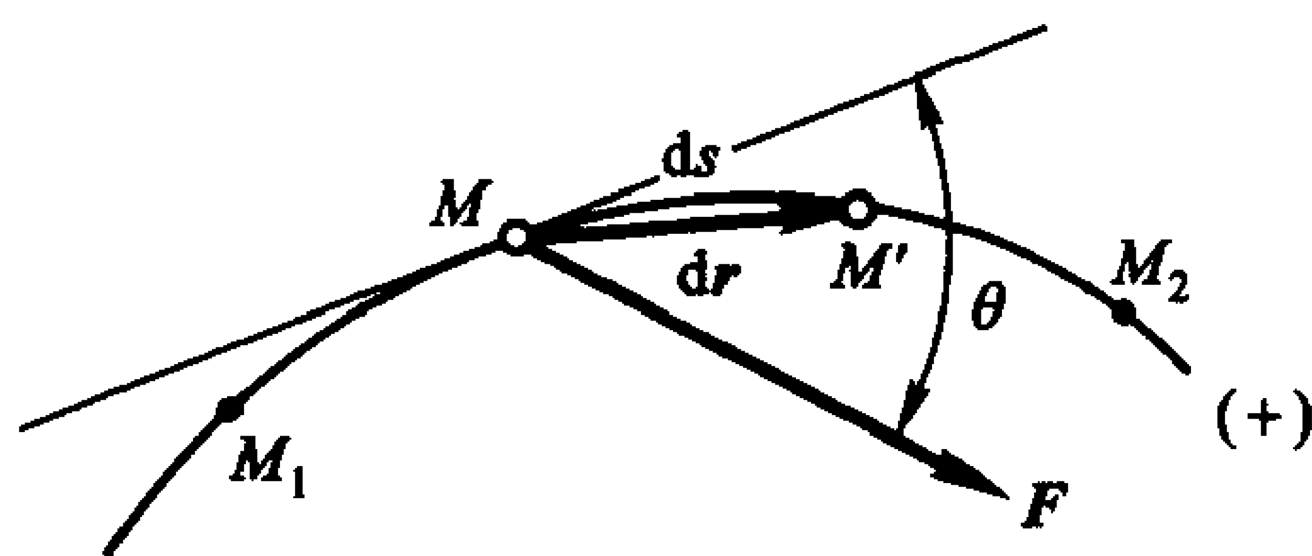


图 13-1

于是有

$$\delta W = F\cos\theta \mathrm{d}s \qquad (13-1)$$

力在全路程上作的功等于元功之和，即

$$W = \int_0^s F\cos\theta \mathrm{d}s \qquad (13-2)$$

上两式也可写成以下矢量点乘形式：

$$\delta W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (13-3)$$

---

① 因为力的元功只在某些条件下才可能是函数 W 的全微分 $\mathrm{d}W$，因而将一般力的元功写成 δW，而不写成 $\mathrm{d}W$。

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{13-4}$$

由上式可知，当力始终与质点位移垂直时，该力不作功。

在直角坐标系中，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 为三坐标轴的单位矢量，则

$$\boldsymbol{F} = F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j} + F_z \boldsymbol{k}, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}$$

将以上两式代入式(13-4)，得到作用力从 M_1 到 M_2 的过程中所作的功

$$W_{12} = \int_{M_1}^{M_2} (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z) \tag{13-5}$$

下面计算几种常见力所作的功。

1. 重力的功

设质点沿轨道由 M_1 运动到 M_2，如图 13-2 所示。其重力 $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ 在直角坐标轴上的投影为

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg$$

应用式(13-5)，重力作功为

$$W_{12} = \int_{z_1}^{z_2} -mg\mathrm{d}z = mg(z_1 - z_2) \tag{13-6}$$

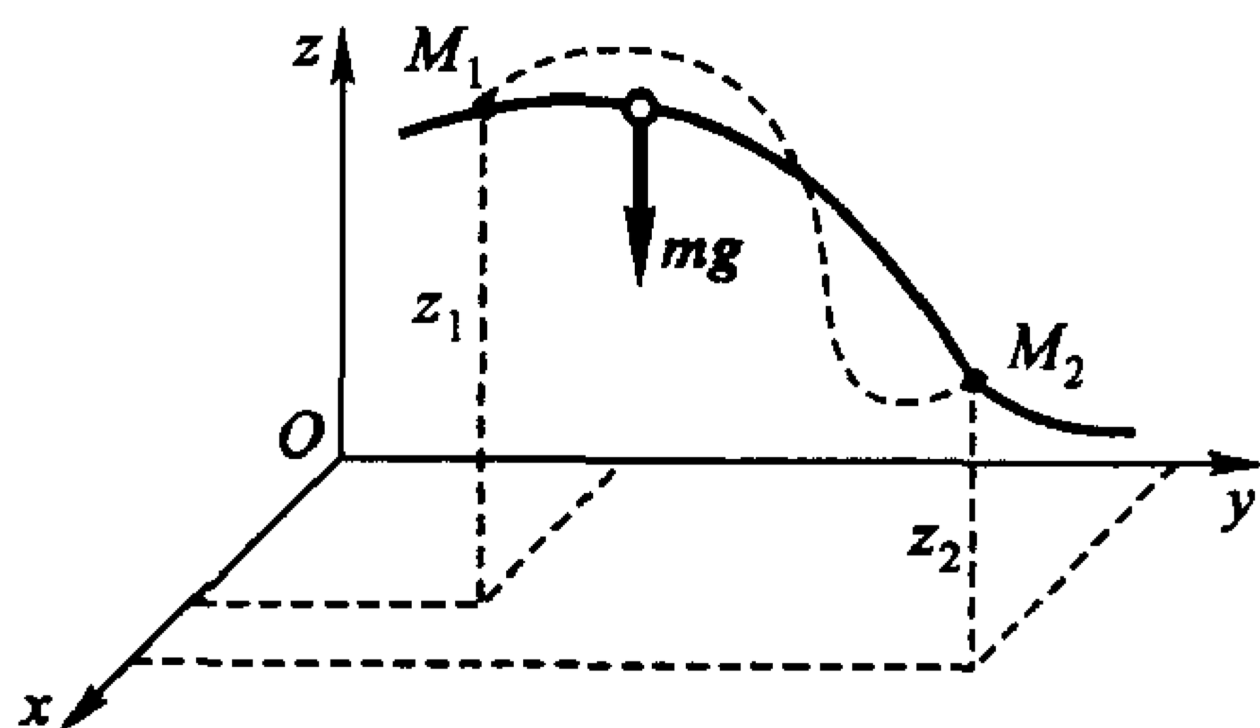


图 13-2

可见重力作功仅与质点运动开始和末了位置的高度差$(z_1 - z_2)$有关，与运动轨迹的形状无关。

对于质点系，设质点 i 的质量为 m_i，运动始末的高度差为$(z_{i1} - z_{i2})$，则全部重力作功之和为

$$\sum W_{12} = \sum m_i g(z_{i1} - z_{i2})$$

由质心坐标公式，有

$$mz_C = \sum m_i z_i$$

由此可得

$$\sum W_{12} = mg(z_{C1} - z_{C2}) \tag{13-7}$$

式中 m 为质点系全部质量之和，$(z_{C1} - z_{C2})$为运动始末位置其质心的高度差。质心下降，重力作正功；质心上移，重力作负功。质点系重力作功仍与质心的运动轨迹形状无关。

2. 弹性力的功

物体受到弹性力的作用，作用点 A 的轨迹为图 13-3 所示的曲线$\overset{\frown}{A_1 A_2}$。在弹簧的弹性极限内，弹性力的大小与其变形量 δ 成正比，即

$$F = k\delta$$

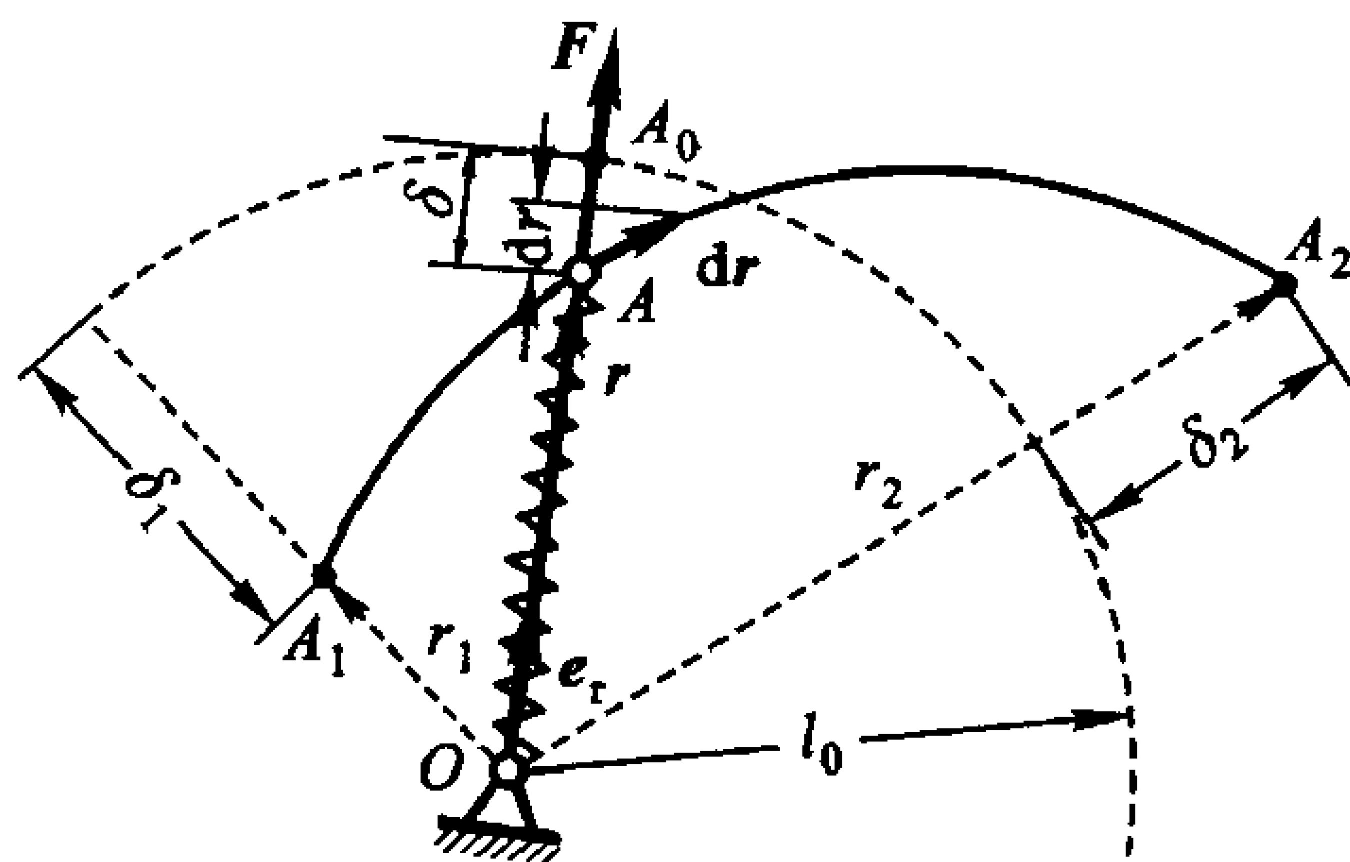


图 13-3

力的方向总是指向未变形时的自然位置。比例系数 k 称为**弹簧刚度系数**(或刚性系数)。在国际单位制中,k 的单位为 N/m 或 N/mm。

以点 O 为原点,点 A 的矢径为 $\boldsymbol{r}$,其长度为 r。令沿矢径方向的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_r$,弹簧的自然长度为 l_0,则弹性力

$$\boldsymbol{F}=-k(r-l_0)\boldsymbol{e}_r$$

当弹簧伸长时,$r>l_0$,力 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{e}_r$ 的方向相反;当弹簧被压缩时,$r<l_0$,力 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{e}_r$ 的方向一致。应用式(13-4),点 A 由 A_1 到 A_2 时,弹性力作功为

$$W_{12}=\int_{A_1}^{A_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{A_1}^{A_2}-k(r-l_0)\boldsymbol{e}_r\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

因为

$$\boldsymbol{e}_r\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{1}{2r}\mathrm{d}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=\frac{1}{2r}\mathrm{d}(r^2)=\mathrm{d}r$$

于是

$$W_{12}=\int_{r_1}^{r_2}-k(r-l_0)\mathrm{d}r=\frac{k}{2}[(r_1-l_0)^2-(r_2-l_0)^2]$$

或

$$W_{12}=\frac{k}{2}(\delta_1^2-\delta_2^2) \tag{13-8}$$

上述推导中轨迹$\overset{\frown}{A_1A_2}$可以是空间任意曲线。由此可见,弹性力作的功只与弹簧在初始和末了位置的变形量 δ 有关,与力作用点 A 的轨迹形状无关。由式(13-8)可见,当 $\delta_1>\delta_2$ 时,弹性力作正功;$\delta_1<\delta_2$ 时,弹性力作负功。

弹性力功的大小可由图 13-4 中所示的阴影面积表示,其横轴为弹簧变形量 δ,纵轴为弹性力的大小 F。由图可见,当弹簧变形量由 δ_1 增为 δ_2,再由 δ_2 增为 δ_3 时,即使 $\delta_3-\delta_2=\delta_2-\delta_1$,在此两段相同位移内,弹性力作功也是不相等的。

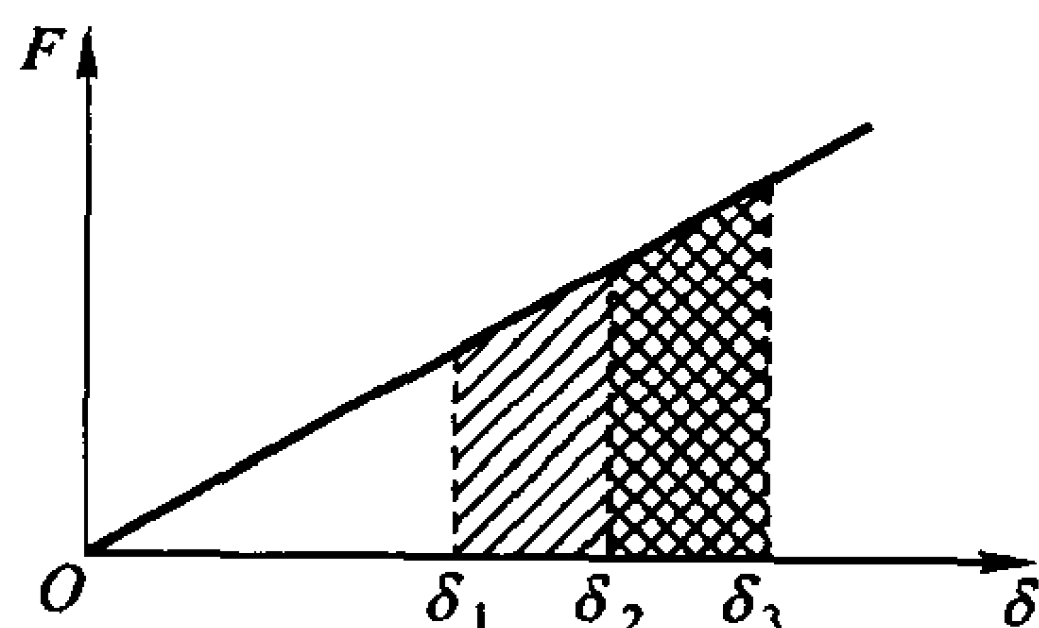


图 13-4

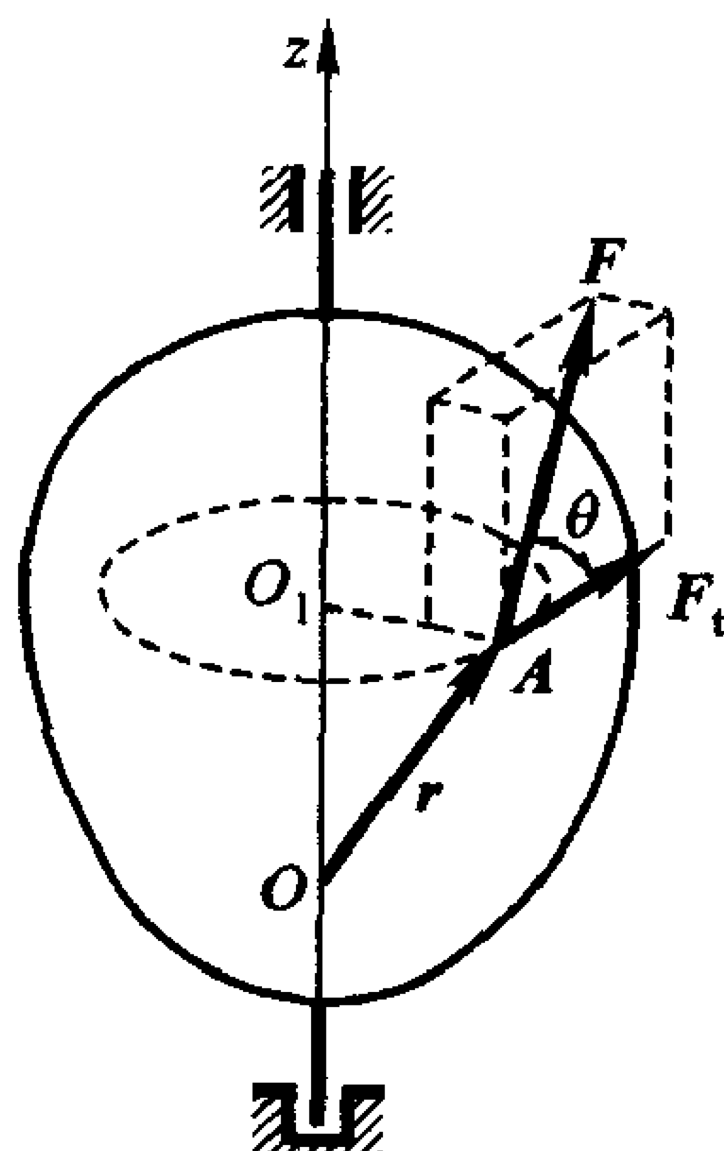


图 13-5

3. 定轴转动刚体上作用力的功

设力 $\boldsymbol{F}$ 与力作用点 A 处的轨迹切线之间的夹角为 θ，如图 13-5 所示，则力 $\boldsymbol{F}$ 在切线上的投影为

$$F_t = F\cos\theta$$

当刚体绕定轴转动时，转角 φ 与弧长 s 的关系为

$$ds = R d\varphi$$

式中 R 为力作用点 A 到轴的垂距。力 $\boldsymbol{F}$ 的元功为

$$\delta W = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = F_t ds = F_t R d\varphi$$

因为 $F_t R$ 等于力 $\boldsymbol{F}$ 对于转轴 z 的力矩 M_z，于是

$$\delta W = M_z d\varphi \tag{13-9}$$

力 $\boldsymbol{F}$ 在刚体从角 φ_1 到 φ_2 转动过程中作的功为

$$W_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi \tag{13-10}$$

如果刚体上作用一力偶，则力偶所作的功仍可用上式计算，其中 M_z 为力偶对转轴 z 的矩，也等于力偶矩矢 $\boldsymbol{M}$ 在 z 轴上的投影。

4. 平面运动刚体上力系的功

平面运动刚体上力系的功，等于刚体上所受各力作功的代数和。

平面运动刚体上力系的功，也等于力系向质心简化所得的力与力偶作功之和，证明如下：

平面运动刚体上受有多个力作用，取刚体的质心 C 为基点，当刚体有无限小位移时，任一力 $\boldsymbol{F}_i$ 作用点 M_i 的位移为

$$d\boldsymbol{r}_i = d\boldsymbol{r}_C + d\boldsymbol{r}_{iC}$$

其中 $d\boldsymbol{r}_C$ 为质心的无限小位移，$d\boldsymbol{r}_{iC}$ 为点 M_i 绕质心 C 的微小转动位移，如图

13－6所示。力 $\boldsymbol{F}_i$ 在点 M_i 位移上所作元功为

$$\delta W_i=\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{iC}$$

如刚体无限小转角为 $\mathrm{d}\varphi$，则转动位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{iC}\perp\overline{M_iC}$，大小为 $M_iC\cdot\mathrm{d}\varphi$。因此，上式后一项

$$\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{iC}=F_i\cos\theta\cdot M_iC\cdot\mathrm{d}\varphi=M_C(\boldsymbol{F}_i)\mathrm{d}\varphi$$

其中 θ 为力 $\boldsymbol{F}_i$ 与转动位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{iC}$ 间的夹角，$M_C(\boldsymbol{F}_i)$ 为力 $\boldsymbol{F}_i$ 对质心 C 的矩。

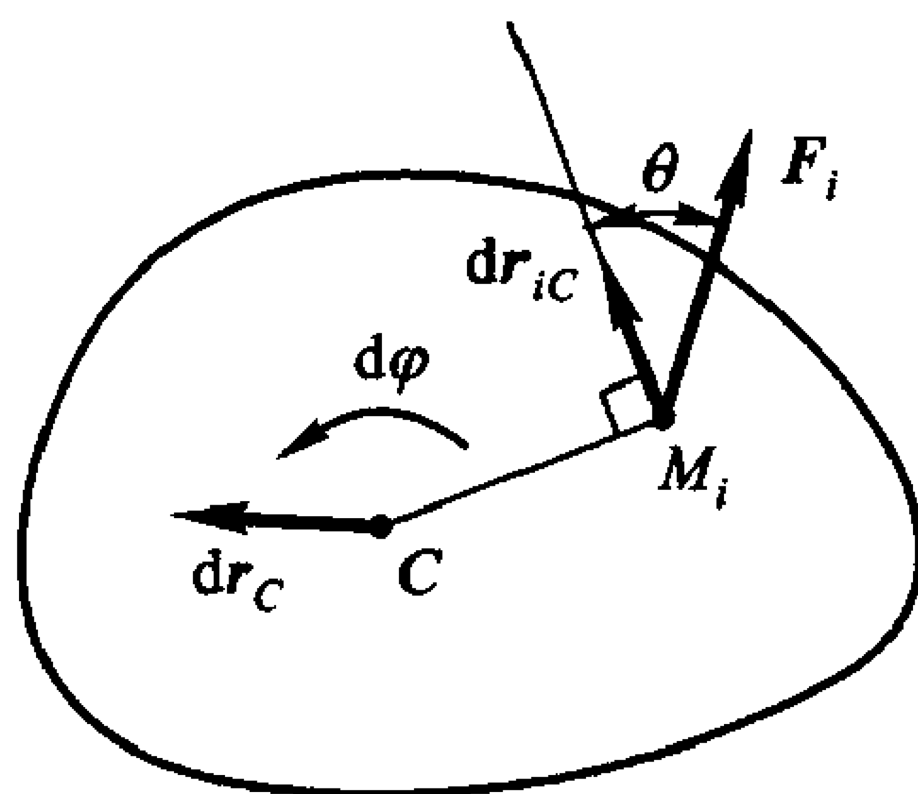


图 13－6

力系全部力所作元功之和为

$$\begin{aligned}\delta W&=\sum\delta W_i=\sum\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C+\sum M_C(\boldsymbol{F}_i)\mathrm{d}\varphi\\&=\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C+M_C\mathrm{d}\varphi\end{aligned}\qquad(13-11)$$

其中 $\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}$ 为力系主矢，M_C 为力系对质心的主矩。刚体质心 C 由 C_1 移到 C_2，同时刚体又由 φ_1 转到 φ_2 角度时，力系作功为

$$W_{12}=\int_{C_1}^{C_2}\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C+\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}M_C\mathrm{d}\varphi\qquad(13-12)$$

可见，平面运动刚体上力系的功等于力系向质心简化所得的力和力偶作功之和。这个结论也适用于作一般运动的刚体，基点也可以是刚体上任意一点。

§13－2　质点和质点系的动能

1．质点的动能

设质点的质量为 m，速度为 $\boldsymbol{v}$，则质点的**动能**为

$$\frac{1}{2}mv^2$$

动能是标量，恒取正值。在国际单位制中动能的单位也为 J。

动能和动量都是表征机械运动的量，前者与质点速度的平方成正比，是一个标量；后者与质点速度的一次方成正比，是一个矢量，它们是机械运动的两种不同的度量。

2．质点系的动能

质点系内各质点动能的算术和称为质点系的动能，即

$$T=\sum\frac{1}{2}m_iv_i^2$$

刚体是由无数质点组成的质点系。刚体作不同的运动时，各质点的速度分布不同，刚体的动能应按照刚体的运动形式来计算。

（1）平移刚体的动能

刚体作平移时，各点的速度都相同，可以质心速度 $\boldsymbol{v}_C$ 为代表，于是得平移刚

体的动能为

$$T=\sum\frac{1}{2}m_iv_i^2=\frac{1}{2}v_C^2\cdot\sum m_i$$

或写成

$$T=\frac{1}{2}mv_C^2 \tag{13－13}$$

式中 $m=\sum m_i$ 是刚体的质量。

（2）定轴转动刚体的动能

刚体绕定轴 z 转动时，如图 13－7 所示，其中任一点 m_i 的速度为

$$v_i=r_i\omega$$

式中 ω 是刚体的角速度，r_i 是质点 m_i 到转轴的垂距。于是绕定轴转动刚体的动能为

$$T=\sum\frac{1}{2}m_iv_i^2=\sum\left(\frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2\right)=\frac{1}{2}\omega^2\cdot\sum m_ir_i^2$$

$\sum m_ir_i^2=J_z$，是刚体对于 z 轴的转动惯量，于是得

$$T=\frac{1}{2}J_z\omega^2 \tag{13－14}$$

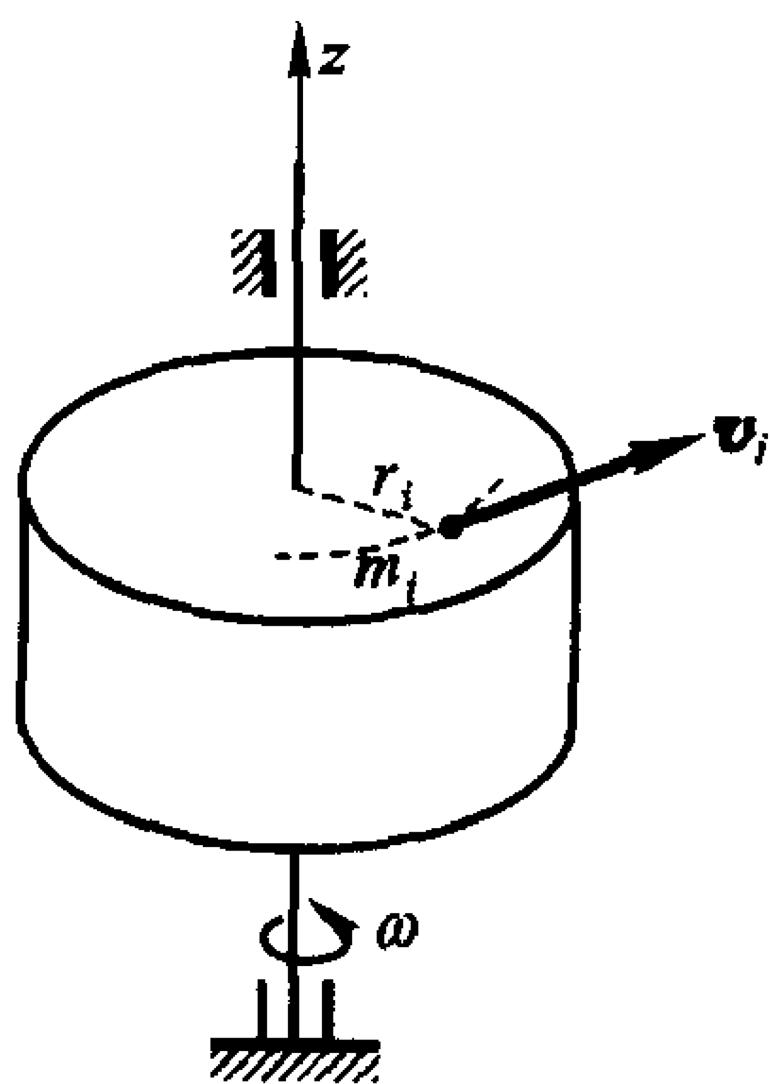


图 13－7

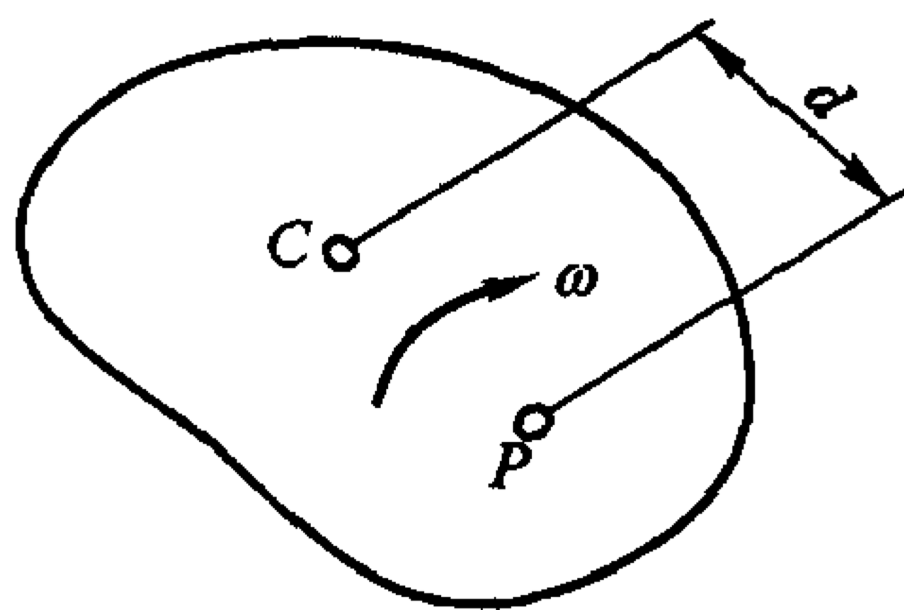


图 13－8

（3）平面运动刚体的动能

取刚体质心 C 所在的平面图形如图 13－8 所示。设图形中的点 P 是某瞬时的瞬心，ω 是平面图形转动的角速度。此瞬时，刚体上各点速度的分布与绕点 P 转动的刚体相同，于是作平面运动的刚体的动能为

$$T=\frac{1}{2}J_P\omega^2$$

式中 J_P 是刚体对于瞬时轴的转动惯量。然而在不同时刻，刚体以不同的点作为

瞬心，因此用上式计算动能在有些情况下是不方便的。

如 C 为刚体的质心，根据计算转动惯量的平行轴定理有

$$J_P = J_C + md^2$$

式中 m 为刚体的质量，$d = CP$，J_C 为对于质心的转动惯量。代入计算动能的公式中，得

$$T = \frac{1}{2}(J_C + md^2)\omega^2 = \frac{1}{2}J_C\omega^2 + \frac{1}{2}m(d\cdot\omega)^2$$

因 $d\cdot\omega = v_C$，于是得

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 \qquad (13-15)$$

即作平面运动的刚体的动能，等于随质心平移的动能与绕质心转动的动能的和。例如，一车轮在地面上只滚不滑，如图 13-9 所示。若轮心作直线运动，速度为 $\boldsymbol{v}_C$，车轮质量为 m，质量分布在轮缘，轮辐的质量不计，则车轮的动能为

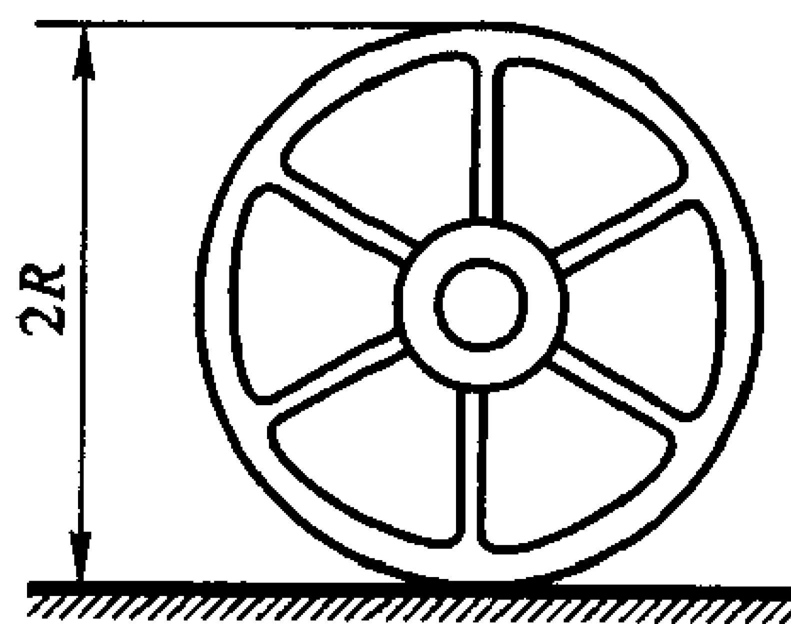


图 13-9

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v_C}{R}\right)^2 = mv_C^2$$

其他运动形式的刚体，应按其速度分布计算该刚体的动能。

§13-3 动能定理

1. 质点的动能定理

取质点运动微分方程的矢量形式

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$$

在方程两边点乘 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，得

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

因 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$，于是上式可写成

$$m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

或

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \delta W \qquad (13-16)$$

式(13-16)称为质点动能定理的微分形式，即质点动能的增量等于作用在质点上力的元功。

积分上式，得

$$\int_{v_1}^{v_2} \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = W_{12}$$

或

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_{12} \qquad (13-17)$$

这就是质点动能定理的积分形式：在质点运动的某个过程中，质点动能的改变量等于作用于质点的力作的功。

由式(13-16)或(13-17)可见，力作正功，质点动能增加；力作负功，质点动能减小。

2. 质点系的动能定理

质点系内任一质点，质量为 m_i，速度为 $\boldsymbol{v}_i$，根据质点的动能定理的微分形式，有

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \delta W_i$$

式中 δW_i 表示作用于这个质点的力 $\boldsymbol{F}_i$ 所作的元功。

设质点系有 n 个质点，对于每个质点都可列出一个如上的方程，将 n 个方程相加，得

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \delta W_i$$

或

$$\mathrm{d}\left[\sum\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right)\right] = \sum \delta W_i$$

式中 $\sum\frac{1}{2}m_i v_i^2$ 是质点系的动能，以 T 表示。于是上式可写成

$$\mathrm{d}T = \sum \delta W_i \qquad (13-18)$$

式(13-18)为质点系动能定理的微分形式：质点系动能的增量，等于作用于质点系全部力所作的元功的和。

对上式积分，得

$$T_2 - T_1 = \sum W_i \qquad (13-19)$$

上式中 T_1 和 T_2 分别是质点系在某一段运动过程的起点和终点的动能。式(13-19)为质点系动能定理的积分形式：质点系在某一段运动过程中，起点和终点的动能的改变量，等于作用于质点系的全部力在这段过程中所作功的和。

3. 理想约束及内力作功

对于光滑固定面和一端固定的绳索等约束，其约束力都垂直于力作用点的位移，约束力不作功。又如光滑铰支座、固定端等约束，显然其约束力也不作功。约束力作功等于零的约束称为理想约束。在理想约束条件下，质点系动能的改变只与主动力作功有关，式(13-18)和(13-19)中只需计算主动力所作的功。

光滑铰链、刚性二力杆以及不可伸长的细绳等作为系统内的约束时，其中单个的约束力不一定不作功，但一对约束力作功之和等于零，也都是理想约束。如图 13－10a 所示的铰链，铰链处相互作用的约束力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$ 是等值反向的，它们在铰链中心的任何位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 上作功之和都等于零。又如图 13－10b 中，跨过光滑支持轮的细绳对系统中两个质点的拉力 $F_1=F_2$，如绳索不可伸长，则两端的位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$ 沿绳索的投影必相等，因而两约束力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 作功之和等于零。至于图 13－10c 所示的二力杆对 A，B 两点的约束力，有 $F_1=F_2$，而两端位移沿 AB 连线的投影又是相等的，显然两约束力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 作功之和也等于零。

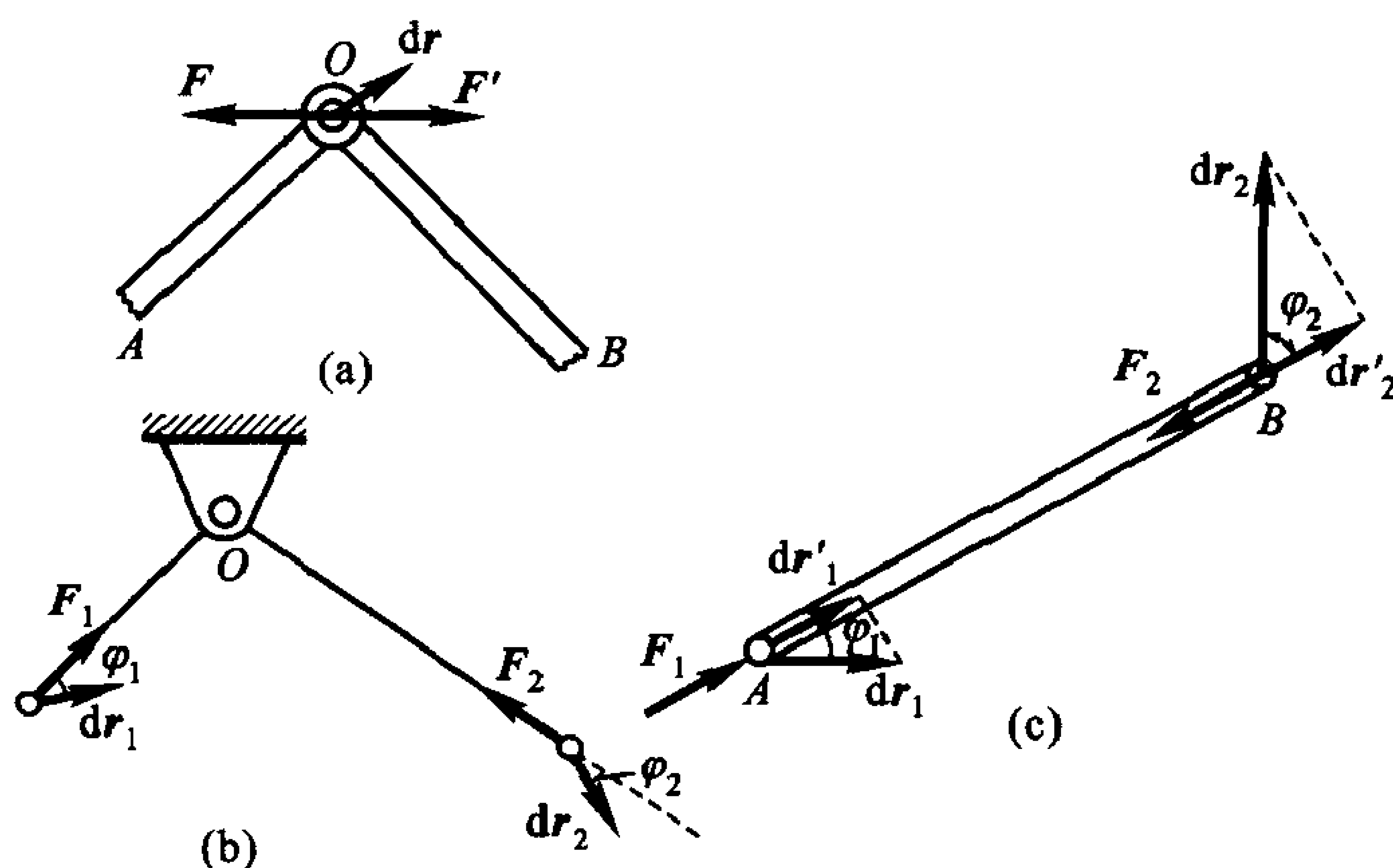


图 13－10

一般情况下，滑动摩擦力与物体的相对位移反向，摩擦力作负功，不是理想约束，应用动能定理时要计入摩擦力的功。但当轮子在固定面上只滚不滑时，接触点为瞬心，滑动摩擦力作用点没动，此时的滑动摩擦力也不作功。因此，不计滚动摩阻时，纯滚动的接触点也是理想约束。

工程中很多约束可视为理想约束，此时未知的约束力并不作功，这对动能定理的应用是非常方便的。

必须注意，作用于质点系的力既有外力，也有内力，在某些情形下，内力虽然等值而反向，但所作功的和并不等于零。例如，由两个相互吸引的质点 M_1 和 M_2 组成的质点系，两质点相互作用的力 $\boldsymbol{F}_{12}$ 和 $\boldsymbol{F}_{21}$ 是一对内力，如图 13－11 所示。虽然内力的矢量和等于零，但是当两质点相互趋近或离开时，两力所作功的和都不等于零。又如，汽车发动机的气缸内膨胀的气体对活塞和气缸的作用力都是内力，但内力功的和不等于零，内力的功使汽车的动能增

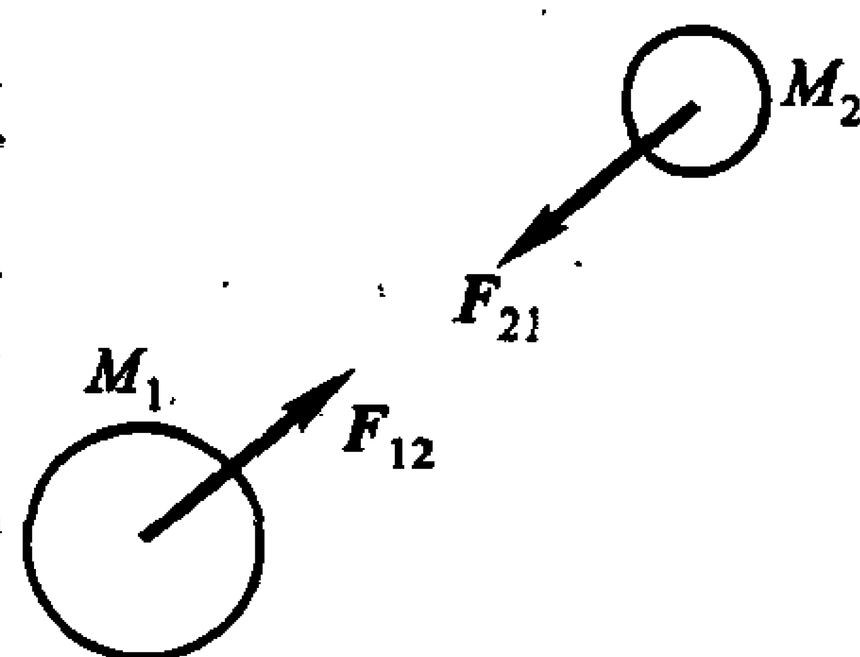


图 13－11

加。此外,如机器中轴与轴承之间相互作用的摩擦力对于整个机器是内力,它们作负功,总和为负。应用动能定理时都要计入这些内力所作用的功。

同时也应注意,在不少情况下,内力所作功的和等于零。例如,刚体内两质点相互作用的力是内力,两力大小相等、方向相反。因为刚体上任意两点的距离保持不变,沿这两点连线的位移必定相等,其中一力作正功,另一力作负功,这一对力所作的功的和等于零。刚体内任一对内力所作的功的和都等于零。于是得结论:刚体所有内力作功的和等于零。

不可伸长的柔绳、钢索等所有内力作功的和也等于零。

从以上分析可见,在应用质点系的动能定理时,要根据具体情况仔细分析所有的作用力,以确定它是否作功。应注意:理想约束的约束力不作功,而质点系的内力作功之和并不一定等于零。

例 13-1 质量为 m 的质点,自高 h 处自由落下,落到下面有弹簧支持的板上,如图 13-12所示。设板和弹簧的质量都可忽略不计,弹簧的刚度系数为 k。求弹簧的最大压缩量。

解: 质点从位置Ⅰ落到板上是自由落体运动,速度由 0 增加到 v_1,应用动能定理

$$\frac{1}{2}mv_1^2-0=mgh$$

求得

$$v_1=\sqrt{2gh}$$

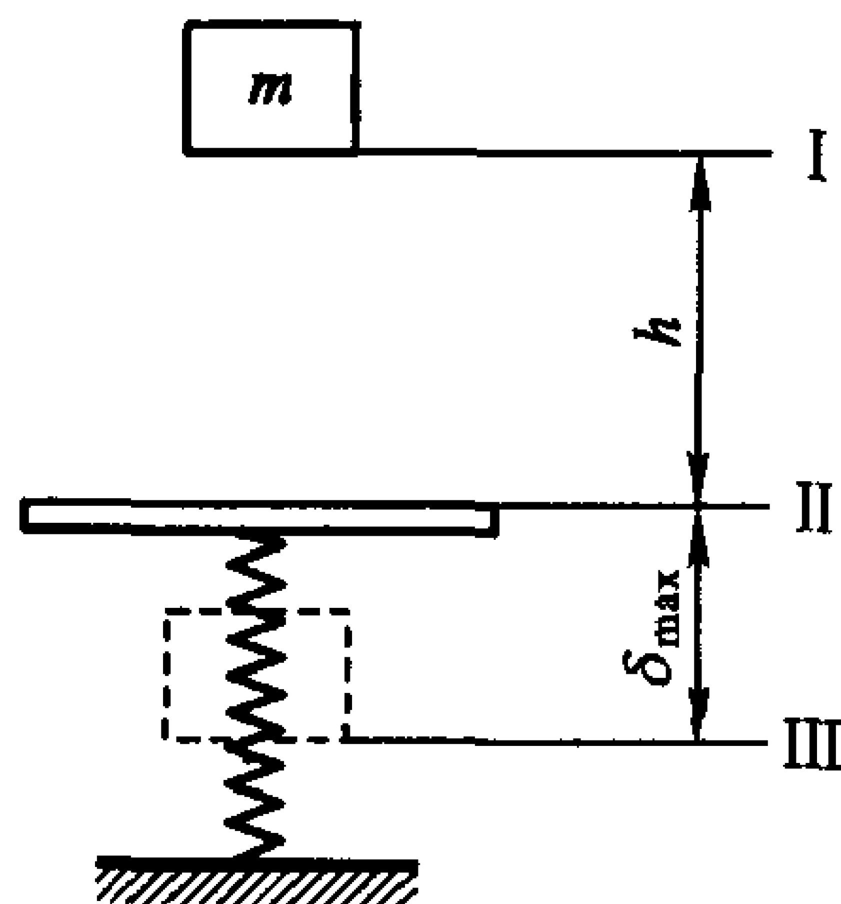


图 13-12

质点继续向下运动,弹簧被压缩,质点速度逐渐减小,当速度等于零时,弹簧被压缩到最大值 δ_{max}。在这段过程中重力作的功为 $mg\delta_{max}$,弹簧力作的功为 $\frac{1}{2}k(0-\delta_{max}^2)$,应用动能定理

$$0-\frac{1}{2}mv_1^2=mg\delta_{max}-\frac{1}{2}k\delta_{max}^2$$

解得

$$\delta_{max}=\frac{mg}{k}\pm\frac{1}{k}\sqrt{m^2g^2+2kmgh}$$

由于弹簧的压缩量必定是正值,应取

$$\delta_{max}=\frac{mg}{k}+\frac{1}{k}\sqrt{m^2g^2+2kmgh}$$

本题也可以把上述两段过程合在一起考虑,即对质点从Ⅰ处开始下落至弹簧压缩到最大值的Ⅲ处应用动能定理,在这一过程的始末位置质点的动能都等于零。由动能定理

$$0-0=mg(h+\delta_{max})-\frac{k}{2}\delta_{max}^2$$

解得同样结果。

例 13-2 卷扬机如图 13-13 所示。鼓轮在常力偶 M 的作用下将圆柱由静止沿斜坡上拉。已知鼓轮的半径为 R_1,质量为 m_1,质量分布在轮缘上;圆柱的半径为 R_2,质量为 m_2,质量均匀分布。设斜坡的倾角为 θ,圆柱只滚不滑。求圆柱中心 C 经过路程 s 时的速度

与加速度。

解： 圆柱和鼓轮一起组成质点系。作用于该质点系的外力有：重力 m_1g 和 m_2g，外力偶 M，水平轴约束力 F_{Ox} 和 F_{Oy}，斜面对圆柱的法向约束力 F_N 和静摩擦力 F_s。

因为点 O 没有位移，力 F_{Ox}，F_{Oy} 和 m_1g 所作的功等于零；圆柱沿斜面只滚不滑，瞬心 D 点速度为零，因此作用于点 D 的法向约束力 F_N 和静摩擦力 F_s 不作功，此系统只受理想约束，且内力作功为零。主动力所作的功为：

$$W_{12} = M\varphi - m_2 g\sin\theta\cdot s$$

图 13－13

质点系的动能为

$$T_1 = 0,\quad T_2 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega_2^2$$

式中 J_1，J_C 分别为鼓轮对于中心轴 O、圆柱对于过质心 C 的轴的转动惯量：

$$J_1 = m_1 R_1^2,\quad J_C = \frac{1}{2}m_2 R_2^2$$

ω_1 和 ω_2 分别为鼓轮和圆柱的角速度，即

$$\omega_1 = \frac{v_C}{R_1},\quad \omega_2 = \frac{v_C}{R_2}$$

于是

$$T_2 = \frac{v_C^2}{4}(2m_1 + 3m_2)$$

由质点系的动能定量，得

$$\frac{v_C^2}{4}(2m_1 + 3m_2) - 0 = M\varphi - m_2 g\sin\theta\cdot s \tag{a}$$

以 $\varphi = \frac{s}{R_1}$ 代入，解得

$$v_C = 2\sqrt{\frac{(M - m_2 gR_1\sin\theta)s}{R_1(2m_1 + 3m_2)}}$$

系统运动过程中，速度 v_C 与路程 s 都是时间的函数，将式(a)两端对时间求一阶导数，有

$$\frac{1}{2}(2m_1 + 3m_2)v_C a_C = M\frac{v_C}{R_1} - m_2 g\sin\theta\cdot v_C \tag{b}$$

求得圆柱中心 C 的加速度为

$$a_C = \frac{2(M - m_2 gR_1\sin\theta)}{(2m_1 + 3m_2)R_1}$$

例 13－3 材料承受冲击的能力可由冲击试验机测定，如图 13－14 所示。试验机摆锤质量为 18kg，重心到转动轴的距离 $l = 840$ mm。杆重不计。试验开始时，将摆锤升高到摆角 $\varphi_1 = 70°$ 的地方后释放，冲断试件后，摆锤上升的摆角 $\varphi_2 = 29°$。求冲断试件需用的能量。

解： 冲断试件前后，摆锤的角速度发生突然变化。摆锤损失的动能被试件吸收，就是冲断试件需用的能量。

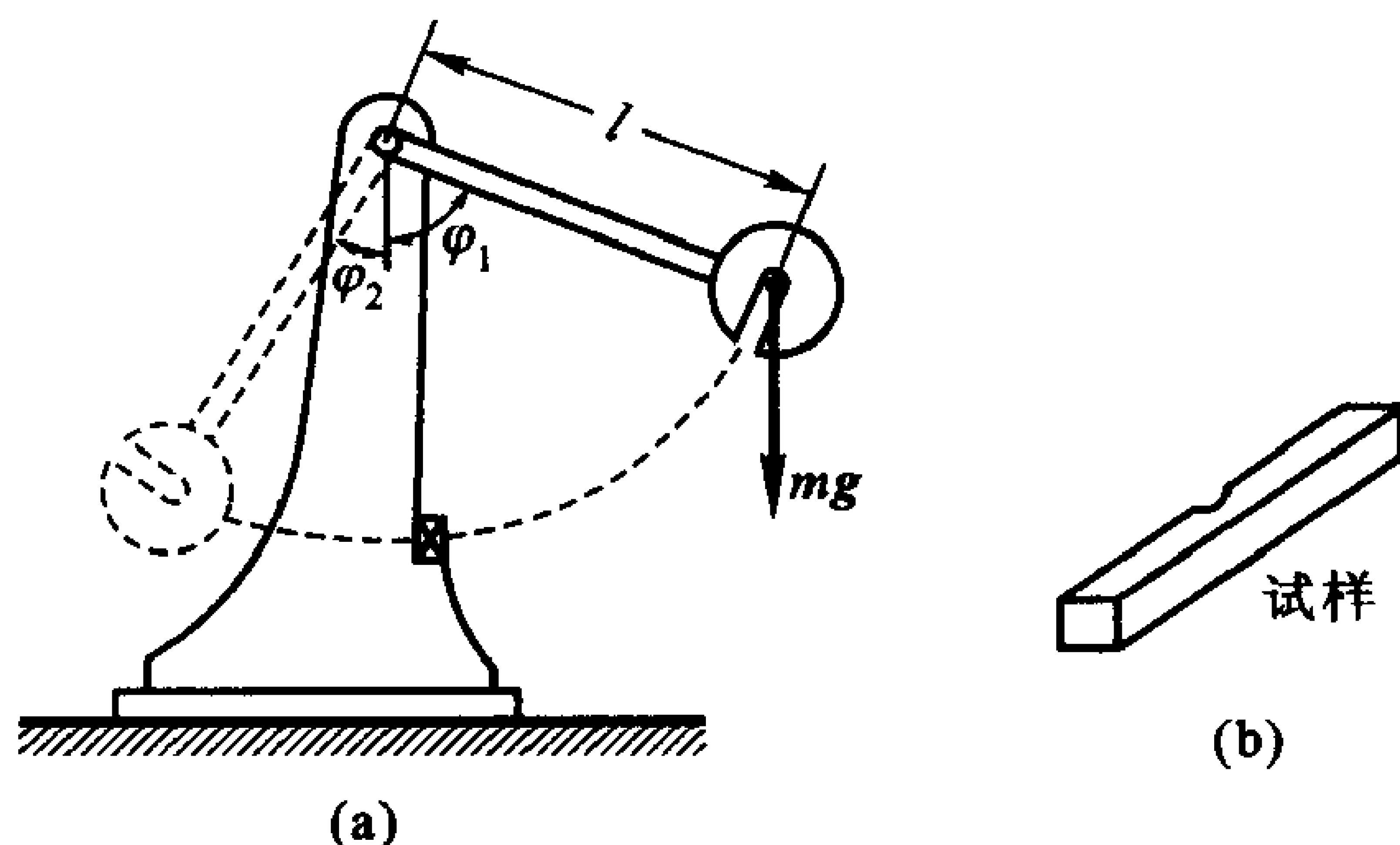


图 13－14

设摆锤冲击试件前的角速度为 ω_1，试件冲断后摆锤的角速度为 ω_2。角速度的变化是在冲击的一瞬间发生的，这时摆锤都在铅直位置。

先研究冲击试件前摆锤的下落过程。摆锤初始动能为零，末动能为 T_1。在这一过程中重力作正功。根据动能定理有

$$T_1 - 0 = mgl(1 - \cos\varphi_1)$$

代入已知数据，得

$$T_1 = 18\ \text{kg} \times 9.8\ \text{m/s}^2 \times 0.84\ \text{m} \times (1 - \cos 70^\circ) = 97.5\ \text{J}$$

再研究冲断试件后摆锤上升的过程。刚冲断试件的瞬时，设摆锤的角速度为 ω_2，动能为 T_2。当摆锤到达最高位置时，角速度为零，动能等于零，在这过程中，重力作负功。根据动能定理有

$$0 - T_2 = -mgl(1 - \cos\varphi_2)$$

代入已知数据，得

$$T_2 = 18\ \text{kg} \times 9.8\ \text{m/s}^2 \times 0.84\ \text{m} \times (1 - \cos 29^\circ) = 18.58\ \text{J}$$

摆锤在冲断试件时损失的动能等于冲断试件需要的能量 W_k，即

$$W_k = T_1 - T_2 = 78.92\ \text{J}$$

设试件的最小横断面面积为 A，则有

$$a_k = \frac{W_k}{A}$$

称为材料的冲击韧度，它是衡量材料抵抗冲击能力的一个指标。

当然，此例题也可以在 φ_1 和 φ_2 两摆角之间直接应用动能定理。此时，质点系在始、末两位置的动能都等于零，冲断试件所消耗的能量也就等于试件内力所作的负功。根据动能定理，有

$$0 - 0 = mgl(1 - \cos\varphi_1) - mgl(1 - \cos\varphi_2) - W_k$$

代入数据，将得到同样结果。

综合以上各例，总结应用动能定理解题的步骤如下：

(1) 选取某质点系(或质点)作为研究对象；

(2) 选定应用动能定理的一段过程；

(3) 分析质点系的运动，计算选定过程起点和终点的动能；

(4) 分析作用于质点系的力，计算各力在选定过程中所作的功；

(5) 应用动能定理建立方程，求解未知量。

§13-4　功率·功率方程·机械效率

1. 功率

在工程中，需要知道一部机器单位时间内能做多少功。单位时间内力所作的功称为**功率**，以 P 表示。

功率的数学表达式为

$$P=\frac{\delta W}{\mathrm{d}t}$$

因为 $\delta W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，因此功率可写成

$$P=\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=F_{t}v \tag{13-20}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 是力 $\boldsymbol{F}$ 作用点的速度。功率等于切向力与力作用点速度的乘积。每台机床、每部机器能够输出的最大功率是一定的，因此用机床加工时，如果切削力较大，必须选择较小的切削速度。又如汽车上坡时，由于需要较大的驱动力，这时驾驶员须换用低速档，以求在发动机功率一定的条件下，产生大的驱动力。

作用在转动刚体上的力的功率为

$$P=\frac{\delta W}{\mathrm{d}t}=M_{z}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=M_{z}\omega \tag{13-21}$$

式中 M_z 是力对转轴 z 的矩，ω 是角速度。即：作用于转动刚体上的力的功率等于该力对转轴的矩与角速度的乘积。

在国际单位制中，每秒钟力所作的功等于 1J 时，其功率定为 1W(瓦特)(W＝J/s)。工程中常用千瓦(kW)做单位，1 000 W＝1 kW(千瓦)。

2. 功率方程

取质点系动能定理的微分形式，两端除以 $\mathrm{d}t$，得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta W_{i}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}P_{i} \tag{13-22}$$

上式称为**功率方程**，即质点系动能对时间的一阶导数，等于作用于质点系的所有力的功率的代数和。

功率方程常用来研究机器在工作时能量的变化和转化的问题。例如车床工作时，电场对电机转子作用的力作正功，使转子转动，电场力的功率称为输入功率。由于胶带传动、齿轮传动和轴承与轴之间都有摩擦，摩擦力作负功，使一部

分机械能转化为热能；传动系统中的零件也会相互碰撞，也要损失一部分功率。这些功率都取负值，称为无用功率或损耗功率。车床切削工件时，切削阻力对夹持在车床主轴上的工件作负功，这是车床加工零件必须付出的功率，称为有用功率或输出功率。

每部机器的功率都可分为上述三部分。在一般情形下，式(13-22)可写成

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=P_{输入}-P_{有用}-P_{无用} \tag{13-23}$$

或

$$P_{输入}=P_{有用}+P_{无用}+\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \tag{13-23'}$$

3. 机械效率

工程中，要用到有效功率的概念，有效功率 $=P_{有用}+\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$，有效功率与输入功率的比值称为机器的机械功率，用 η 表示，即

$$\eta=\frac{有效功率}{输入功率} \tag{13-24}$$

由上式可知，机械效率 η 表明机器对输入功率的有效利用程度，它是评定机器质量好坏的指标之一。显然，一般情况下，$\eta<1$。

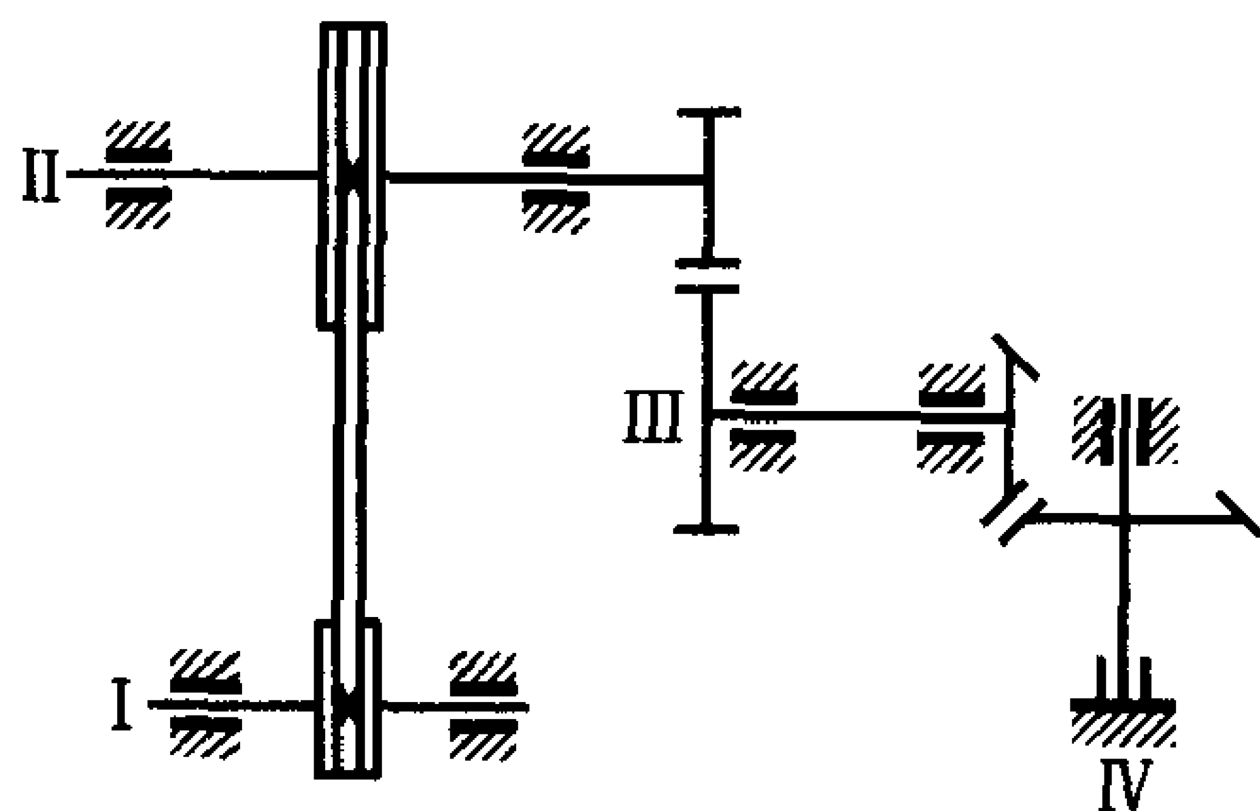


图 13-15

一部机器的传动部分一般由许多零件组成。如图 13-15 所示系统，轴承与轴之间、胶带与轮之间、齿轮与齿轮之间各级传动都因摩擦而消耗功率，各级传动都有各自的效率。设 Ⅰ-Ⅱ，Ⅱ-Ⅲ，Ⅲ-Ⅳ各级的效率分别为 η_1,η_2,η_3，则 Ⅰ-Ⅳ的总效率为

$$\eta=\eta_1\cdot\eta_2\cdot\eta_3$$

对于有 n 级传动的系统，总效率等于各级效率的连乘积，即

$$\eta=\eta_1\cdot\eta_2\cdot\cdots\cdot\eta_n$$

例 13-4 车床的电动机功率 $P_{入}=5.4\ \mathrm{kW}$。由于传动零件之间的摩擦，损耗功率占输入功率的 30%。如工件的直径 $d=100\ \mathrm{mm}$，转速 $n=42\ \mathrm{r/min}$，问允许切削力的最大值为多少？若工件的转速改为 $n'=112\ \mathrm{r/min}$，问允许切削力的最大值为多少？

解： 由题意知，车床的输入功率为 $P_{入}=5.4\ \mathrm{kW}$，损耗的无用功率 $P_{无用}=P_{入}\times30\%=1.62\ \mathrm{kW}$。当工件匀速转动时，动能不变，有用功率为

$$P_{有用}=P_{入}-P_{无用}=3.78\ \mathrm{kW}$$

设切削力为 $\boldsymbol{F}$，切削速度为 $\boldsymbol{v}$，则

$$P_{有用} = Fv = F\frac{d}{2}\frac{\pi n}{30}$$

即

$$F = \frac{60}{\pi d n}P_{有用}$$

当 $n = 42$ r/min 时，允许的最大切削力为

$$F = \frac{(60\ \text{sec})(3.78\ \text{kW})}{\pi(0.1\ \text{m})(42\ \text{r/min})} = 17.19\ \text{kN}$$

当 $n = 112$ r/min 时，允许的最大切削力为

$$F = \frac{(60\ \text{sec})(3.78\ \text{kW})}{\pi(0.1\ \text{m})(112\ \text{r/min})} = 6.45\ \text{kN}$$

功率方程给出了动能变化率与功率之间的关系。动能与速度有关，其变化率含有加速度项，因而功率方程也就给出了系统的加速度与作用力之间的关系。由于功率方程中不含理想约束的约束力，因而用功率方程求解系统的加速度、建立系统的运动微分方程是很方便的。下面举例说明。

例 13－5 图 13－16 中，物块质量为 m，用不计质量的细绳跨过滑轮与弹簧相联。弹簧原长为 l_0，刚度系数为 k，质量不计。滑轮半径为 R，转动惯量为 J。不计轴承摩擦，试建立此系统的运动微分方程。

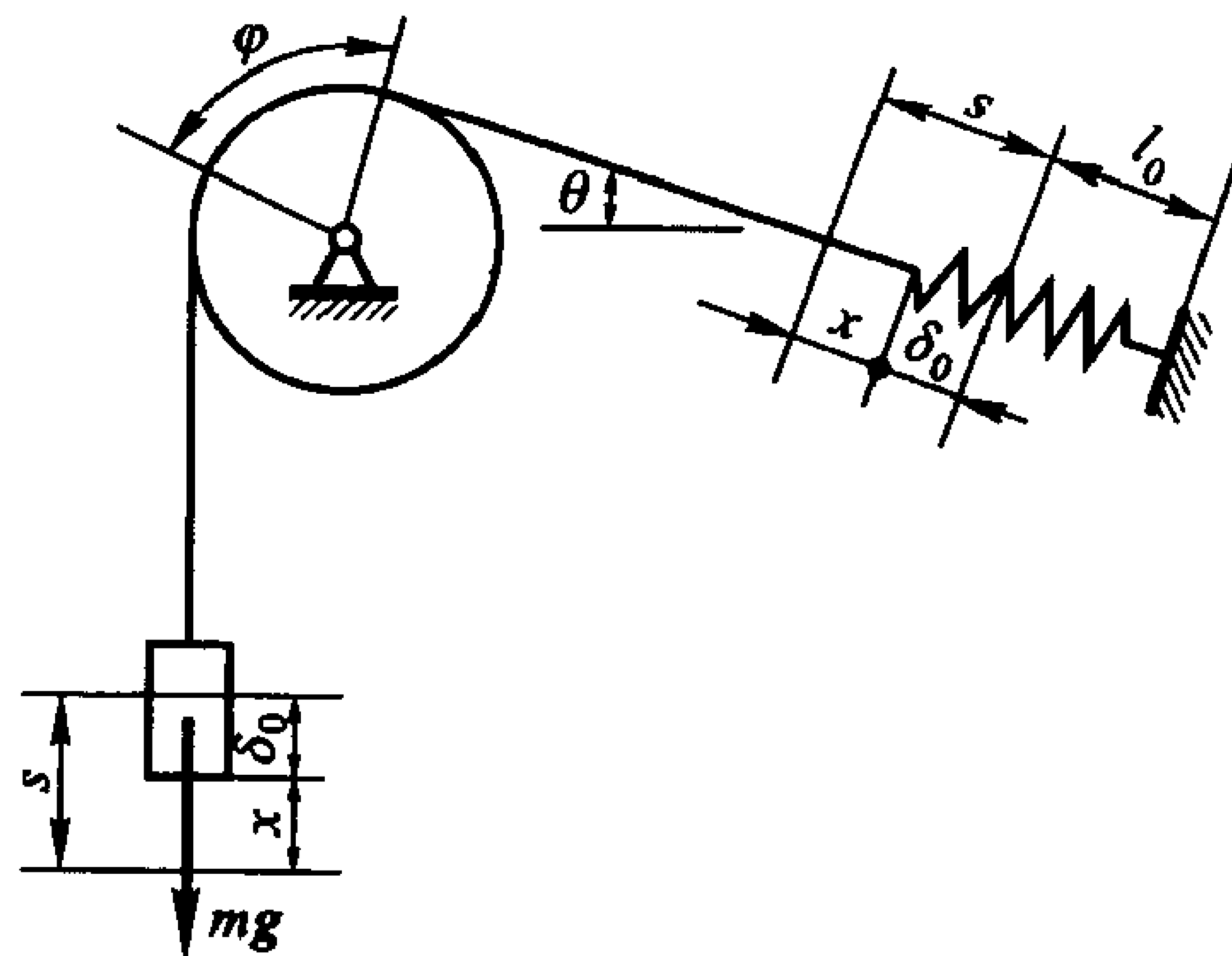


图 13－16

解： 如弹簧由自然位置拉长任一长度 s，滑轮转过 φ 角，物块下降 s，显然有 $s = R\varphi$。此时系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{R^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

重物下降速度 $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，重力功率为 $mg\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$；弹性力大小为 ks，其功率为 $-ks\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$。代入功率方程，得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \left(m + \frac{J}{R^2}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = mg\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} - ks\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

两端各消去$\frac{ds}{dt}$,得到对于坐标 s 的运动微分方程

$$\left(m+\frac{J}{R^2}\right)\frac{d^2 s}{dt^2}=mg-ks$$

如此系统静止时弹簧拉长量为 δ_0,而 $mg=k\delta_0$。以平衡位置为参考点,物体下降 x 时弹簧拉长量为 $s=\delta_0+x$,代入上式,得

$$\left(m+\frac{J}{R^2}\right)\frac{d^2 x}{dt^2}=mg-k\delta_0-kx=-kx$$

移项后,得到对于坐标 x 的运动微分方程

$$\left(m+\frac{J}{R^2}\right)\frac{d^2 x}{dt^2}+kx=0$$

这是系统自由振动微分方程的标准形式。由上述计算可见,弹簧倾斜角度 θ 与系统运动微分方程无关。

§13-5 势力场·势能·机械能守恒定律

1. 势力场

如果一物体在某空间任一位置都受到一个大小和方向完全由所在位置确定的力作用,则这部分空间称为**力场**。例如物体在地球表面的任何位置都要受到一个确定的重力的作用,我们称地球表面的空间为重力场。又如星球在太阳周围的任何位置都要受到太阳的引力的作用,引力的大小和方向决定于此星球相对于太阳的位置,我们称太阳周围的空间为太阳引力场,等等。

如果物体在力场内运动,作用于物体的力所作的功只与力作用点的初始位置和终了位置有关,而与该点的轨迹形状无关,这种力场称为**势力场**,或保守力场 在势力场中,物体受到的力称为**有势力**或保守力。由本章§13-1知,重力、弹性力作的功都有这个特点,因此它们都是保守力。可以证明,万有引力也是保守力。于是重力场、弹性力场、万有引力场都是势力场。

2. 势能

在势力场中,质点从点 M 运动到任选的点 M_0,有势力所作的功称为质点在点 M 相对于点 M_0 的**势能**。以 V 表示为

$$V=\int_M^{M_0}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_M^{M_0}(F_x dx+F_y dy+F_z dz) \qquad (13-25)$$

点 M_0 的势能等于零,我们称它为零势能点。在势力场中,势能的大小是相对于零势能点而言的。零势能点 M_0 可以任意选取,对于不同的零势能点,在势力场中同一位置的势能可有不同的数值。

现在计算几种常见的势能。

(1) 重力场中的势能

重力场中，以铅垂轴为 z 轴，z_0 处为零势能点。质点于 z 坐标处的势能 V 等于重力 mg 由 z 到 z_0 处所作的功，即

$$V=\int_{z}^{z_0}-mg\mathrm{d}z=mg(z-z_0) \tag{13-26}$$

(2) 弹性力场中的势能

设弹簧的一端固定，另一端与物体连接，弹簧的刚度系数为 k。以变形量为 δ_0 处为零势能点，则变形量为 δ 处的弹簧势能 V 为

$$V=\frac{k}{2}(\delta^2-\delta_0^2) \tag{13-27}$$

如果取弹簧的自然位置为零势能点，则有 $\delta_0=0$，于是得

$$V=\frac{k}{2}\delta^2 \tag{13-27$'$}$$

(3) **万有引力场中的势能**

设质量为 m_1 的质点受质量为 m_2 的物体的万有引力 $\boldsymbol{F}$ 作用，如图 13－17所示。

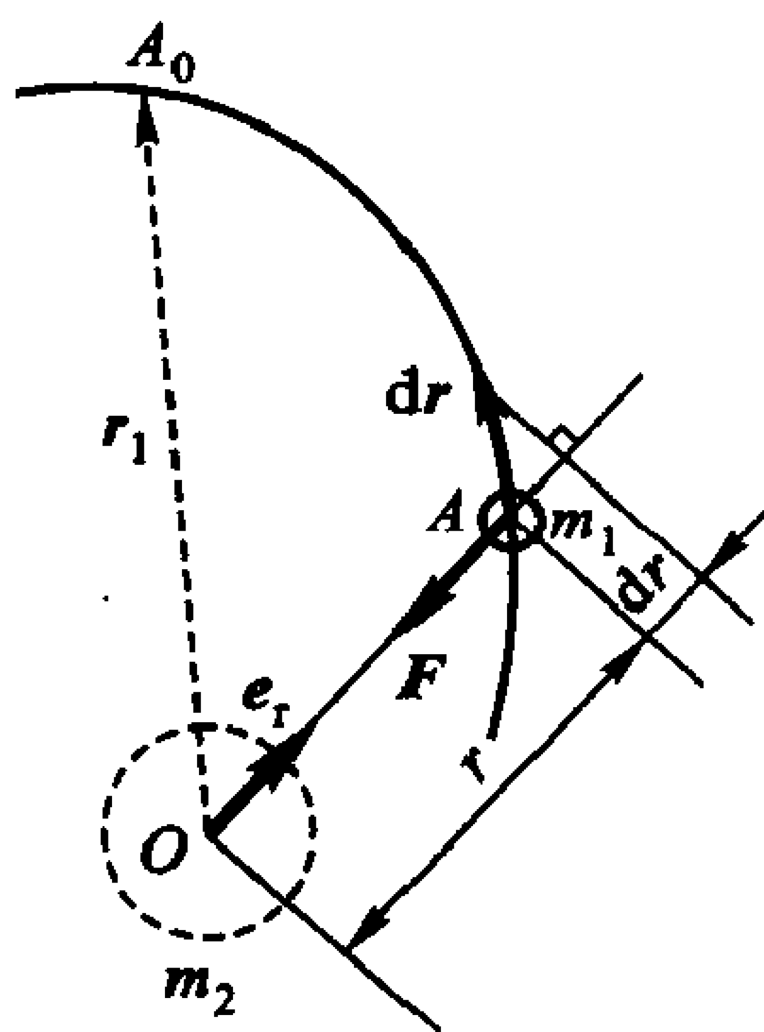


图 13－17

取点 A_0 为零势能点，则质点在点 A 的势能为

$$V=\int_{A}^{A_0}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{A}^{A_0}-\frac{fm_1m_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

式中 f 为引力常数，$\boldsymbol{e}_r$ 是质点的矢径方向的单位矢量；由图可见，$\boldsymbol{e}_r\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}r$，为矢径 $\boldsymbol{r}$ 长度的增量。设 $\boldsymbol{r}_1$ 是零势能点的矢径，于是有

$$V=\int_{r}^{r_1}-\frac{fm_1m_2}{r^2}\mathrm{d}r=fm_1m_2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right) \tag{13-28}$$

如果选取的零势能点在无穷远处，即 $r_1=\infty$，于是得

$$V=-\frac{fm_1m_2}{r} \tag{13-28$'$}$$

上述计算表明，万有引力作功只决定于质点运动的初始位置 A 和终了位置 A_0，与点的轨迹形状无关，万有引力场确为势力场。

如质点系受到多个有势力的作用，各有势力可有各自的零势能点。质点系的“零势能位置”是各质点都处于其零势能点的一组位置。质点系从某位置到其“零势能位置”的运动过程中，各有势力作功的代数和称为此质点系在该位置的势能。

例如质点系在重力场中，取各质点的 z 坐标为 $z_{10},z_{20},\cdots,z_{n0}$ 时为零势能位置；则质点系各质点 z 坐标为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 时的势能为

$$V=\sum m_ig(z_i-z_{i0})$$

与质点系重力做功式(13-7)相似,质点系重力势能可写为

$$V = mg(z_C - z_{C0}) \tag{13-29}$$

其中 m 为质点系全部质量,z_C 为质心的 z 坐标,z_{C0} 为零势能位置质心的 z 坐标。

又如一质量为 m、长为 l 的均质杆 AB,A 端铰支,B 端由无重弹簧拉住,并于水平位置平衡,如图 13-18 所示。此时弹簧已有拉长量 δ_0。如弹簧刚度系数为 k,由平衡方程 $\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0$,有

$$k\delta_0 l = mg\,\frac{l}{2},\text{或}\ \delta_0 = \frac{mg}{2k}$$

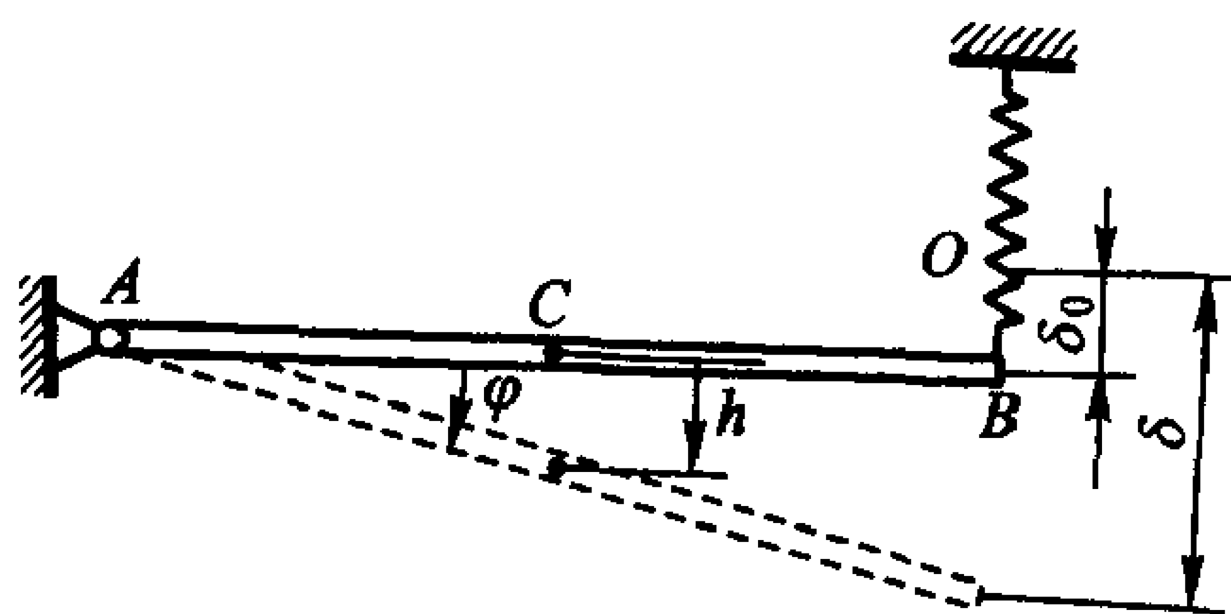


图 13-18

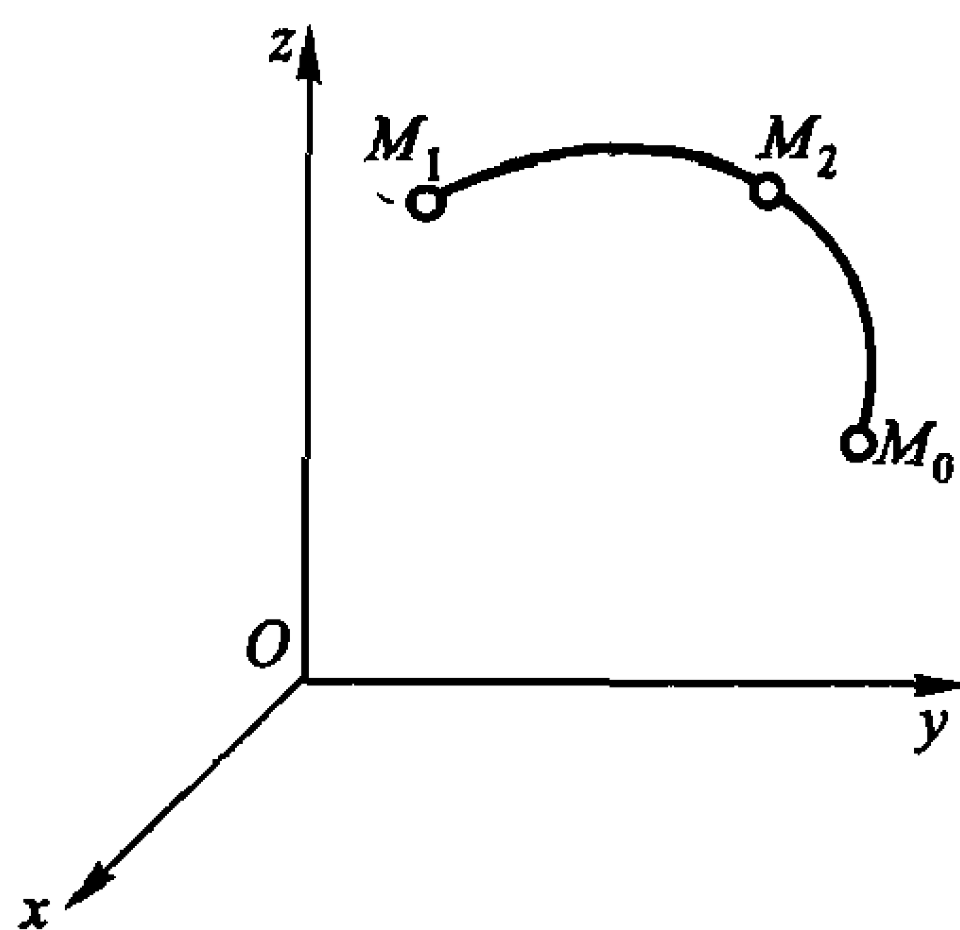


图 13-19

此系统所受重力及弹性力都是有势力。如重力以杆的水平位置处为零势能位置,弹簧以自然位置 O 为零势能点,则杆于微小摆角 φ 处,重力势能为 $-mg\varphi l/2$,弹簧势能为 $\frac{k}{2}(\delta_0 + \varphi l)^2$。由 $\delta_0 = \frac{mg}{2k}$,总势能为

$$V' = \frac{1}{2}k(\delta_0 + \varphi l)^2 - mg\,\frac{\varphi l}{2} = \frac{1}{2}k\varphi^2 l^2 + \frac{m^2 g^2}{8k}$$

如取杆的平衡位置为系统的零势能位置,杆于微小摆角 φ 处,系统相对于零势能位置的势能应改为

$$V = \frac{1}{2}k(\delta^2 - \delta_0^2) - mgh = \frac{1}{2}k(\delta_0^2 + 2\delta_0\varphi l + \varphi^2 l^2 - \delta_0^2) - mg\,\frac{\varphi l}{2}$$

注意到 $\delta_0 = \frac{mg}{2k}$,可得

$$V = \frac{1}{2}k\varphi^2 l^2$$

可见,对于不同的零势能位置,系统的势能是不相同的。对于常见的重力-弹力系统,以其平衡位置为零势能点,往往更简便。

质点系在势力场中运动,有势力的功可通过势能计算。设某个有势力的作用点在质点系的运动过程中,从点 M_1 到点 M_2,如图 13-19 所示,该力所作的

功为 W_{12}。若取 M_0 为零势能点，则从 M_1 到 M_0 和从 M_2 到 M_0 有势力所作的功分别为 M_1 和 M_2 位置的势能 V_1 和 V_2。因有势力的功与轨迹形状无关，而由 M_1 经 M_2 到达 M_0 时，有势力的功为

$$W_{10}=W_{12}+W_{20}$$

注意到 $W_{10}=V_1$，$W_{20}=V_2$
于是得

$$W_{12}=V_1-V_2 \tag{13-30}$$

即有势力所作的功等于质点系在运动过程的初始与终了位置的势能的差。

3. 机械能守恒定律

质点系在某瞬时的动能与势能的代数和称为**机械能**。设质点系在运动过程的初始和终了瞬时的动能分别为 T_1 和 T_2，所受力在这过程中所作的功为 W_{12}，根据动能定理有

$$T_2-T_1=W_{12}$$

如系统运动中，只有有势力作功，而有势力的功可用势能计算，即

$$T_2-T_1=W_{12}=V_1-V_2$$

移项后得

$$T_1+V_1=T_2+V_2 \tag{13-31}$$

上式就是机械能守恒定律的数学表达式，即质点系仅在有势力的作用下运动时，其机械能保持不变。此类质点系称为**保守系统**。

如果质点系还受到非保守力的作用，称为非保守系统，非保守系统的机械能是不守恒的。设保守力所作的功为 W_{12}，非保守力所作的功为 W'_{12}，由动能定理有

$$T_2-T_1=W_{12}+W'_{12}$$

因 $W_{12}=V_1-V_2$，于是有

$$T_2-T_1=V_1-V_2+W'_{12}$$

或

$$(T_2+V_2)-(T_1+V_1)=W'_{12} \tag{13-32}$$

当质点系受到摩擦阻力等力作用时，W'_{12}是负功，质点系在运动过程中机械能减小，称为机械能耗散；当质点系受到非保守的主动力作用时，如果 W'_{12}是正功，则质点系在运动过程中机械能增加，这时外界对系统输入了能量。

从能量观点来看，无论什么系统，总能量是不变的，机械能的增或减，只说明

了在这过程中机械能与其他形式的能量(如热能、电能等)有了相互的转化而已。

例 13-6　如图 13-20 所示的鼓轮 D 匀速转动,使绕在轮上钢索下端的重物以 $v=0.5\ \text{m/s}$匀速下降,重物质量为 $m=250\ \text{kg}$。设当鼓轮突然被卡住时,钢索的刚度系数 $k=3.35\times10^6\ \text{N/m}$。求此后钢索的最大张力。

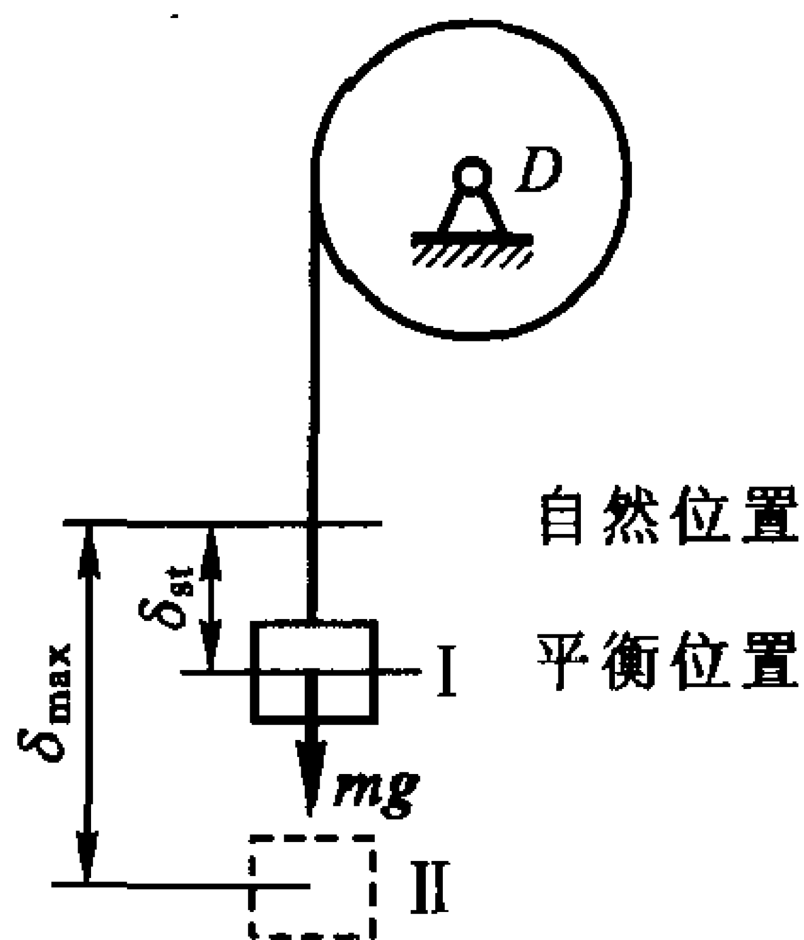


图 13-20

解:　鼓轮匀速转动时,重物处于平衡状态,临卡住的前一瞬时钢索的伸长量 $\delta_{st}=\dfrac{mg}{k}$,钢索的张力 $F=k\delta_{st}=mg=2.45\ \text{kN}$。

当鼓轮被卡住后,由于惯性,重物将继续下降,钢索继续伸长,钢索的弹性力逐渐增大,重物的速度逐渐减小。当速度等于零时,弹性力达到最大值。

因重物只受重力和弹性力的作用,因此系统的机械能守恒。取重物平衡位置Ⅰ为重力和弹性力的零势能点,在Ⅱ位置处张力最大。则在Ⅰ,Ⅱ两位置系统的势能分别为

$$V_1=0$$

$$V_2=\frac{k}{2}(\delta_{max}^2-\delta_{st}^2)-mg(\delta_{max}-\delta_{st})$$

因 $T_1=\dfrac{1}{2}mv^2$,$T_2=0$,由机械能守恒有

$$\frac{1}{2}mv^2+0=0+\frac{k}{2}(\delta_{max}^2-\delta_{st}^2)-mg(\delta_{max}-\delta_{st})$$

注意到 $k\delta_{st}=mg$,上式可改写为

$$\delta_{max}^2-2\delta_{st}\delta_{max}+(\delta_{st}^2-\frac{v^2}{g}\delta_{st})=0$$

解得

$$\delta_{max}=\delta_{st}\left(1\pm\sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{st}}}\right)$$

因 δ_{max}应大于 δ_{st},因此上式应取正号。

钢索的最大张力为

$$F_{max}=k\delta_{max}=k\delta_{st}\left(1+\sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{st}}}\right)=mg\left(1+\frac{v}{g}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

代入数据,求得

$$F_{max}=2.45\ \text{kN}\left(1+\frac{0.5\ \text{m/s}}{9.8\ \text{m/s}^2}\sqrt{\frac{3.35\times10^6\ \text{N/m}}{250\ \text{kg}}}\right)=16.9\ \text{kN}$$

由此可见,当鼓轮被突然卡住后,钢索的张力增大了 5.9 倍。

请读者考虑,是否可取平衡位置为重力场的零势能点,而取弹簧自然位置为弹性力场的零势能点,计算结果是否相同?

例 13-7 如图 13-21 所示，摆的质量为 m，点 C 为其质心，O 端为光滑铰支，在点 D 处用弹簧悬挂，可在铅直平面内摆动。设摆对水平轴 O 的转动惯量为 J_O，弹簧的刚度系数为 k；摆杆在水平位置处平衡。设 $OD=CD=b$。求摆从水平位置处以初角速度 ω_0 向下作微幅摆动时，摆的角速度与 φ 角的关系。

解： 研究摆的运动。作用于摆的力有弹簧力 $\boldsymbol{F}$、重力 $m\boldsymbol{g}$ 和支座约束力 $\boldsymbol{F}_{Ox}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Oy}$。前两力为保守力，后两力不作功，因此摆的机械能守恒。

取水平位置为摆的零势能位置，此时机械能等于动能 $\frac{1}{2}J_O\omega_0^2$。摆作微幅摆动，φ 角极小。与图 13-18 问题分析相似，系统对平衡位置的势能为 $\frac{1}{2}k(b\varphi)^2$，而动能为 $\frac{1}{2}J_O\omega^2$。由机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}J_O\omega^2+\frac{k}{2}(b\varphi)^2=\frac{1}{2}J_O\omega_0^2$$

解此方程得摆杆的角速度为

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-kb^2\varphi^2/J_O}$$

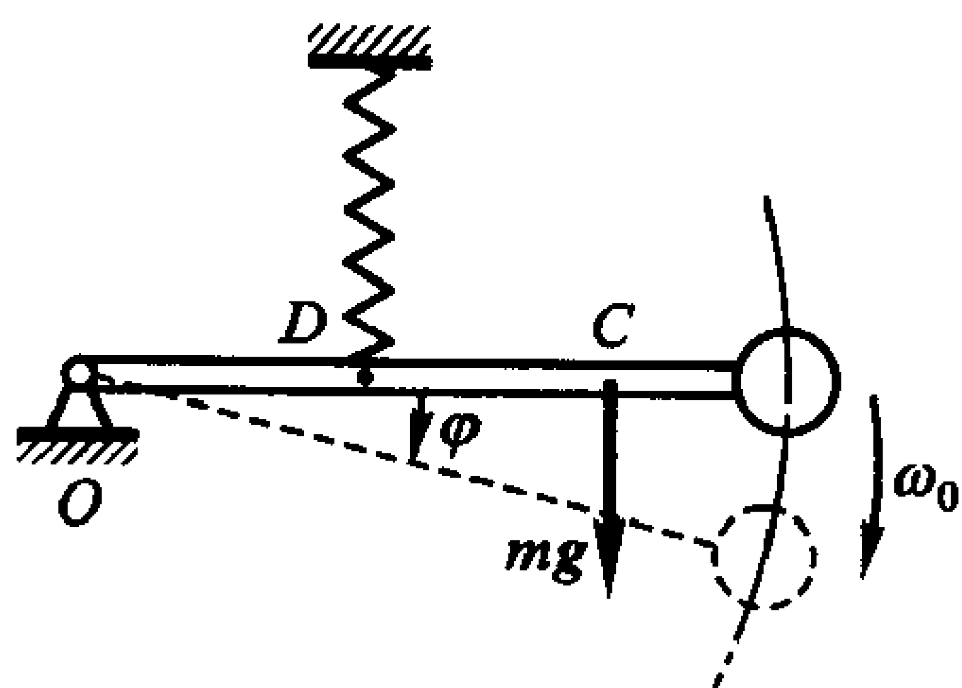


图 13-21

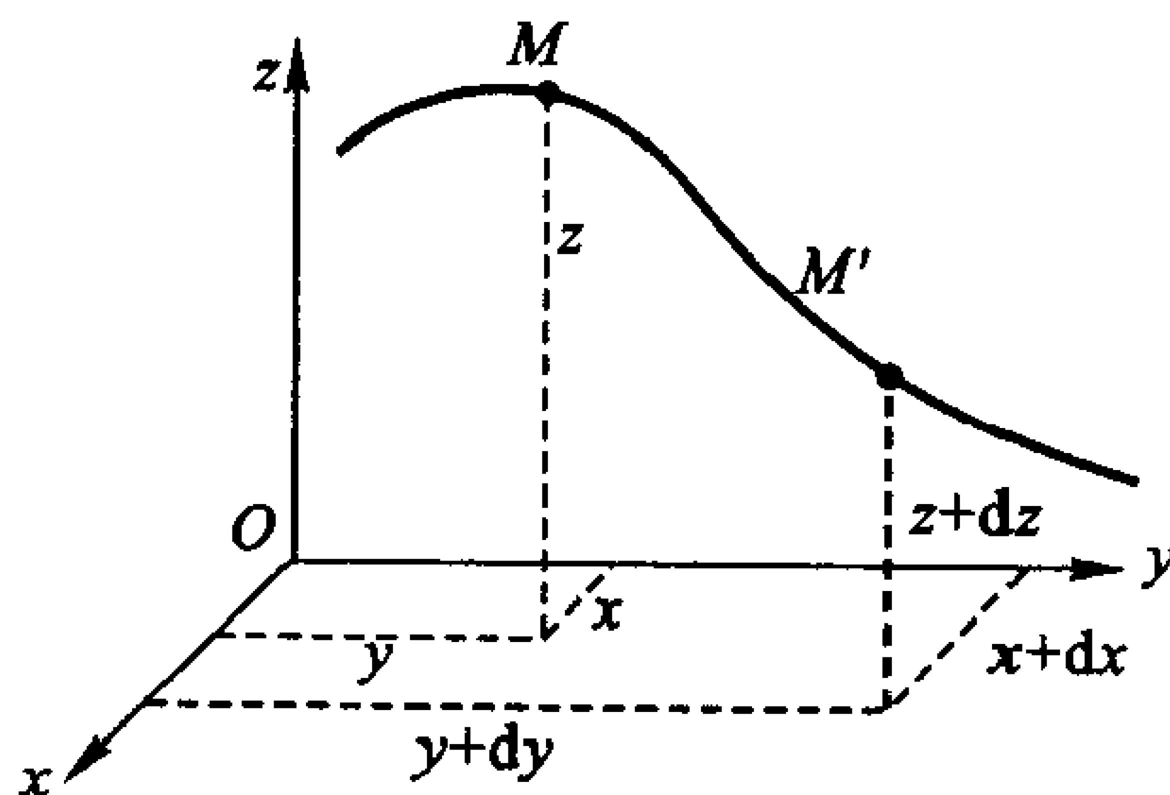


图 13-22

由以上各例可见，应用机械能守恒定律解题的步骤如下：

(1) 选取某质点或质点系为研究对象，分析研究对象所受的力，所有作功的力都应为有势力；

(2) 确定运动过程的始、末位置；

(3) 确定零势能位置，分别计算两位置的动能和势能；

(4) 应用机械能守恒定律求解未知量。

***4. 势力场的其他性质**

(1) 有势力在直角坐标轴上的投影等于势能对于该坐标的偏导数冠以负号。

在势力场中不同的位置，势能的数值不同，因此势能是坐标的函数。

设有势力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点从点 M 移到邻近点 M'，如图 13-22 所示，这两点的势能分别为 $V(x,y,z)$ 和 $V(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z)$，有势力的元功可用势能的差计算，即

$$\delta W = V(x,y,z) - V(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z) = -\mathrm{d}V \qquad (13-33)$$

由高等数学知，势能 V 的全微分可写为

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z$$

于是

$$\delta W = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x - \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y - \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z$$

设有势力 $\boldsymbol{F}$ 在直角坐标轴上的投影为 F_x、F_y、F_z，则力的元功为

$$\delta W = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$$

比较以上两式，得

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (13-34)$$

由势能的函数表达式，应用上式可求得作用于物体的有势力。

如果系统有多个有势力，总势能为 V，则对于作用点坐标为 x_i, y_i, z_i 的有势力 $\boldsymbol{F}_i$，其相应的投影为

$$F_{x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad F_{y_i} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad F_{z_i} = -\frac{\partial V}{\partial z_i} \qquad (13-35)$$

(2) 在势力场中，势能相等的各点构成**等势能面**。

例如在重力场中，同一水平面上各点的势能都相等，因此重力场中等势能面为水平的平面。

弹性力场的等势能面是以弹簧的固定端为中心的球面。

地球引力场的等势能面是以地心为中心的球面。

势力场中任何一点的势能只有一个数值，此点只通过一个等势能面，即等势能面不相交。

势能等于零的等势能面称为零势能面。

(3) 有势力的方向垂直于等势能面，指向势能减小的方向。

设质点 M 在等势面上运动，各点势能都相等，则此有势力 $\boldsymbol{F}$ 在等势面上任意小位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 上所作的元功也就等于零，即

$$\delta W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 沿等势面切线，则 $\boldsymbol{F}$ 垂直于 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，即有势力 $\boldsymbol{F}$ 垂直于等势面。

设质点在有势力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿力的方向实现位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，由等势面 V_1 移到 V_2，如图 13-23 所示，则力 $\boldsymbol{F}$ 作正功，即

$$\delta W > 0$$

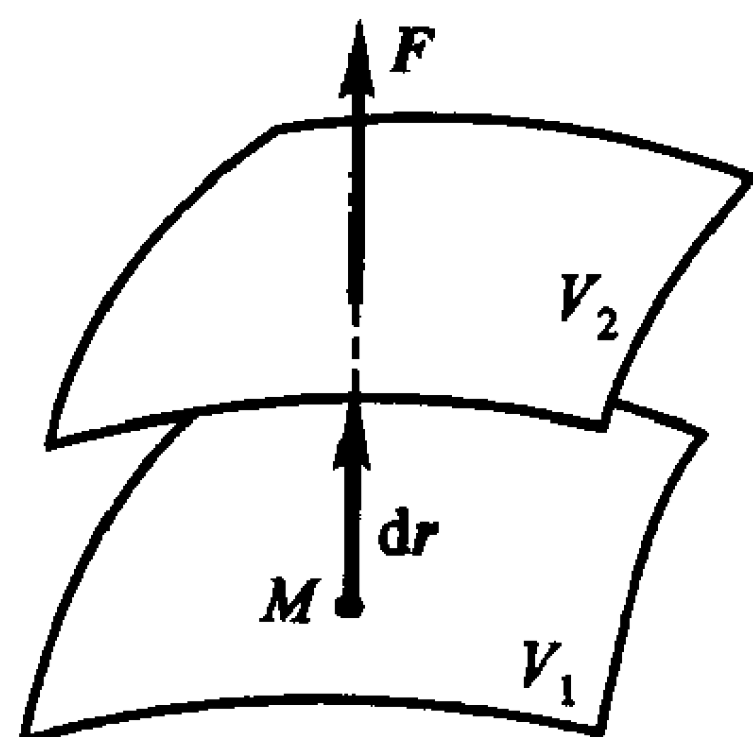


图 13-23

由于

$$\delta W = V_1 - V_2$$

因此有

$$V_1 > V_2$$

可见，有势力 $\boldsymbol{F}$ 指向势能减小的方向。

§13－6　普遍定理的综合应用举例

质点和质点系的普遍定理包括动量定理、动量矩定理和动能定理。这些定理可分为两类：动量定理和动量矩定理属于一类，动能定理属于另一类。前者是矢量形式，后者是标量形式；两者都用于研究机械运动，而后者还可用于研究机械运动与其他运动形式有能量转化的问题。

质心运动定理与动量定理一样，也是矢量形式，常用来分析质点系受力与质心运动的关系；它与相对于质心的动量矩定理联合，共同描述了质点系机械运动的总体情况；特别是联合用于刚体，可建立起刚体运动的基本方程，如平面运动微分方程。应用动量定理或动量矩定理时，质点系的内力不能改变系统的动量和动量矩，只需考虑质点系所受的外力。

动能定理是标量形式，在很多实际问题中约束力又不作功，因而应用动能定理分析系统的速度变化是比较方便的。功率方程可视为动能定理的另一种微分形式，便于计算系统的加速度。但应注意，在有些情况下质点系的内力作功并不等于零，应用时要具体分析质点系内力作功问题。

基本定理提供了解决动力学问题的一般方法，而在求解比较复杂的问题时，往往需要根据各定理的特点，联合运用。

例 13－8　建立例 12－12 中圆轮质心的运动微分方程。

解：　在例 12－12 中，应用刚体的平面运动微分方程建立了圆轮质心的运动微分方程。现在运用功率方程建立该方程。

均质圆轮作平面运动，如图 13－24 所示，动能为

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 = \frac{3}{4} m v_C^2$$

轮与地面接触点为瞬心，接触点的约束力不作功。重力的功率为

$$P = m\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v} = m\boldsymbol{g} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{\tau} \right)$$

$$= m \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\tau} = m \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} (-g \sin \theta) = -mg \sin \theta \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

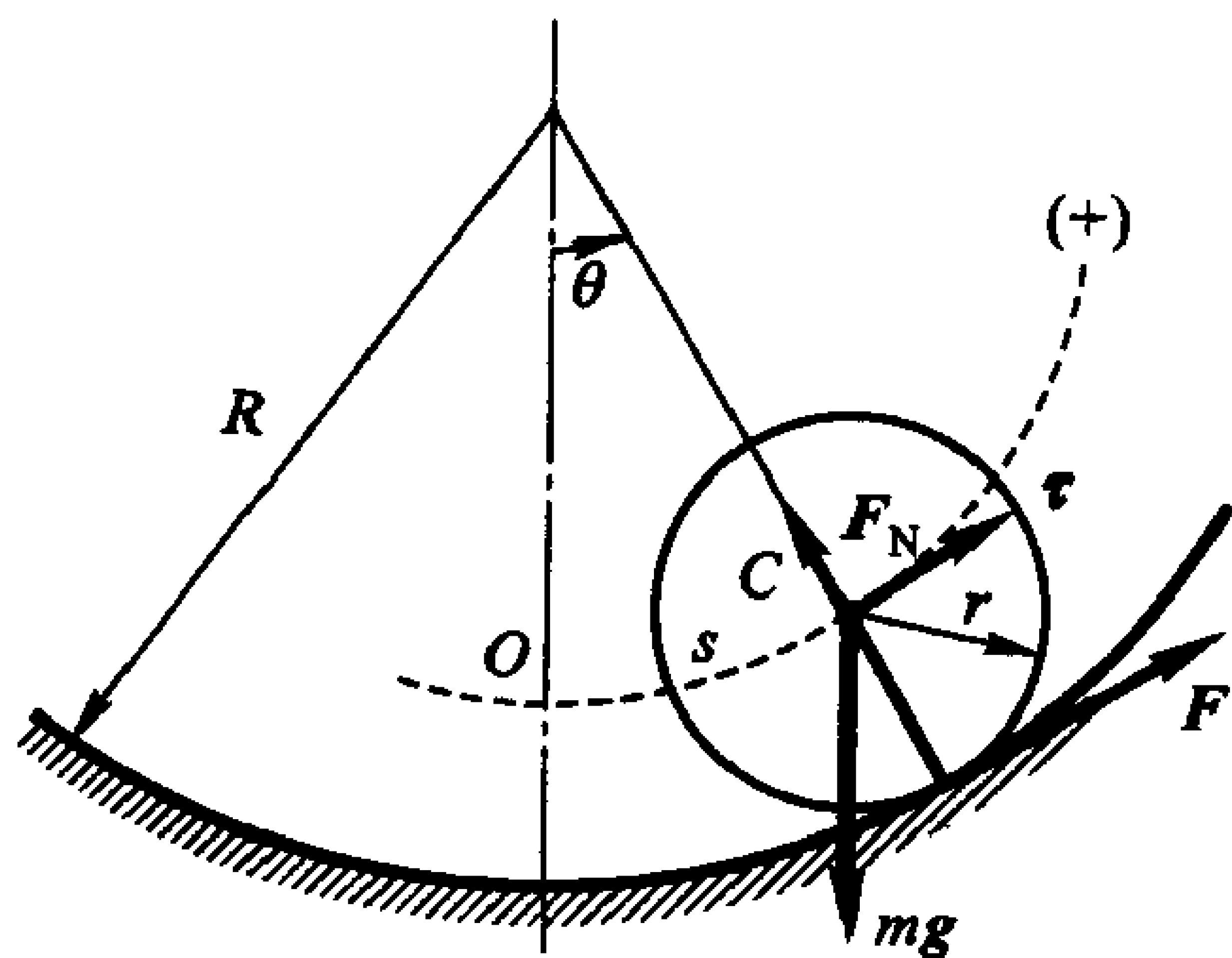


图 13－24

应用功率方程：

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P$$

得

$$\frac{3}{4}m\cdot 2v_C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=-mg\sin\theta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

因$\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$，$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_C$，$\theta=\frac{s}{R-r}$，当 θ 很小时 $\sin\theta\approx\theta$，于是得质心 C 的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2g}{3(R-r)}s=0$$

此系统的机械能守恒，也可通过机械能守恒建立质心的运动微分方程。

取质心的最低位置 O 为重力场零势能点，圆轮在任一位置的势能为

$$V=mg(R-r)(1-\cos\theta)$$

同一瞬时的动能为

$$T=\frac{3}{4}mv_C^2$$

由机械能守恒，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V+T)=0$$

把 V 和 T 的表达式代入，取导数后得

$$mg(R-r)\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{3}{2}mv_C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=0$$

因$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{v_C}{R-r}$，$\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$，于是得

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2}{3}g\sin\theta=0$$

当 θ 很小时，$\sin\theta\approx\theta=\frac{s}{R-r}$，于是得同样的质心运动微分方程。

通过本例题可见，同一个问题可用不同的理论求解，结果是相同的。

例 13-9　图 13-25 所示的系统中，物块及两均质轮的质量皆为 m，轮半径皆为 R。滚轮上缘绕一刚度为 k 的无重水平弹簧，轮与地面间无滑动。现于弹簧的原长处自由释放重物，试求重物下降 h 时的速度、加速度以及滚轮与地面间的摩擦力。

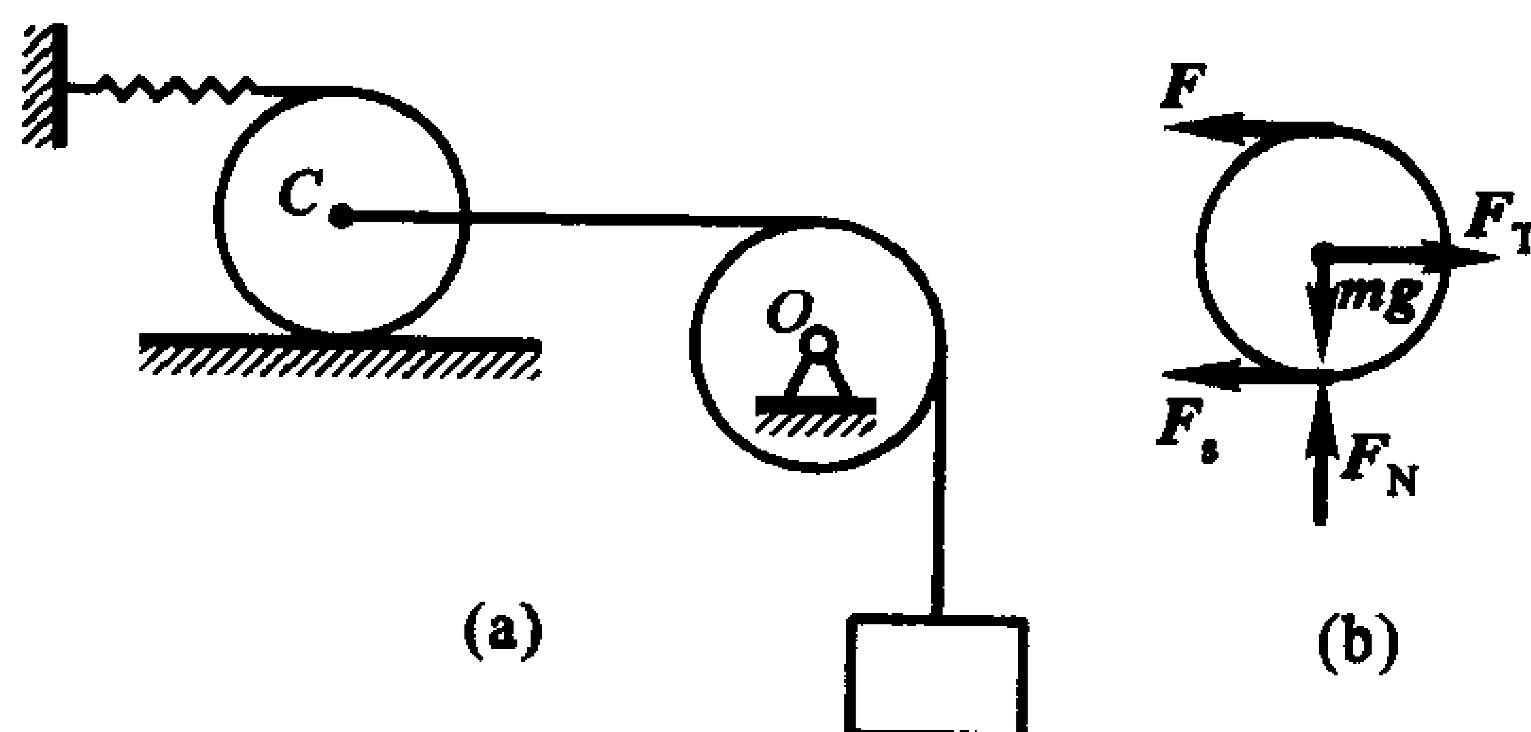


图 13-25

解：　为求重物下降 h 时的速度和加速度，可用动能定理。系统初始动能为零，当物块有速度 v 时，两轮的角速度皆为 $\omega=v/R$，系统动能为

$$T=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega^2+\frac{1}{2}\left(mv^2+\frac{1}{2}mR^2\omega^2\right)=\frac{3}{2}mv^2$$

重物下降 h 时弹簧拉长 $2h$，重力和弹簧力做功和为

$$W=mgh-\frac{1}{2}k(2h)^2=mgh-2kh^2$$

由动能定理

$$\frac{3}{2}mv^2-0=mgh-2kh^2 \tag{a}$$

求得重物的速度

$$v=\sqrt{\frac{2(mg-2kh)h}{3m}}$$

为求重物加速度，可用动能定理的微分形式(13－18)或功率方程(13－22)。上面式(a)已给出速度 v 与下降距离 h 之间的函数关系，式(a)两端对时间求一次导数，得

$$3mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(mg-4kh)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

从而求得重物加速度

$$a=\frac{g}{3}-\frac{4kh}{3m}$$

为求地面摩擦力，可取滚轮为研究对象，如图 13－25(b)所示，其中弹簧力 $F=2kh$。应用对质心 C 的动量矩定理，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{v}{R}\right)=(F_s-F)R \tag{b}$$

求得地面摩擦力

$$F_s=F+\frac{1}{2}ma \tag{c}$$

代入 F 及 a 的值，得地面摩擦力

$$F_s=\frac{mg}{6}+\frac{4}{3}kh$$

由此例可见，为求系统运动时的作用力，需先计算加速度，为此可用动能定理的微分形式。而求作用力时，应用动量定理或动量矩定理。当然，对此问题，也可以分别对两轮以及重物各列出其相应的微分方程，再联立求解力与加速度。

例 13－10　均质细杆长为 l、质量为 m，静止直立于光滑水平面上。当杆受微小干扰而倒下时，求杆刚刚达到地面时的角速度和地面约束力。

解：　由于地面光滑，直杆沿水平方向不受力，倒下过程中质心将铅直下落。设杆左滑于任一角度 θ，如图 13－26a 所示，P 为杆的瞬心。由运动学知，杆的角速度

$$\omega=\frac{v_C}{CP}=\frac{2v_C}{l\cos\theta}$$

此时杆的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2=\frac{1}{2}m\left(1+\frac{1}{3\cos^2\theta}\right)v_C^2$$

初始动能为零，此过程中只有重力作功，由动能定理

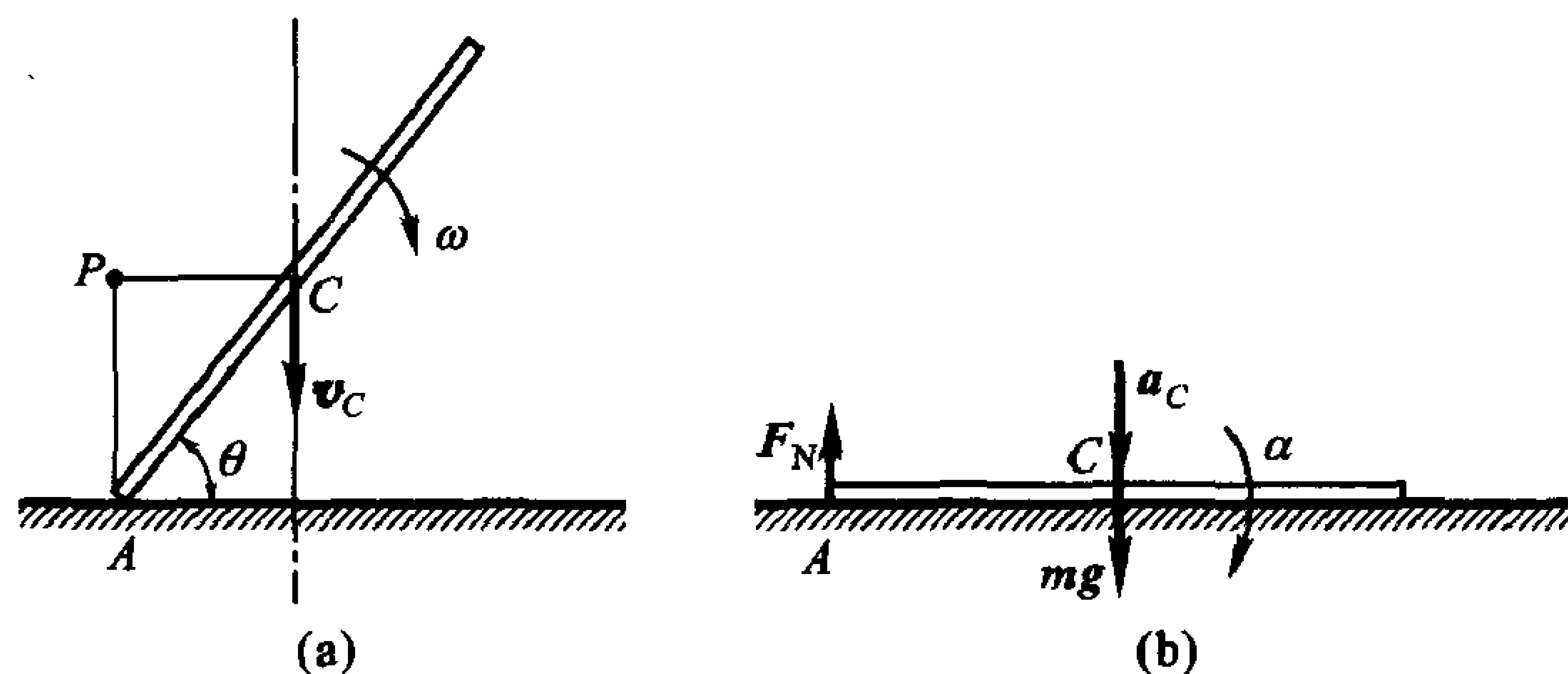


图 13-26

$$\frac{1}{2}m\left(1+\frac{1}{3\cos^2\theta}\right)v_C^2 = mg\frac{l}{2}(1-\sin\theta)$$

当 $\theta=0$ 时解出

$$v_C=\frac{1}{2}\sqrt{3gl},\quad \omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

杆刚达到地面时，受力及加速度如图 13-26b 所示，由刚体平面运动微分方程，得

$$mg-F_N=ma_C \tag{a}$$

$$F_N\frac{l}{2}=J_C\alpha=\frac{ml^2}{12}\alpha \tag{b}$$

点 A 的加速度 $\boldsymbol{a}_A$ 为水平，由质心守恒，$\boldsymbol{a}_C$ 应为铅垂，由运动学知

$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{CA}^n+\boldsymbol{a}_{CA}^t$$

沿铅垂方向投影，得

$$a_C=a_{CA}^t=\alpha\frac{l}{2} \tag{c}$$

式(a)、(b)及(c)联立，解出

$$F_N=\frac{mg}{4}$$

由此例可见，求解动力学问题，常要按运动学知识分析速度、加速度之间的关系；有时还要先判明是否属于动量或动量矩守恒情况。如果是守恒的，则要利用守恒条件给出的结果，才能进一步求解。

小　　结

1. 动能是物体机械运动的一种度量。

质点的动能 $T=\frac{1}{2}mv^2$

质点系的动能 $T=\sum\frac{1}{2}m_iv_i^2$

平移刚体的动能 $T=\frac{1}{2}mv_C^2$

绕定轴转动刚体的动能 $T=\frac{1}{2}J_z\omega^2$

平面运动刚体的动能 $T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2$

2．力的功是力对物体作用的积累效应的度量。

$$W=\int_s F\cos\theta\cdot ds$$

$$W_{12}=\int_{M_1}^{M_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{M_1}^{M_2}(F_x dx+F_y dy+F_z dz)$$

重力的功 $W_{12}=mg(z_1-z_2)$

弹性力的功 $W_{12}=\frac{k}{2}(\delta_1^2-\delta_2^2)$

定轴转动刚体上力的功 $W_{12}=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}M_z d\varphi$

平面运动刚体上力系的功

$$W_{12}=\int_{C_1}^{C_2}\boldsymbol{F}_R'\cdot d\boldsymbol{r}_C+\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}M_C d\varphi$$

3．动能定理

微分形式 $dT=\sum\delta W$

积分形式 $T_2-T_1=\sum W_{12}$

理想约束条件下，只计算主动力的功，内力有时作功之和不为零。

4．功率是力在单位时间内所作的功

$$P=\frac{\delta W}{dt}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=F_t v,\quad P=M_z\omega(\text{力矩的功率})$$

5．功率方程 $\frac{dT}{dt}=P_{\text{输入}}-P_{\text{有用}}-P_{\text{无用}}$

6．机械效率

$$\eta=\frac{\text{有效功率}}{\text{输入功率}}$$

$$\text{有效功率}=P_{\text{有用}}+\frac{dT}{dt}=P_{\text{输入}}-P_{\text{无用}}$$

7．有势力的功只与物体运动的起点和终点的位置有关，而与物体内各点轨迹的形状无关。

8．物体在势力场中某位置的势能等于有势力从该位置到一任选的零势能位置所作的功。

重力场中的势能 $V=mg(z-z_0)$

弹性力场中的势能 $V=\frac{k}{2}(\delta^2-\delta_0^2)$

若以自然位置为零势能点，则　$V=\frac{k}{2}\delta^2$

万有引力场中的势能　$V=fm_1m_2\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)$

若以无限远处为零势能点，则　$V=-fm_1m_2\frac{1}{r}$

9．有势力的功可通过势能的差来计算

$$W_{12}=V_1-V_2$$

10．机械能＝动能＋势能＝$T+V$

机械能守恒定律：如质点或质点系只在有势力作用下运动，则机械能保持不变，即

$$T+V=常值$$

思　考　题

13－1　摩擦力可能做正功吗？举例说明。

13－2　三个质量相同的质点，同时由点 A 以大小相同的初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 抛出，但其方向各不相同，如图 13－27 所示。如不计空气阻力，这三个质点落到水平面 $H-H$ 时，三者的速度大小是否相等？三者重力的功是否相等？三者重力的冲量是否相等？

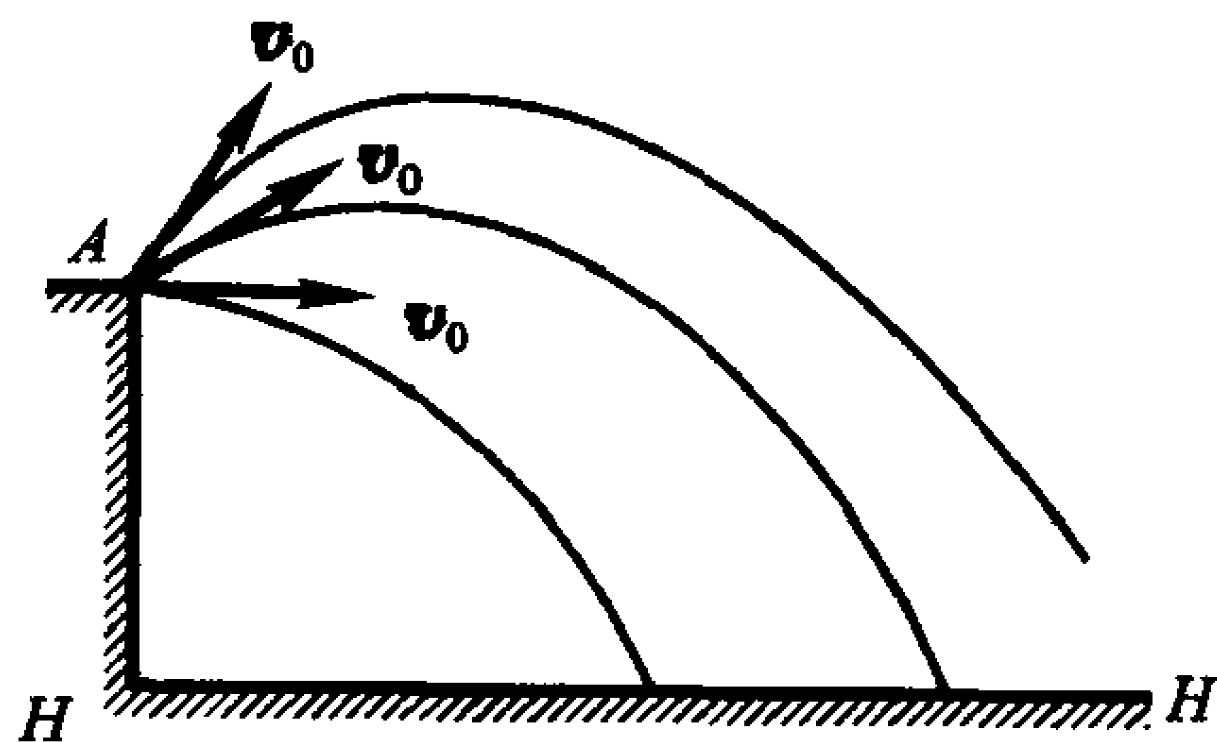


图 13－27

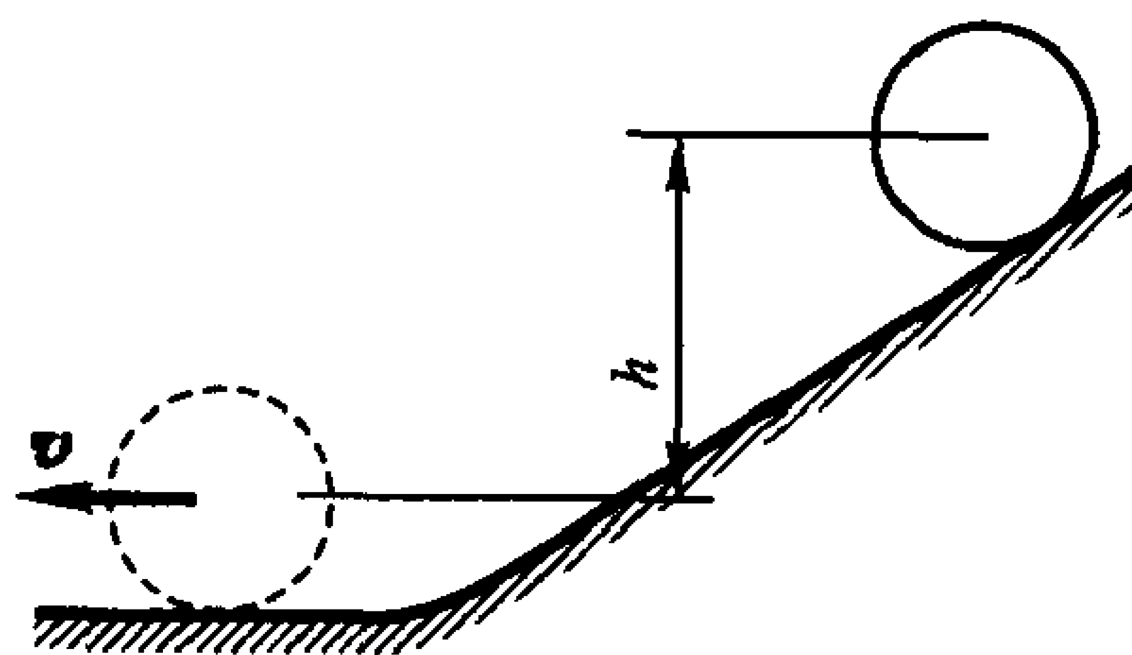


图 13－28

13－3　均质圆轮无初速地沿斜面纯滚动，轮心降落同样高度而到达水平面，如图 13－28所示。忽略滚动摩阻和空气阻力，问到达水平面时，轮心的速度 v 与圆轮半径大小是否有关？当轮半径趋于零时，与质点滑下结果是否一致？轮半径趋于零，还能只滚不滑吗？

13－4　小球连一不可伸缩的细绳，绳绕于半径为 R 的圆柱上，如图13－29所示。如小球在水平光滑面上运动，初始速度 $\boldsymbol{v}_0$ 垂直于细绳。问小球在以后的运动中动能不变吗？对圆柱中心轴 z 的动量矩守恒吗？小球的速度总是与细绳垂直吗？

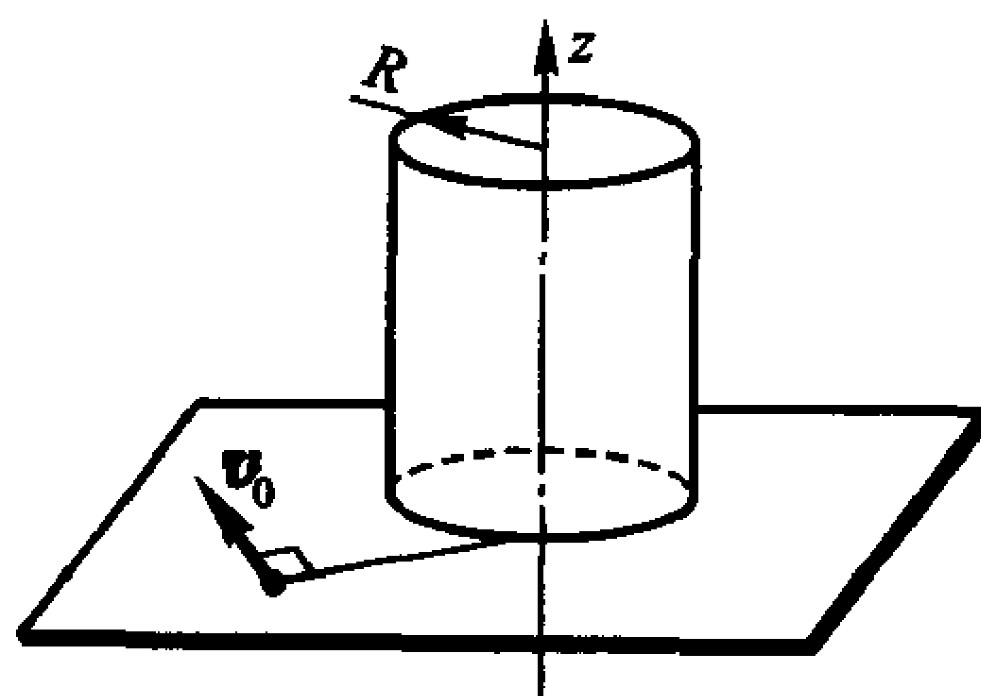


图 13－29

13－5　运动员起跑时，什么力使运动员的质心加速运动？什么力使运动员的动能增加？产生加速度的力一定作功吗？

13-6 甲乙两人重量相同，沿绕过无重滑轮的细绳，由静止起同时向上爬升，如图 13-30。如甲比乙更努力上爬，问：

(1) 谁先到达上端？

(2) 谁的动能大？

(3) 谁做的功多？

(4) 如何对甲、乙两人分别应用动能定理？

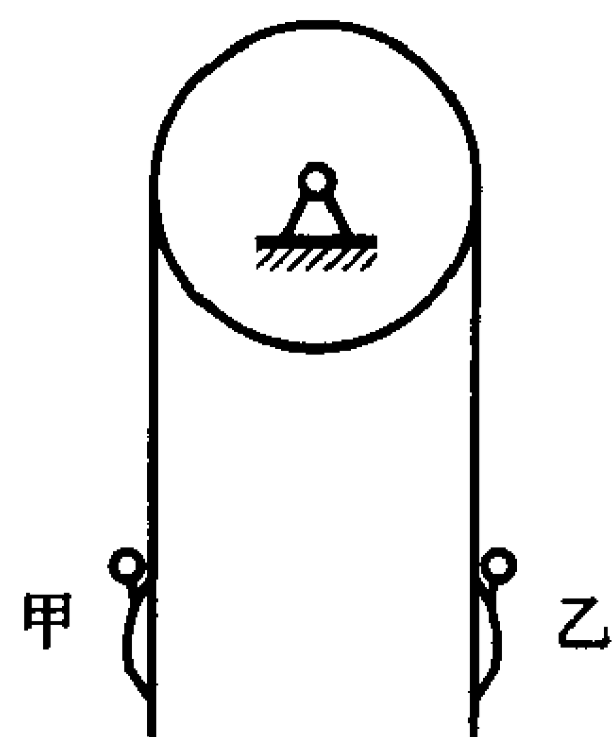


图 13-30

13-7 试总结质心在质点系动力学中有什么特殊的意义。

13-8 质量为 m 的质点，其矢径的变化规律为

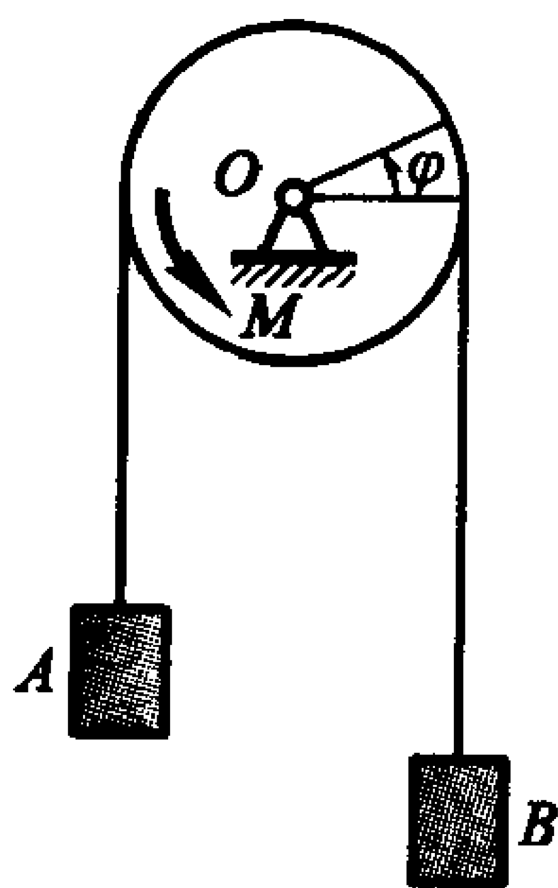
$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为沿固定直角坐标轴的单位矢量，x,y,z 为时间的已知函数。试给出动能、动量、对坐标原点 O 的动量矩、质点承受的力以及该力的功率的表达式。

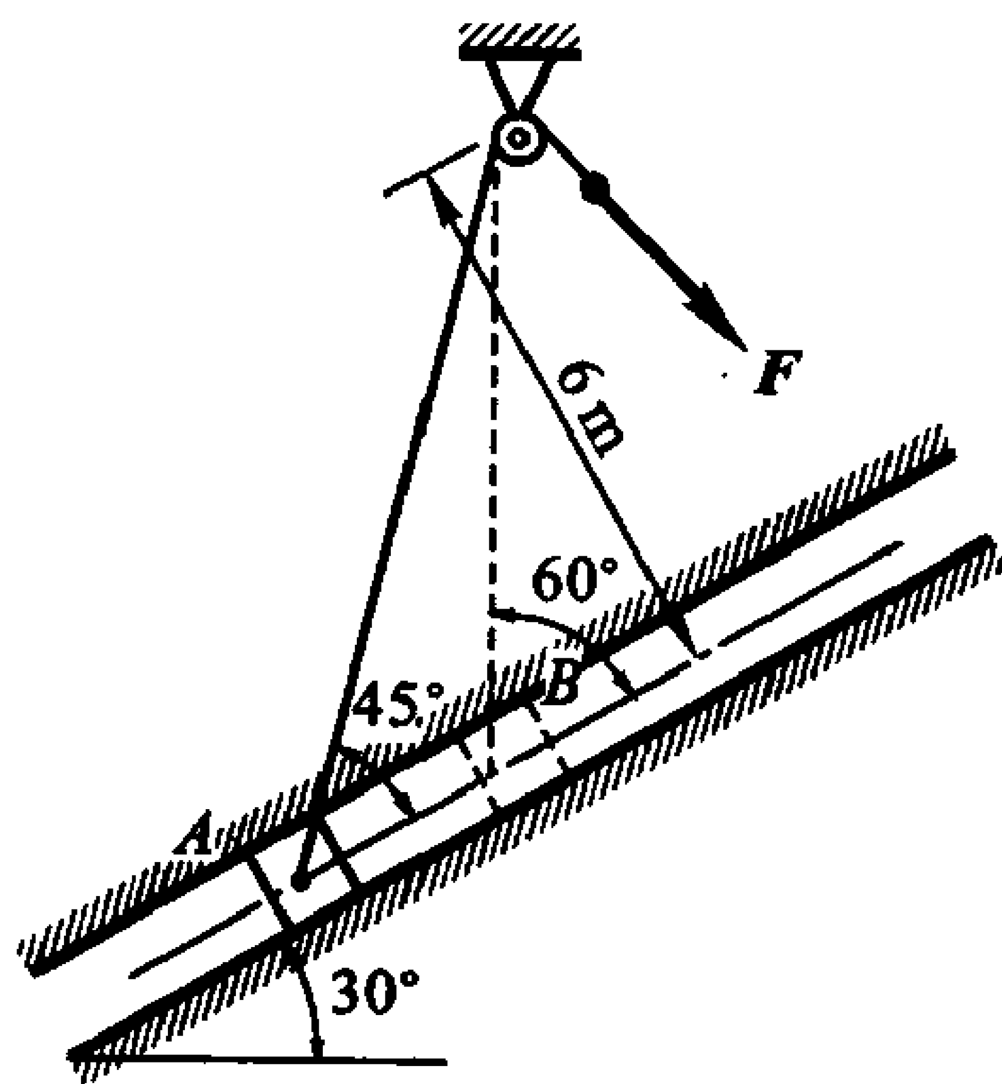
13-9 两个均质圆盘，质量相同，半径不同，静止平放于光滑水平面上。如在此二盘上同时作用有相同的力偶，在下述情况下比较二圆盘的动量、动量矩和动能的大小。(1) 经过同样的时间间隔；(2) 转过同样的角度。

习 题

13-1 圆盘的半径 $r=0.5$ m，可绕水平轴 O 转动。在绕过圆盘的绳上吊有两物块 A，B，质量分别为 $m_A=3$ kg，$m_B=2$ kg。绳与盘之间无相对滑动。在圆盘上作用一力偶，力偶矩按 $M=4\varphi$ 的规律变化（M 以 N·m 计，φ 以 rad 计）。求由 $\varphi=0$ 到 $\varphi=2\pi$ 时，力偶 M 与物块 A，B 的重力所作的功之总和。



题 13-1 图

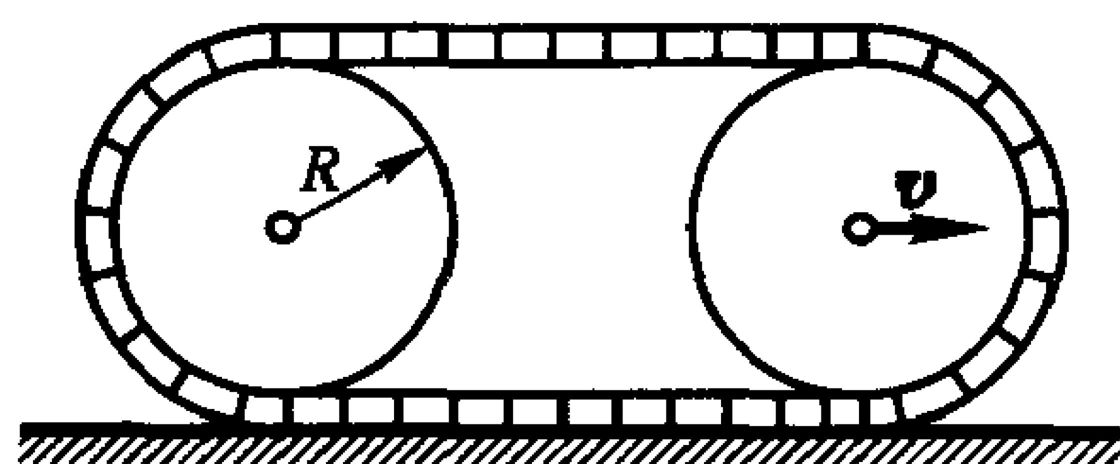


题 13-2 图

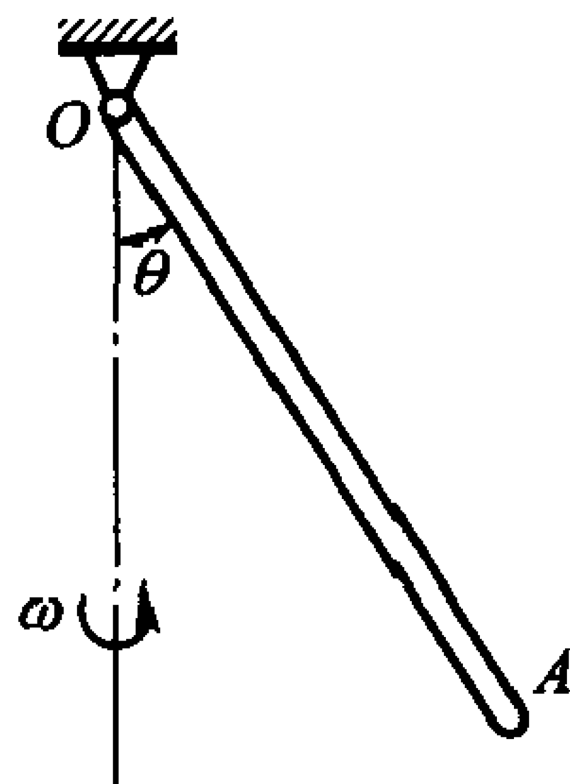
13-2 用跨过滑轮的绳子牵引质量为 2 kg 的滑块 A 沿倾角为 30°的光滑斜槽运动。设绳子拉力 $F=20$ N。计算滑块由位置 A 至位置 B 时，重力与拉力 $\boldsymbol{F}$ 所作的总功。

13-3 图示坦克的履带质量为 m，两个车轮的质量均为 m_1。车轮可视为均质圆盘，半径为 R，两车轮轴间的距离为 πR。设坦克前进速度为 $\boldsymbol{v}$，计算此质点系的动能。

13-4 长为 l、质量为 m 的均质杆 OA 以球铰链 O 固定，并以等角速度 ω 绕铅直线转动，如图所示。如杆与铅直线的交角为 θ，求杆的动能。

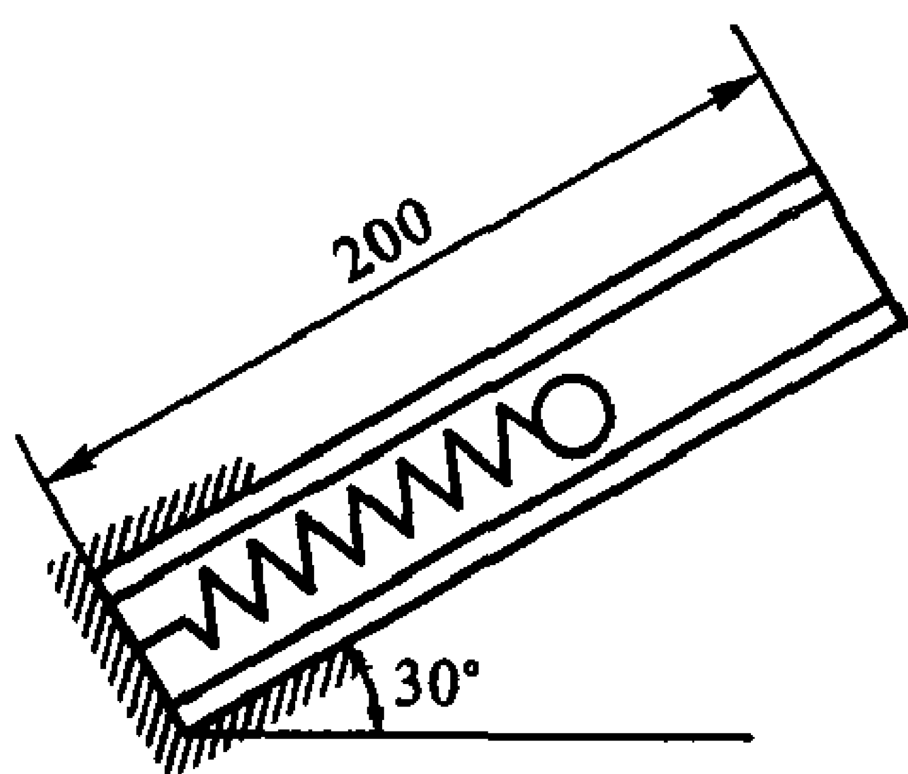


题 13-3 图

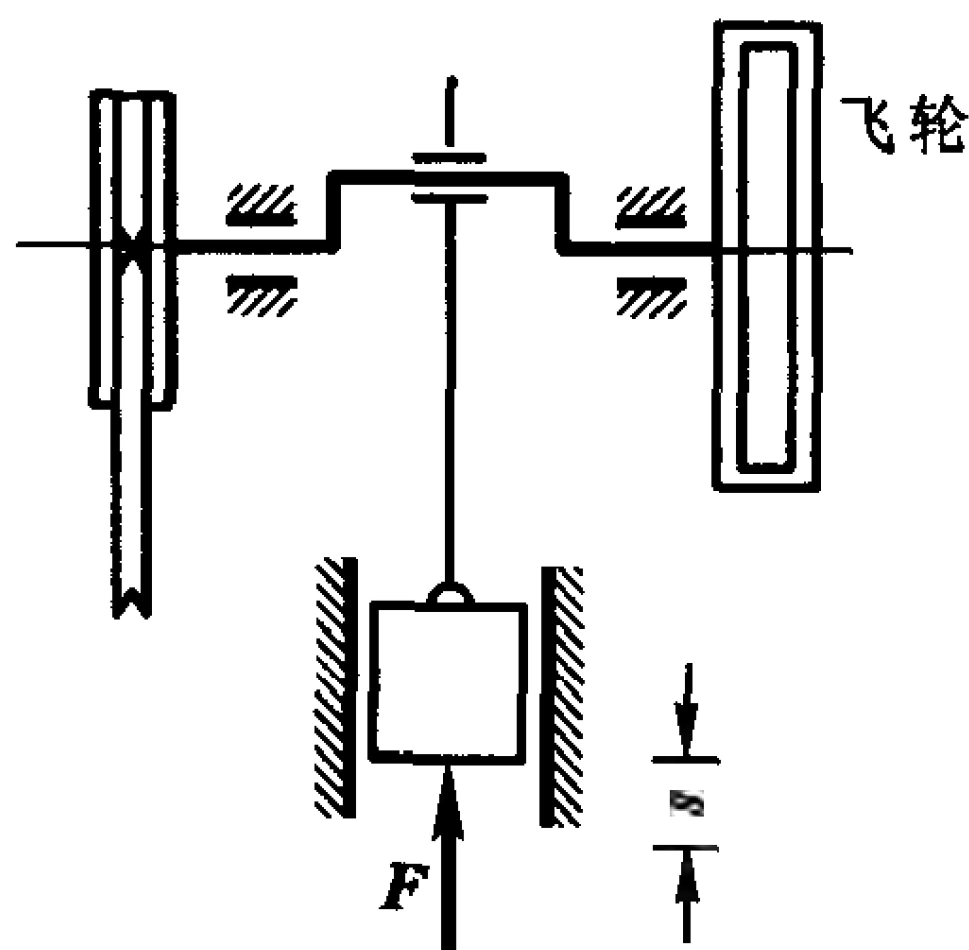


题 13-4 图

13-5　自动弹射器如图放置，弹簧在未受力时的长度为 200 mm，恰好等于筒长。欲使弹簧改变 10 mm，需力 2 N。如弹簧被压缩到 100 mm，然后让质量为 30 g 的小球自弹射器中射出。求小球离开弹射器筒口时的速度。



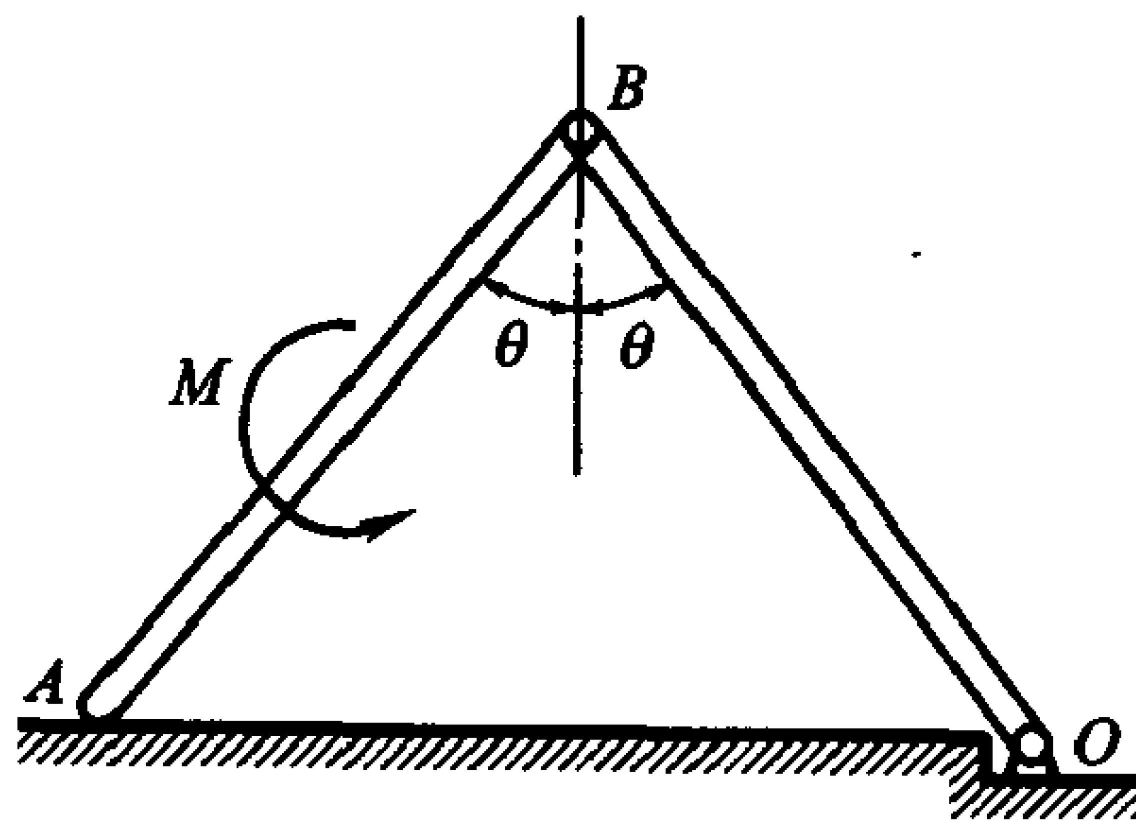
题 13-5 图



题 13-6 图

13-6　图示冲床冲压工件时冲头受的平均工作阻力 $F=52$ kN，工作行程 $s=10$ mm。飞轮的转动惯量 $J=40\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$，转速 $n=415$ r/min。假定冲压工件所需的全部能量都由飞轮供给，计算冲压结束后飞轮的转速。

13-7　平面机构由两匀质杆 AB，BO 组成，两杆的质量均为 m，长度均为 l，在铅垂平面内运动。在杆 AB 上作用一不变的力偶矩 M，从图示位置由静止开始运动，不计摩擦。求当杆端 A 即将碰到铰支座 O 时杆端 A 的速度。

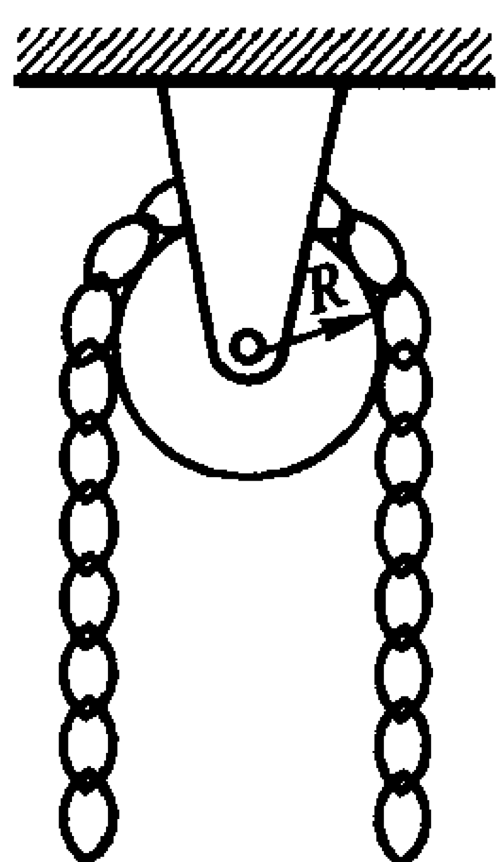


题 13-7 图

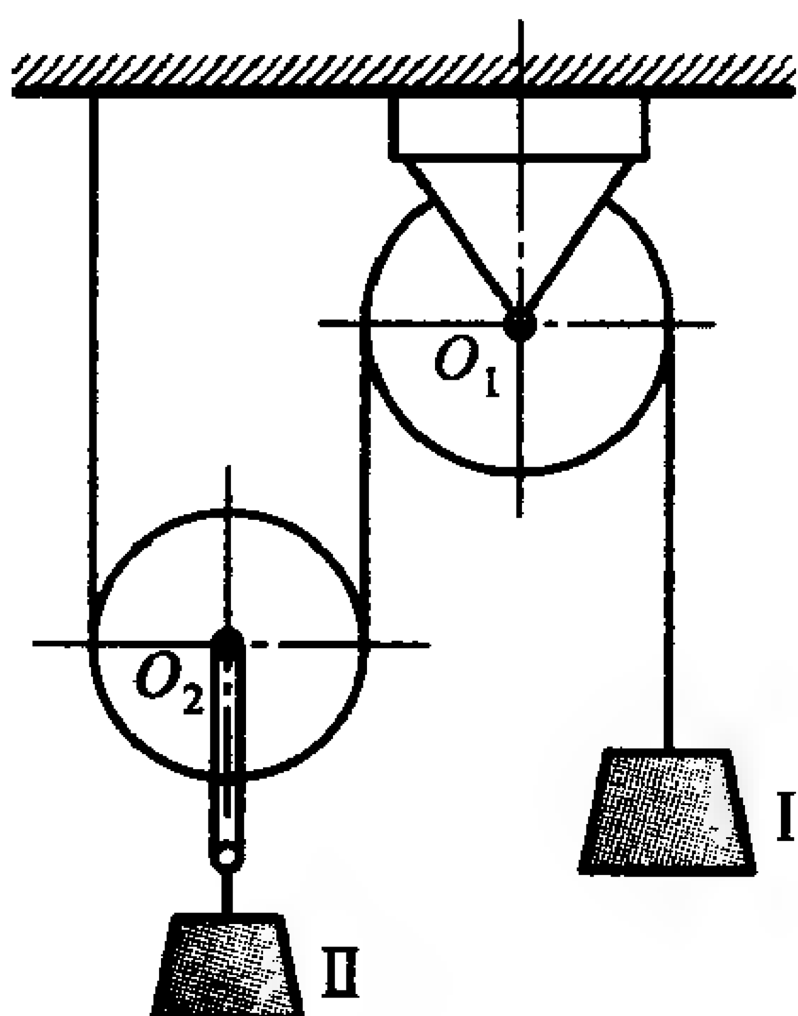
13-8　链条全长 $l=1$ m，单位长的质量为 $\rho=2$ kg/m，悬挂在半径为 $R=0.1$ m，质量 $m=1$ kg 的滑轮上，在图示位置受扰动由静止开始下落。设链条与滑轮无相对滑动，滑轮为均质圆盘，求链子离开滑轮时的速度。

13-9　在图示滑轮组中悬挂两个重物，其中重物Ⅰ的质量为 m_1，重物Ⅱ的质量为 m_2。定滑轮 O_1 的半径为 r_1，质量为 m_3；动滑轮 O_2 的半径为 r_2，质量为 m_4。两轮都视为均质圆盘。如绳

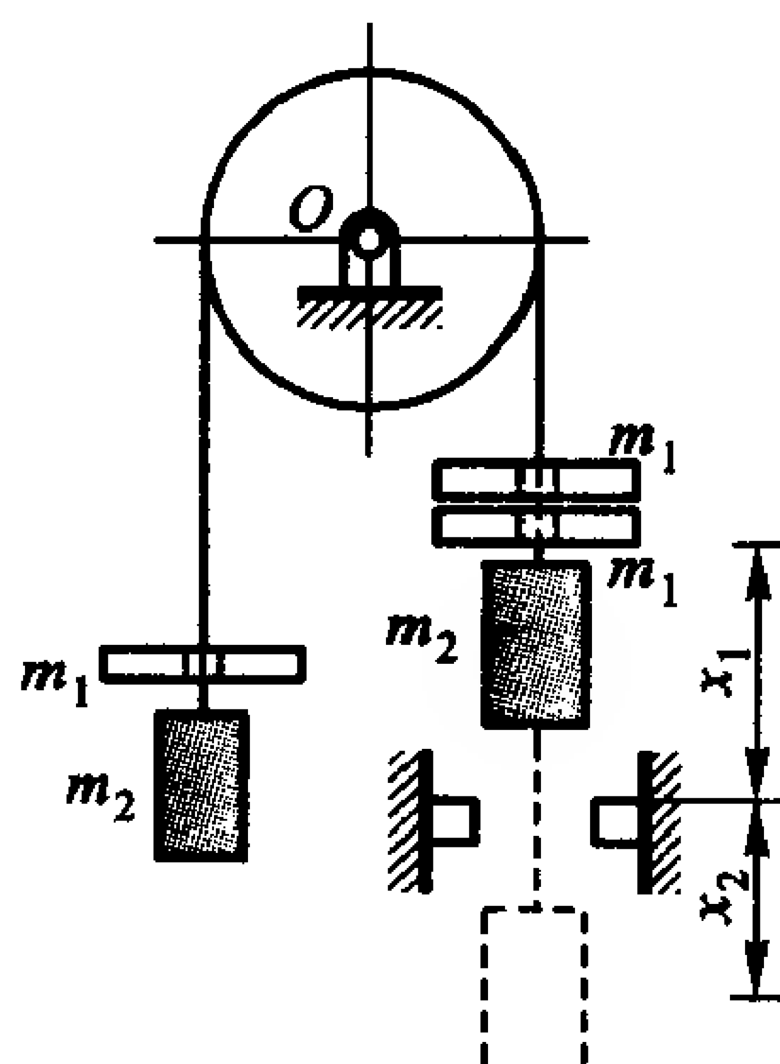
重和摩擦略去不计，并设 $m_2 > 2m_1 - m_4$。求重物Ⅱ由静止下降距离 h 时的速度。



题 13-8 图



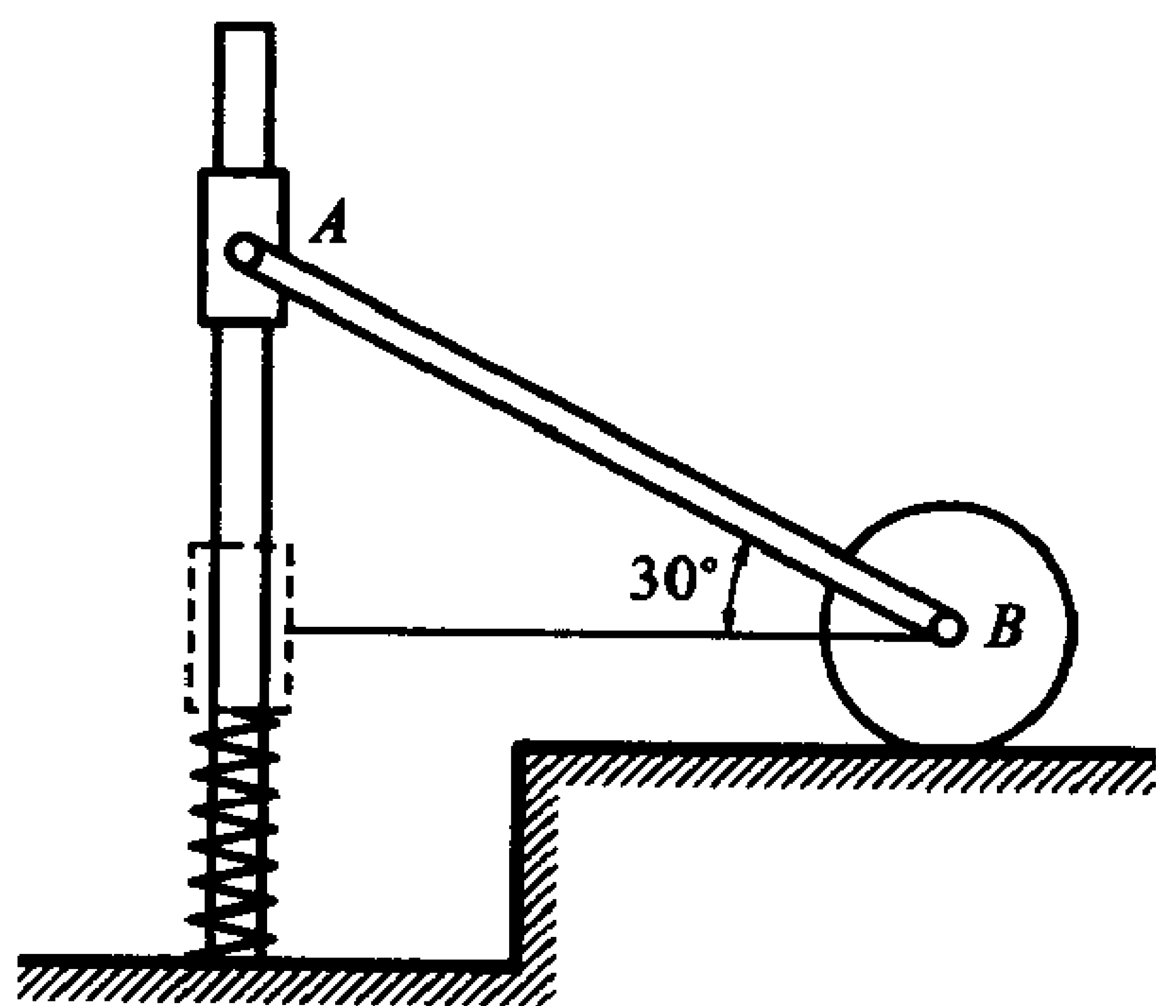
题 13-9 图



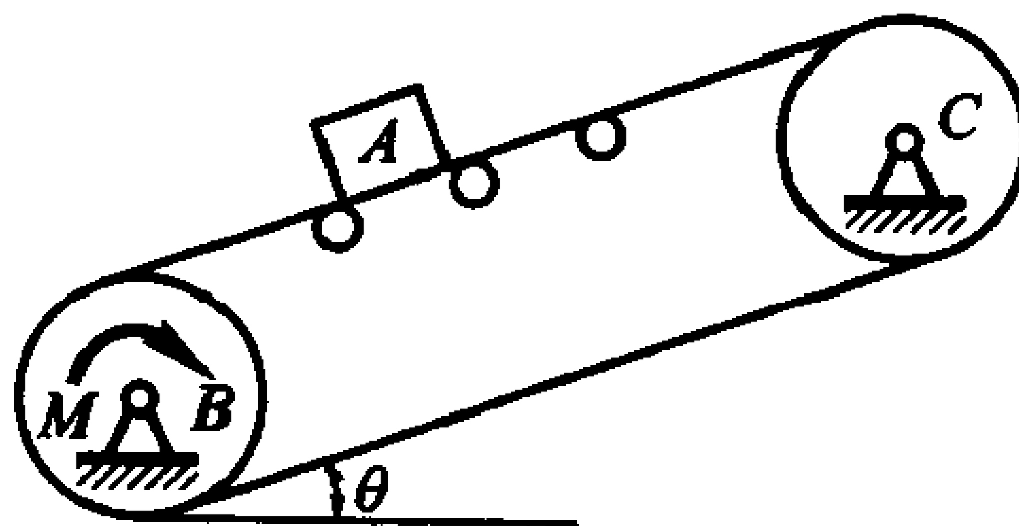
题 13-10 图

13-10 两个质量均为 m_2 的物体用绳连接，此绳跨过滑轮 O，如图所示。在左方物体上放有一带孔的薄圆板，而在右方物体上放有两个相同的圆板，圆板的质量均为 m_1。此质点系由静止开始运动，当右方物体和圆板落下距离 x_1 时，重物通过一固定圆环板，而其上质量为 $2m_1$ 的薄板则被搁住。摩擦和滑轮质量不计。如该重物继续下降了距离 x_2 时速度为零，求 x_2 与 x_1 的比。

13-11 均质连杆 AB 质量为 4 kg，长 $l = 600$ mm。均质圆盘质量为6 kg，半径 $r =$ 100 mm。弹簧刚度为 $k = 2$ N/mm，不计套筒 A 及弹簧的质量。如连杆在图示位置被无初速释放后，A 端沿光滑杆滑下，圆盘做纯滚动。求：(1) 当 AB 达水平位置而接触弹簧时，圆盘与连杆的角速度；(2) 弹簧的最大压缩量 δ。



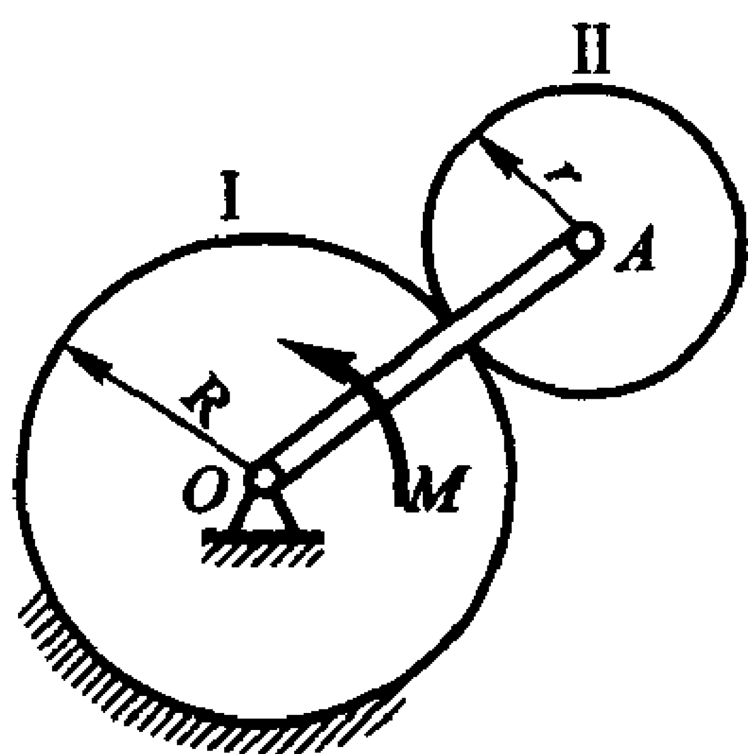
题 13-11 图



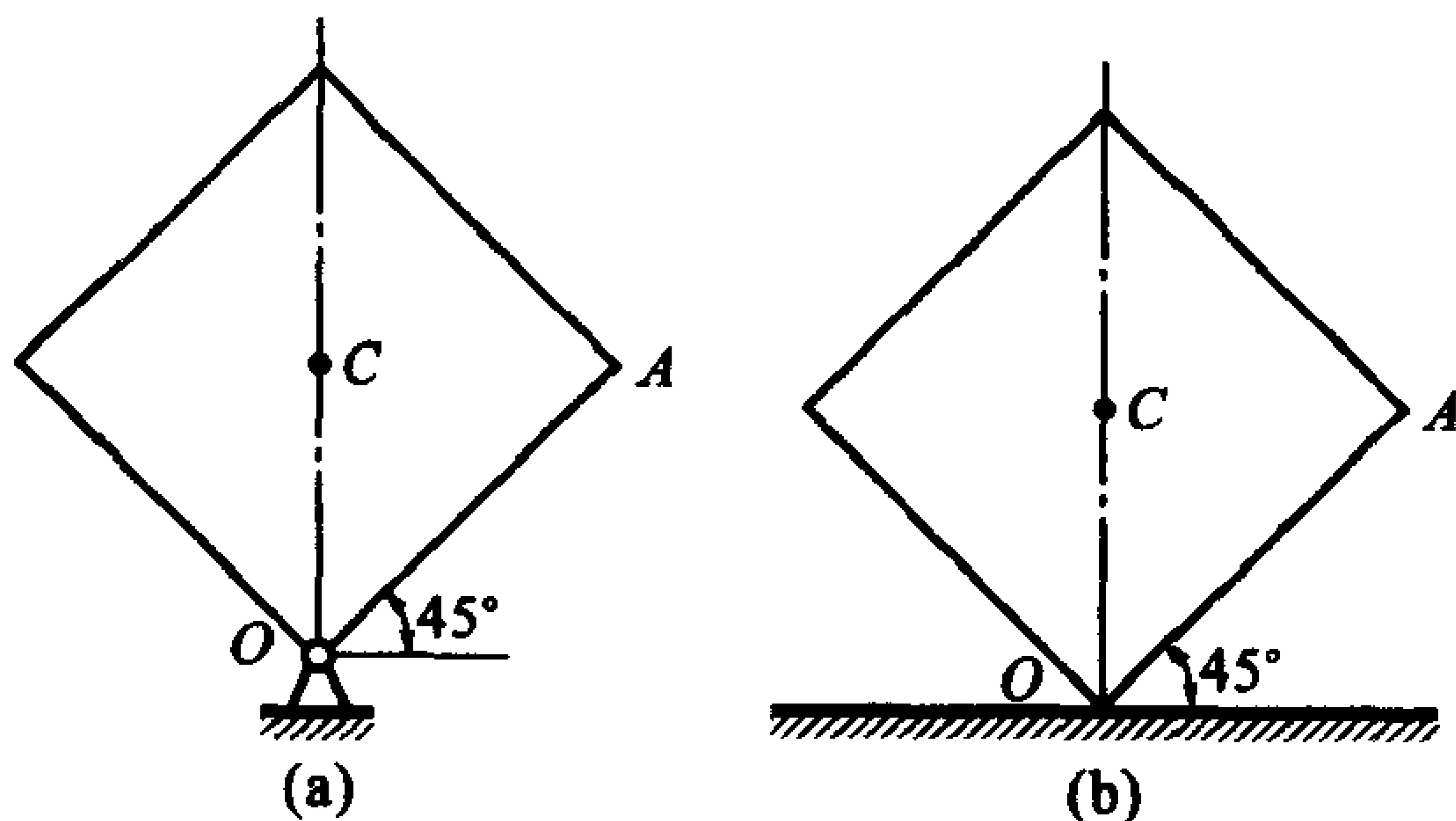
题 13-12 图

13-12 图示带式运输机的轮 B 受恒力偶 M 的作用，使胶带运输机由静止开始运动。若被提升物体 A 的质量为 m_1，轮 B 和轮 C 的半径均为 r，质量均为 m_2，并视为均质圆柱。运输机胶带与水平线成交角 θ，它的质量忽略不计，胶带与轮之间没有相对滑动。求物体 A 移动距离 s 时的速度和加速度。

13－13　周转齿轮传动机构放在水平面内，如图所示。已知动齿轮半径为 r，质量为 m_1，可看成为均质圆盘；曲柄 OA，质量为 m_2，可看成为均质杆；定齿轮半径为 R。在曲柄上作用一不变的力偶，其矩为 M，使此机构由静止开始运动。求曲柄转过 φ 角后的角速度和角加速度。



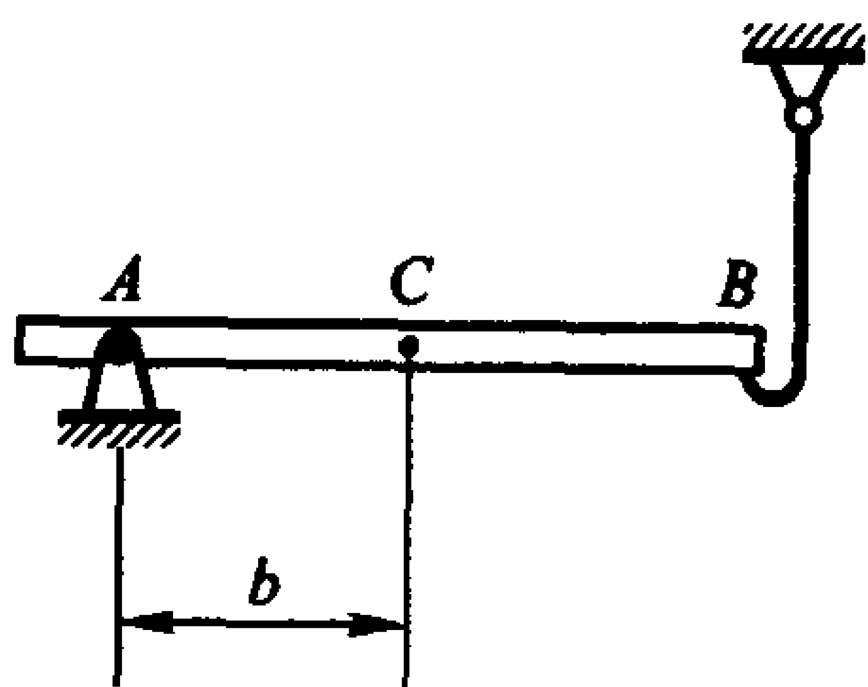
题 13－13 图



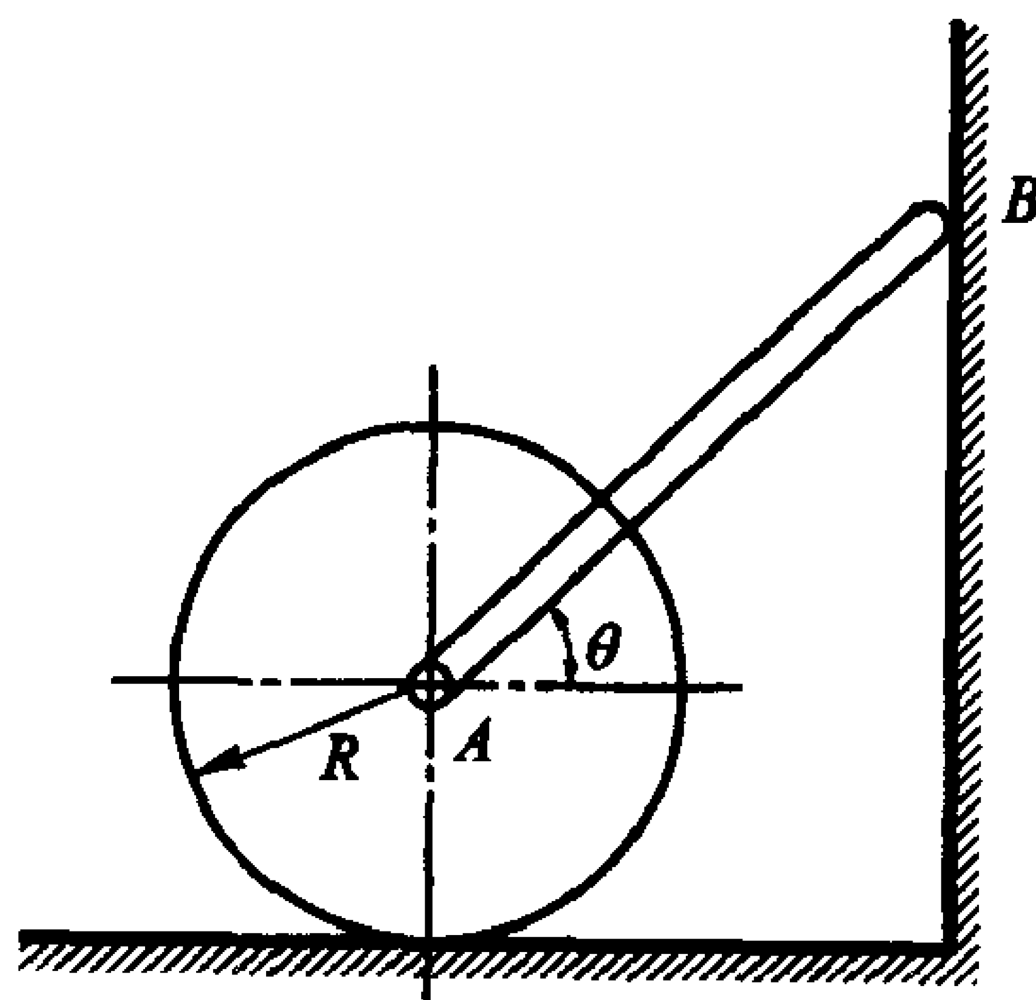
题 13－14 图

13－14　图 a，b 所示为在铅垂面内两种支持情况的均质正方形板，边长均为 a，质量均为 m，初始时均处于静止状态。受某干扰后均沿顺时针方向倒下，不计摩擦，求当 OA 边处于水平位置时，两方板的角速度。

13－15　水平均质细杆质量为 m，长为 l，C 为杆的质心。杆 A 处为光滑铰支座，B 端为一挂钩，如图所示。如 B 端突然脱落，杆转到铅垂位置时。问 b 值多大能使杆有最大角速度？



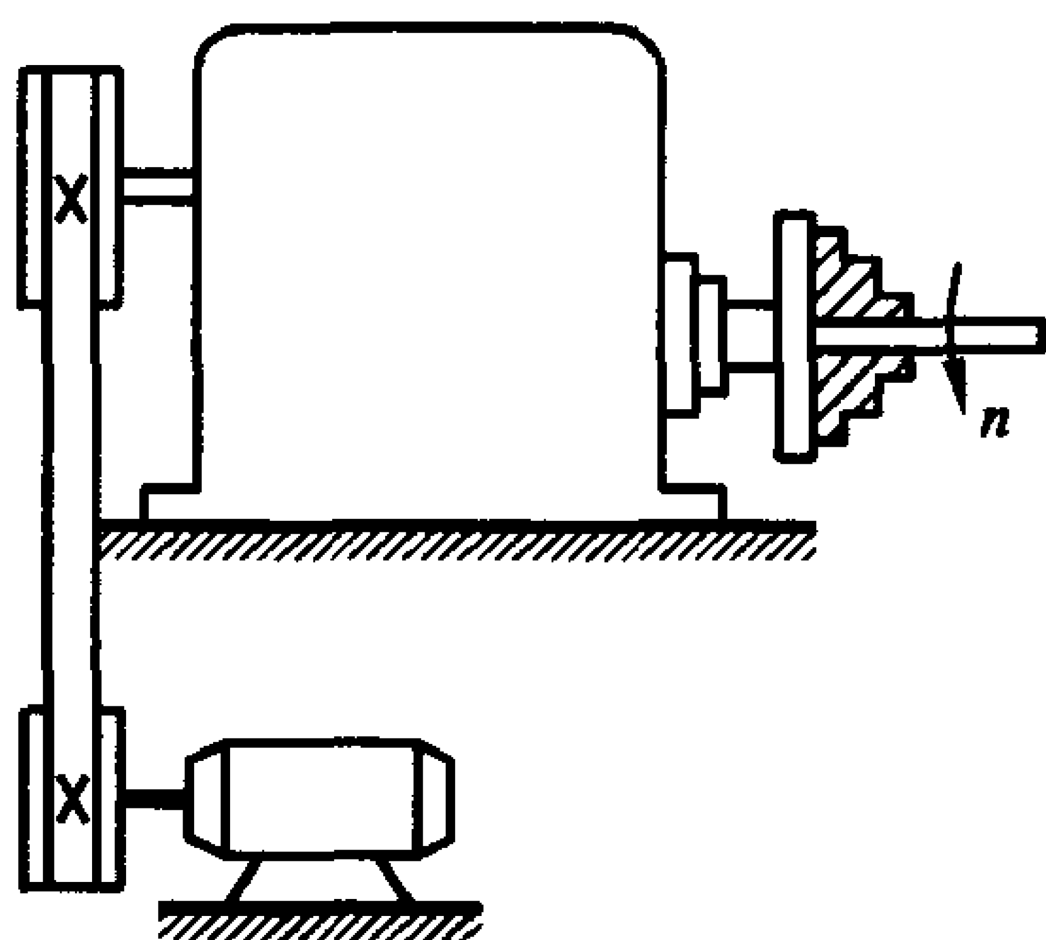
题 13－15 图



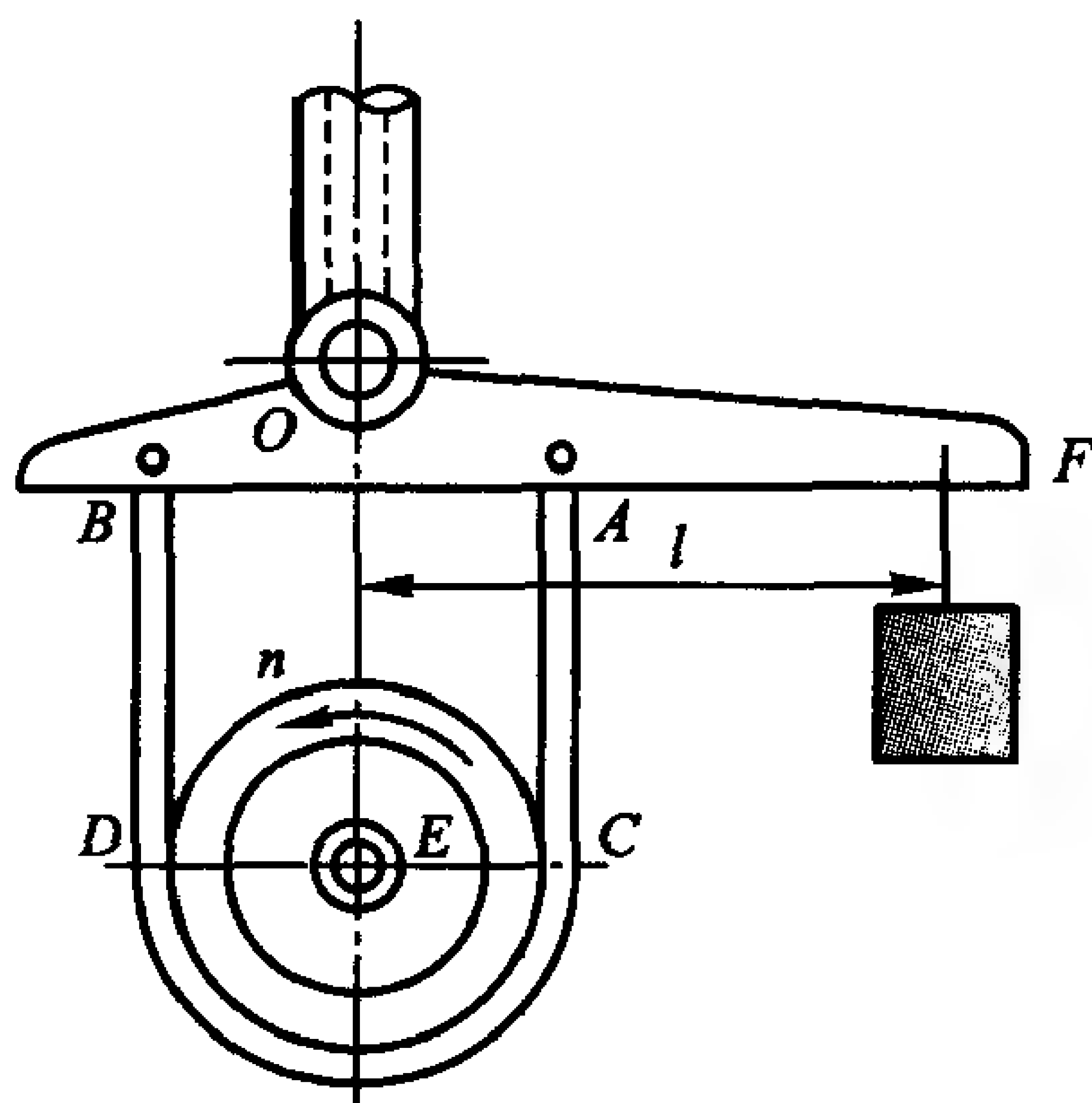
题 13－16 图

13－16　均质细杆 AB 长 l，质量为 m_1，上端 B 靠在光滑的墙上，下端 A 以铰链与均质圆柱的中心相连。圆柱质量为 m_2，半径为 R，放在粗糙水平面上，自图示位置由静止开始滚动而不滑动，杆与水平线的交角 $\theta=45°$。求点 A 在初瞬时的加速度。

13－17　图示车床切削直径 $D=48$ mm 的工件，主切削力 $F=7.84$ kN。若主轴转速 $n=240$ r/min，电动机转速为 1 420 r/min，主传动系统的总效率 $\eta=0.75$。求车床主轴、电动机主轴分别受的力矩和电动机的功率。



题 13－17 图

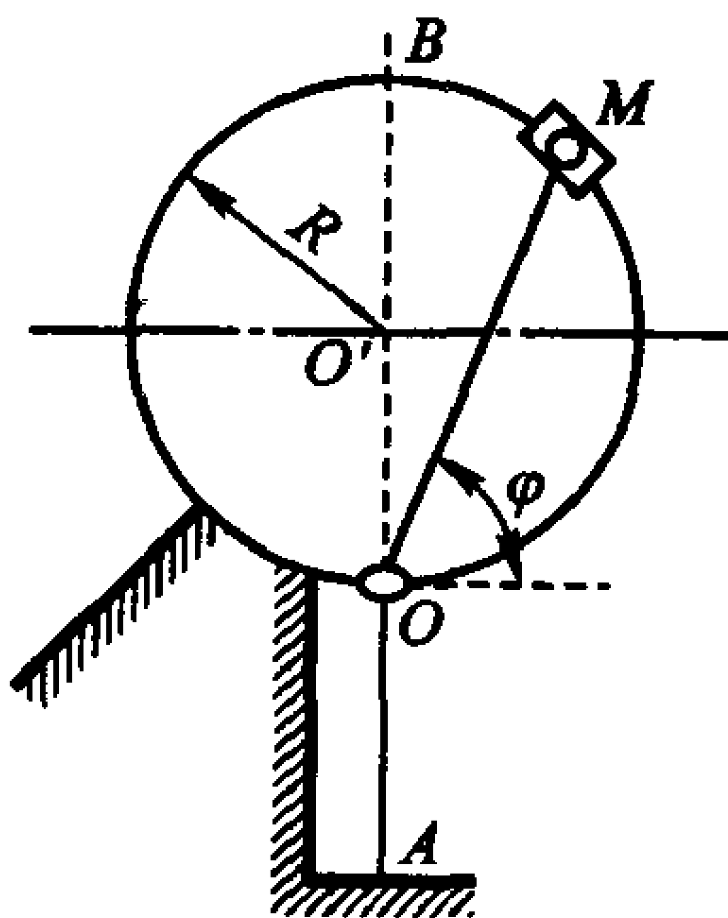


题 13－18 图

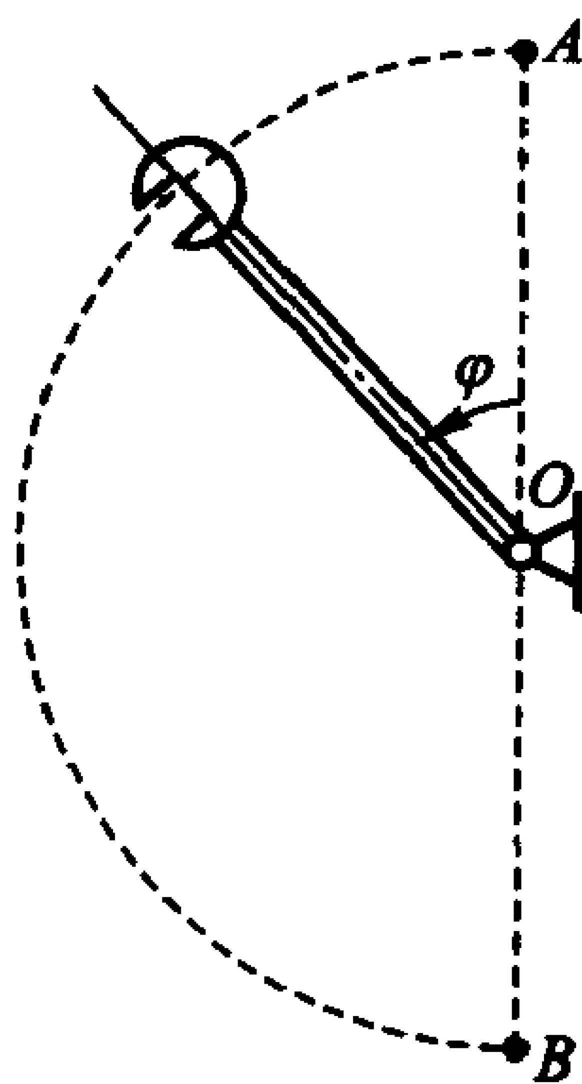
13－18　如图所示，测量机器功率的动力计，由胶带 $ACDB$ 和杠杆 BF 组成。胶带具有铅直的两段 AC 和 BD，并套住机器的滑轮 E 的下半部，杠杆支点为 O。借升高或降低支点 O，可以变更胶带的张力，同时变更轮与胶带间的摩擦力。杠杆上挂一质量为 3 kg 的重锤，使杠杆 BF 处于水平的平衡位置。如力臂 $l=500$ mm，发动机转数 $n=240$ r/min，求发动机的功率。

综合问题习题

综－1　滑块 M 的质量为 m，可在固定于铅垂面内、半径为 R 的光滑圆环上滑动，如图所示。滑块 M 上系有一刚度系数为 k 的弹性绳 MOA，此绳穿过固定环 O，并固结在点 A。已知当滑块在点 O 时绳的张力为零。开始时滑块在点 B 静止；当它受到微小扰动时，即沿圆环滑下。求下滑速度 v 与 φ 角的关系和圆环的约束力。



题综－1 图

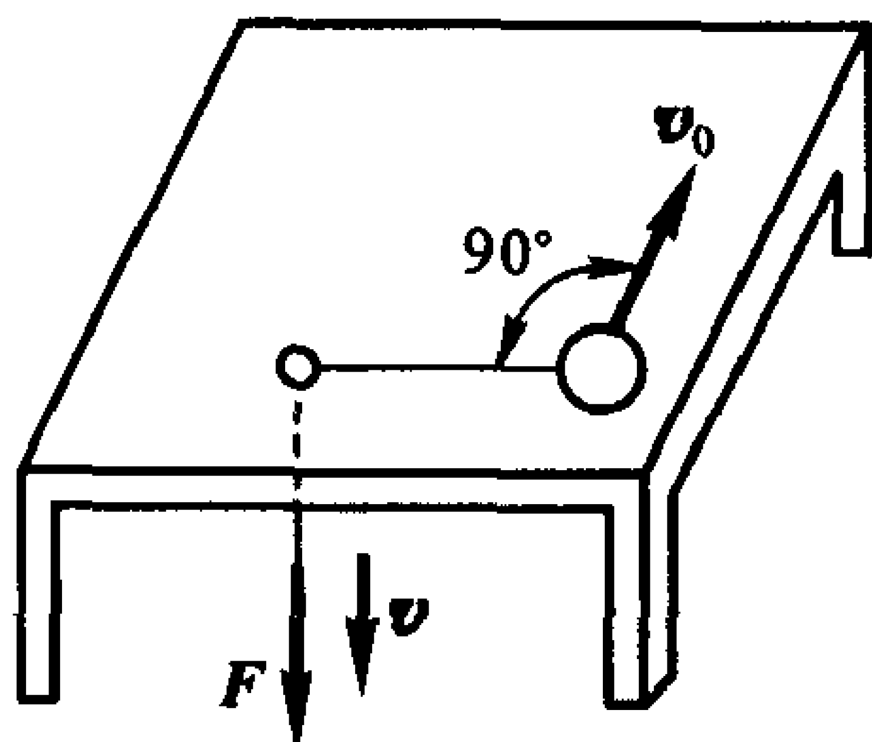


题综－2 图

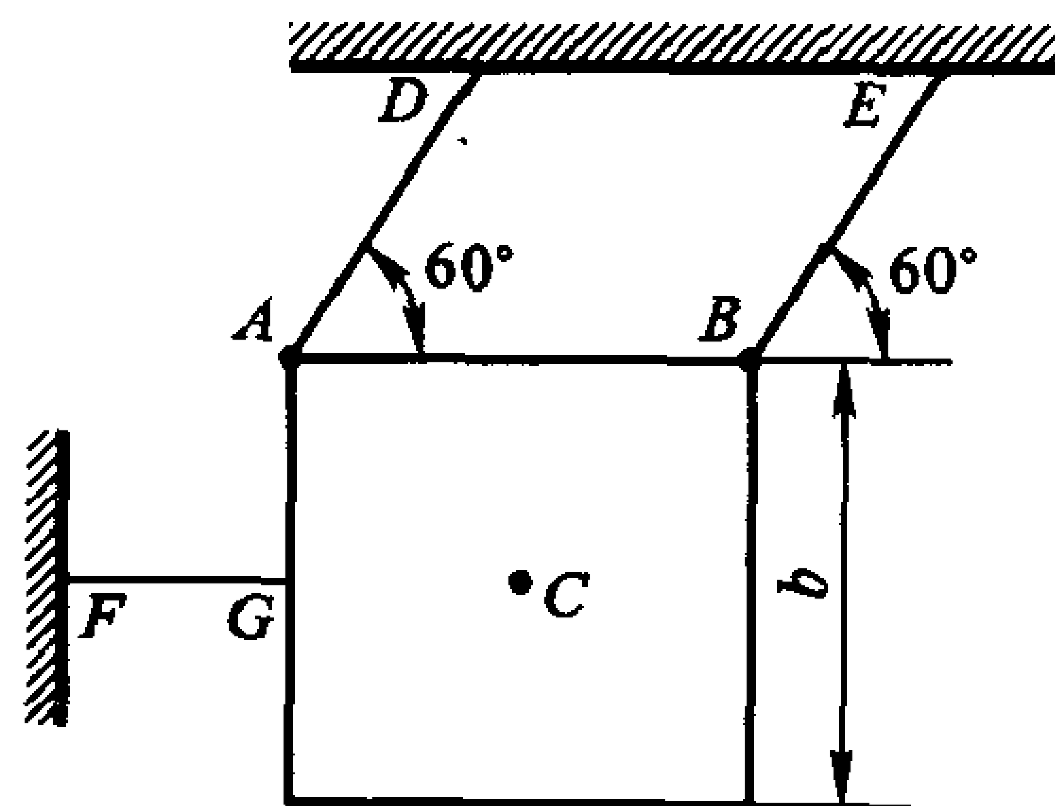
综－2　图示一撞击试验机，主要部分为一质量 $m=20$ kg 的钢铸物，固定在杆上，杆重和轴承摩擦均忽略不计。钢铸物的中心到铰链 O 的距离为 $l=1$ m，钢铸物由最高位置 A 无

初速地落下。求轴承约束力与杆的位置 φ 之间的关系。并讨论 φ 等于多少时杆受力为最大或最小。

综-3 小球质量为 m,用不可伸长的线拉住,在光滑的水平面上运动,如图所示。线的另一端穿过一孔以等速 $\boldsymbol{v}$ 向下拉动。设开始时球与孔间的距离为 R,孔与球间的线段是直的,而球在初瞬时的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 垂直于此线段。求小球的运动方程和线的张力 F(提示:解题时宜采用极坐标)。



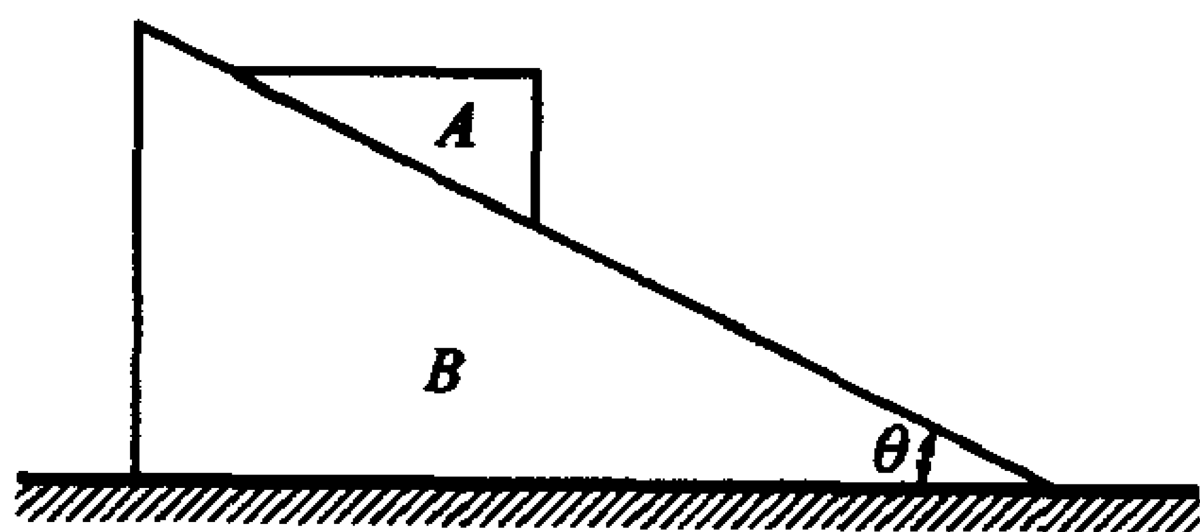
题综-3图



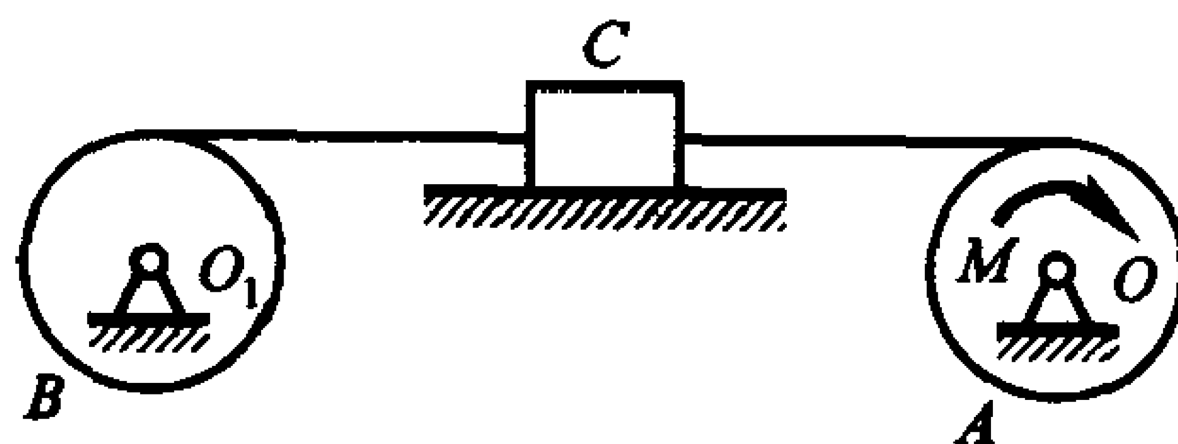
题综-4图

综-4 正方形均质板的质量为 40 kg,在铅直平面内以三根软绳拉住,板的边长 $b=100$ mm,如图所示。求:(1) 当软绳 FG 剪断后,木板开始运动的加速度以及 AD 和 BE 两绳的张力;(2) 当 AD 和 BE 两绳位于铅直位置时,板中心 C 的加速度和两绳的张力。

综-5 图示三棱柱 A 沿三棱柱 B 的斜面滑动,A 和 B 的质量各为 m_1 与 m_2,三棱柱 B 的斜面与水平面成 θ 角。如开始时物系静止,忽略摩擦,求运动时三棱柱 B 的加速度。



题综-5图

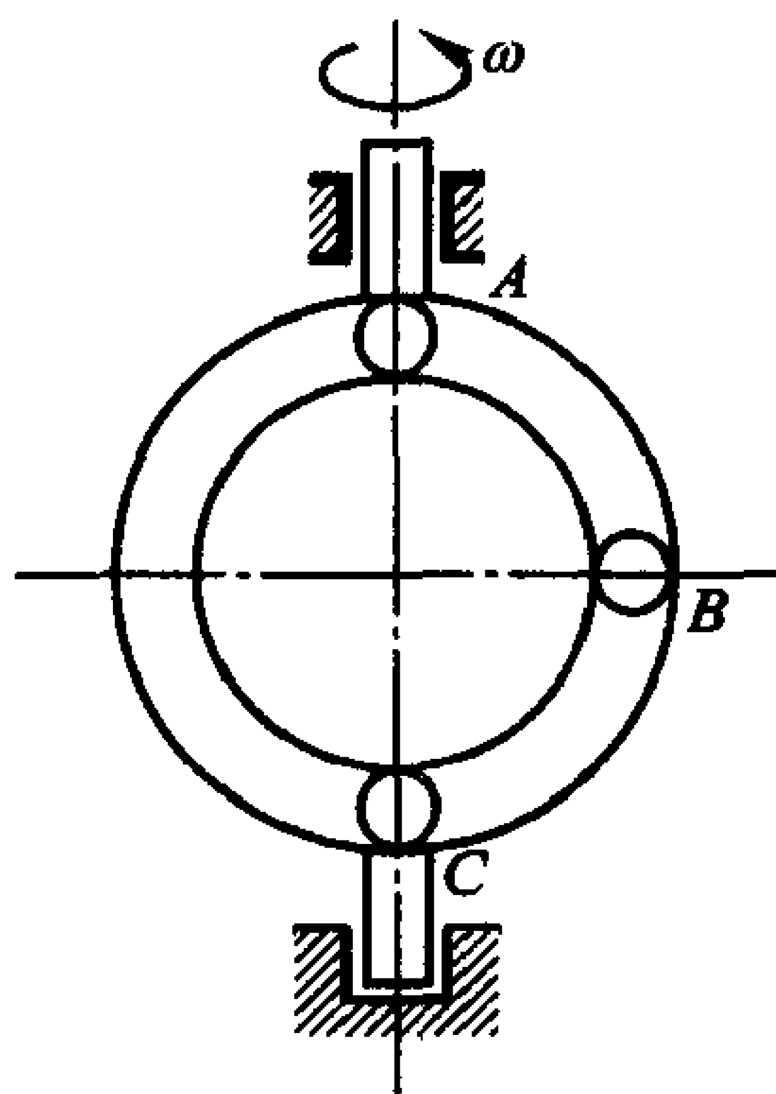


题综-6图

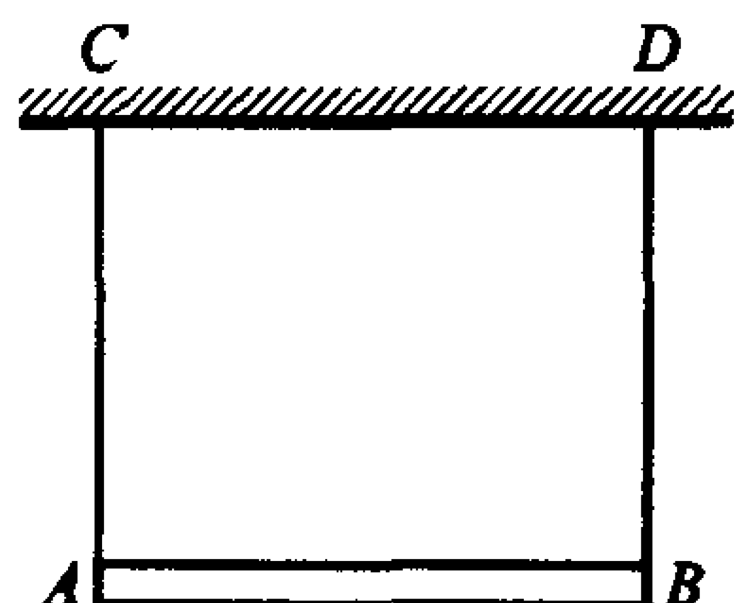
综-6 如图所示,轮 A 和 B 可视为均质圆盘,半径均为 R,质量均为 m_1。绕在两轮上的绳索中间连着物块 C,设物块 C 的质量为 m_2,且放在理想光滑的水平面上。今在轮 A 上作用一不变的力偶 M,求轮 A 与物块之间那段绳索的张力。

综-7 图示圆环以角速度 ω 绕铅直轴 AC 自由转动。此圆环半径为 R,对轴的转动惯量为 J。在圆环中的点 A 放一质量为 m 的小球。设由于微小的干扰小球离开点 A,小球与圆环间的摩擦忽略不计。求当小球到达点 B 和点 C 时,圆环的角速度和小球的速度。

综-8 均质棒 AB 的质量为 $m=4$ kg,其两端悬挂在两条平行绳上,棒处在水平位置,如图所示。设其中一绳突然断了,求此瞬时另一绳的张力 F。

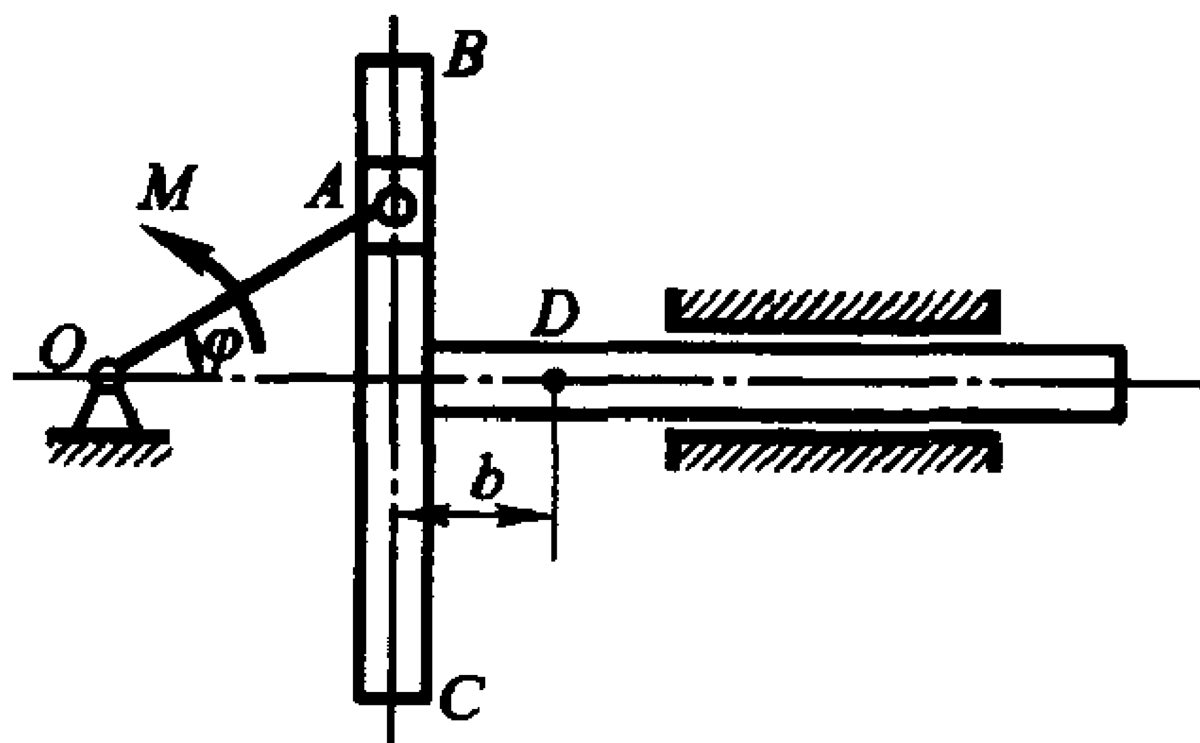


题综-7图

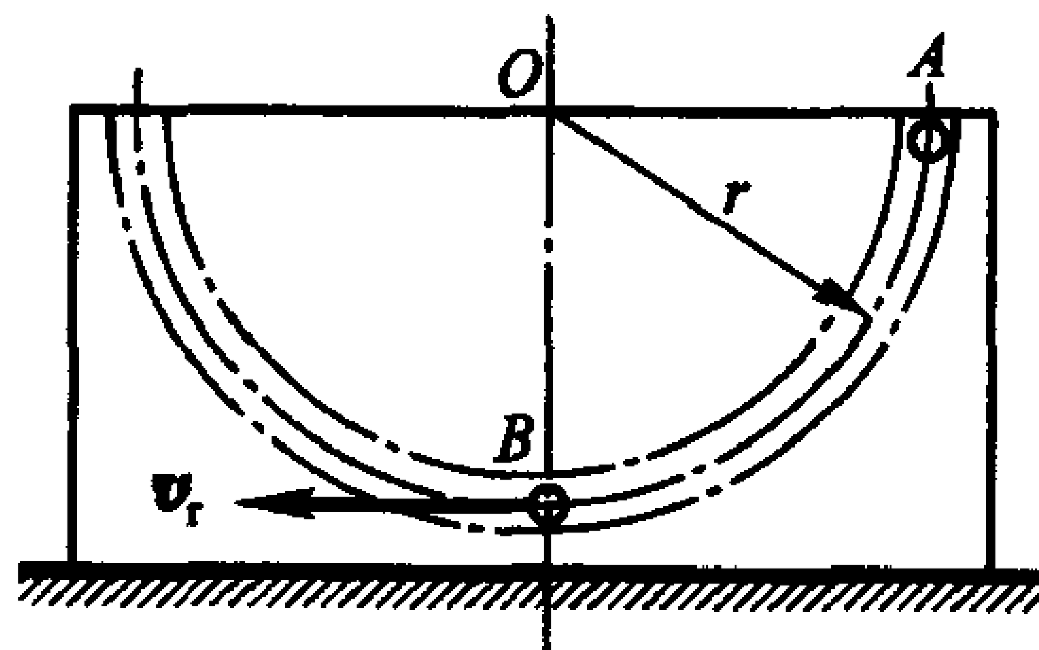


题综-8图

综-9 图示为曲柄滑槽机构，均质曲柄 OA 绕水平轴 O 作匀角速度转动。已知曲柄 OA 的质量为 m_1，$OA=r$，滑槽 BC 的质量为 m_2（重心在点 D）。滑块 A 的重量和各处摩擦不计。求当曲柄转至图示位置时，滑槽 BC 的加速度、轴承 O 的约束力以及作用在曲柄上的力偶矩 M。



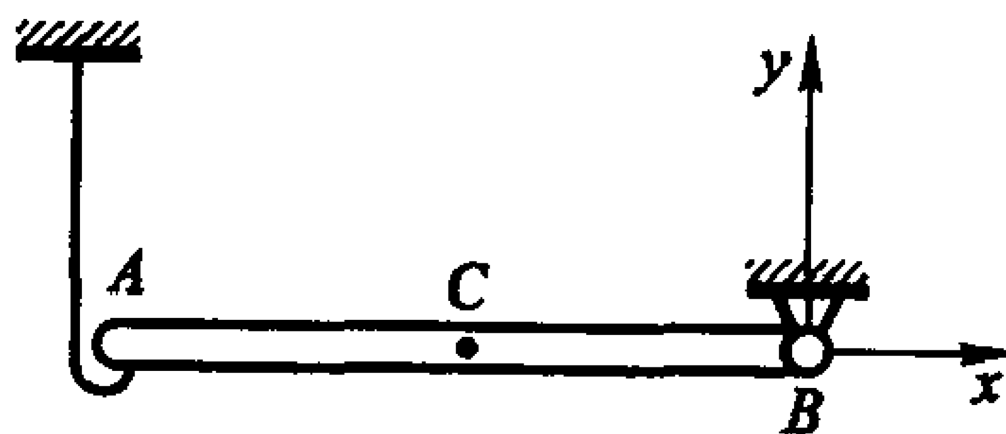
题综-9图



题综-10图

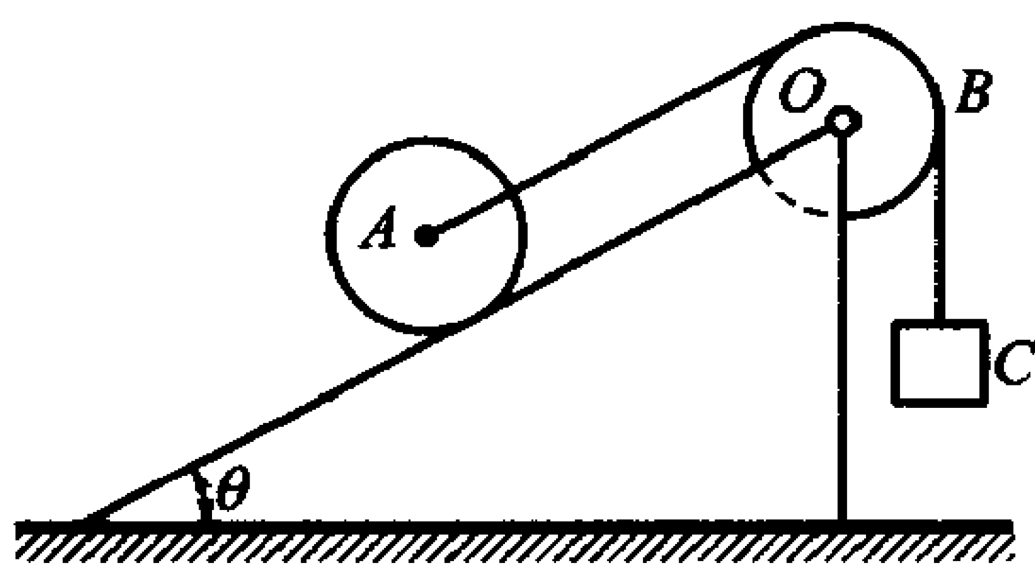
综-10 质量为 m_0 的物体上刻有半径为 r 的半圆槽，放在光滑水平面上，原处于静止状态。有一质量为 m 的小球自 A 处无初速地沿光滑半圆槽下滑。若 $m_0=3\ m$，求小球滑到 B 处时相对于物体的速度及槽对小球的正压力。

综-11 图示均质杆长为 $2l$，质量为 m，初始时位于水平位置。如 A 端脱落，杆可绕通过 B 端的轴转动。当杆转到铅垂位置时，B 端也脱落了，不计各种阻力。求该杆在 B 端脱落后的角速度及其质心的轨迹。

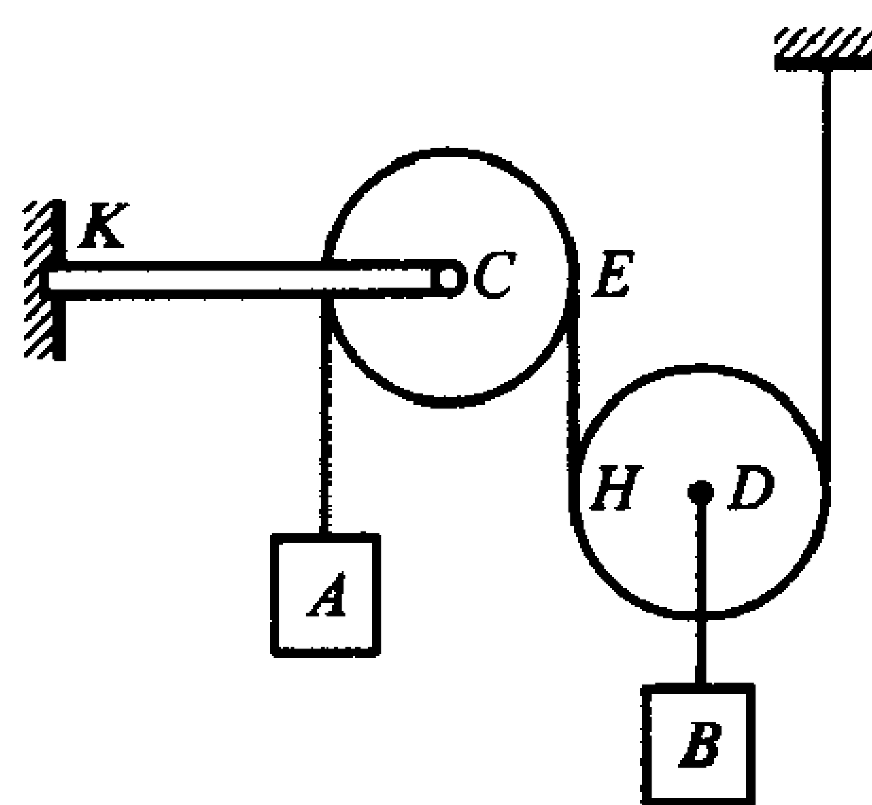


题综-11图

综-12 滚子 A 质量为 m_1，沿倾角为 θ 的斜面向下只滚不滑，如图所示。滚子借一跨过滑轮 B 的绳提升质量为 m_2 的物体 C，同时滑轮 B 绕 O 轴转动。滚子 A 与滑轮 B 的质量相等，半径相等，且都为均质圆盘。求滚子重心的加速度和系在滚子上绳的张力。



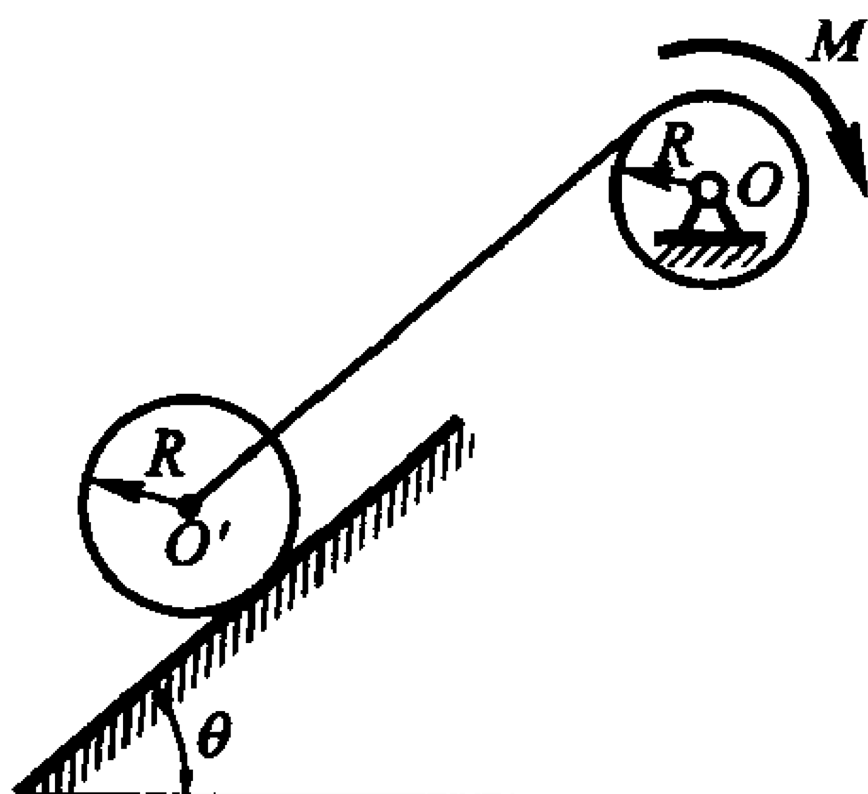
题综－12 图



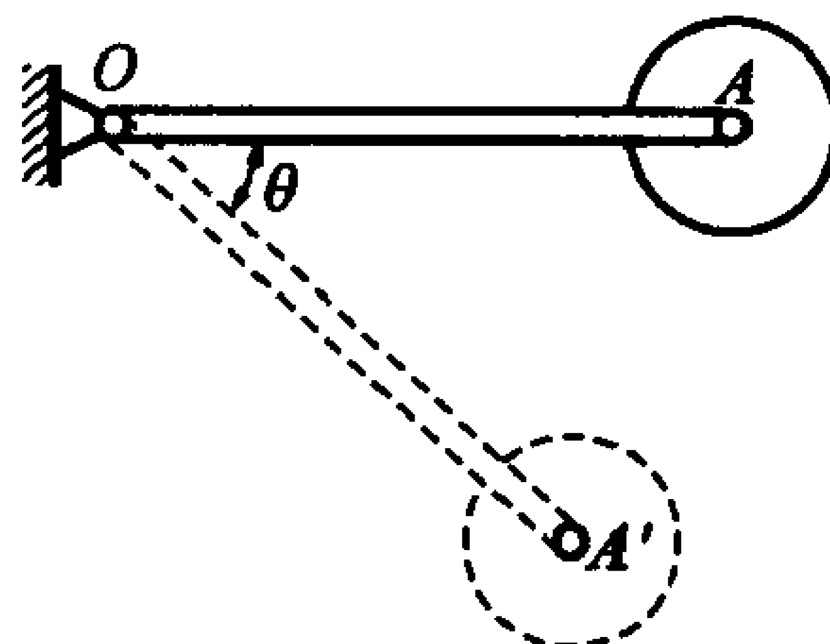
题综－13 图

综－13 图示机构中，物块 A，B 的质量均为 m，两均质圆轮 C，D 的质量均为 $2m$，半径均为 R。C 轮铰接于无重悬臂梁 CK 上，D 为动滑轮，梁的长度为 $3R$，绳与轮间无滑动，系统由静止开始运动。求：(1) A 物块上升的加速度；(2) HE 段绳的拉力；(3) 固定端 K 处的约束力。

综－14 在图示机构中，沿斜面纯滚动的圆柱体 O' 和鼓轮 O 为均质物体，质量均为 m，半径均为 R。绳子不能伸缩，其质量略去不计。粗糙斜面的倾角为 θ，不计滚阻力偶。如在鼓轮上作用一常力偶 M。求：(1) 鼓轮的角加速度；(2) 轴承 O 的水平约束力。



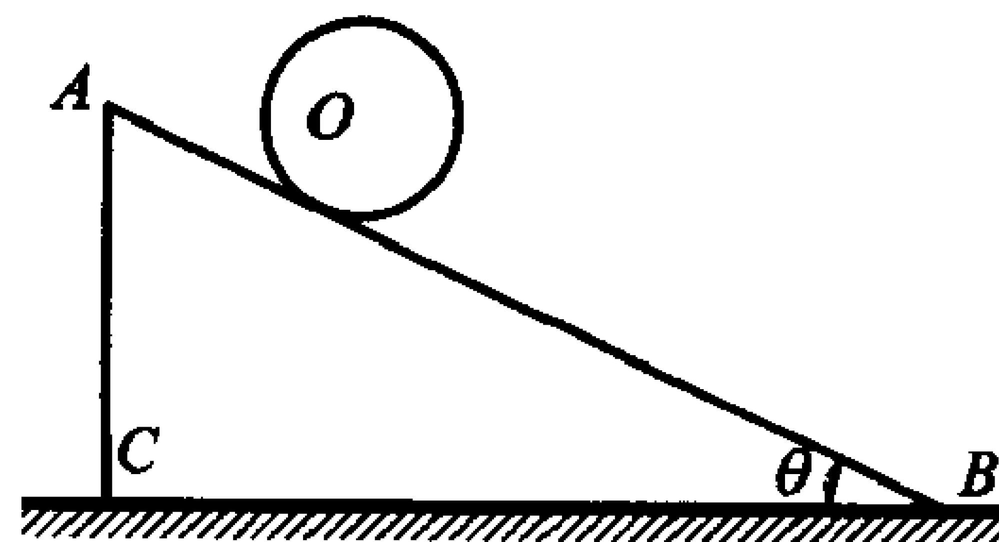
题综－14 图



题综－15 图

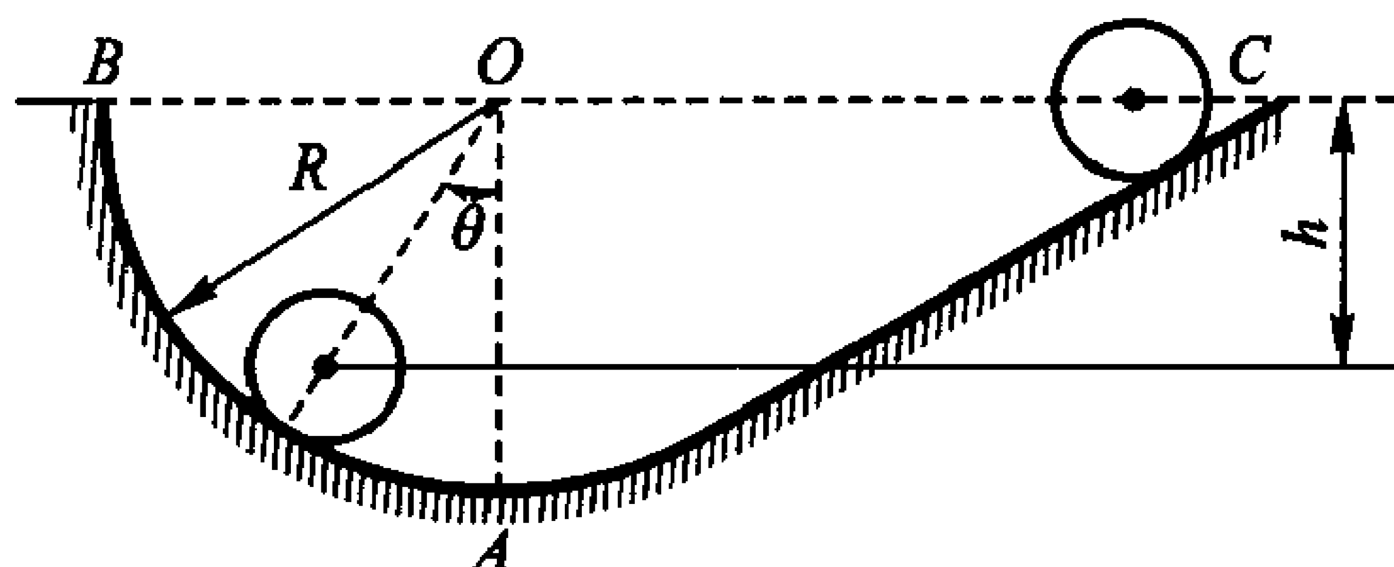
综－15 均质细杆 OA 可绕水平轴 O 转动，另一端铰接一均质圆盘，圆盘可绕铰 A 在铅直面内自由旋转，如图所示。已知杆 OA 长 l，质量为 m_1；圆盘半径为 R，质量为 m_2。摩擦不计，初始时杆 OA 水平，杆和圆盘静止。求杆与水平线成 θ 角的瞬时，杆的角速度和角加速度。

综－16 图示三棱柱体 ABC 的质量为 m_1，放在光滑的水平面上，可以无摩擦地滑动。质量为 m_2 的均质圆柱体 O 由静止沿斜面 AB 向下纯滚动，如斜面的倾角为 θ。求三棱柱体的加速度。



题综－16 图

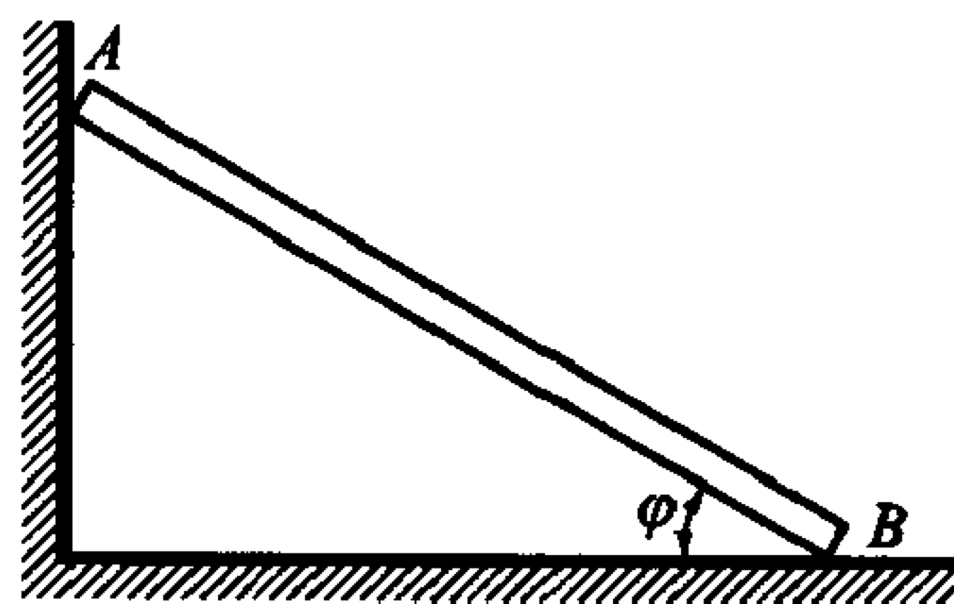
综－17 图示质量为 m、半径为 r 的均质圆柱，开始时其质心位于与 OB 同一高度的点 C。设圆柱由静止开始



题综－17 图

沿斜面向下作纯滚动，当它滚到半径为 R 的圆弧 AB 上时，求在任意位置上对圆弧的正压力和摩擦力。

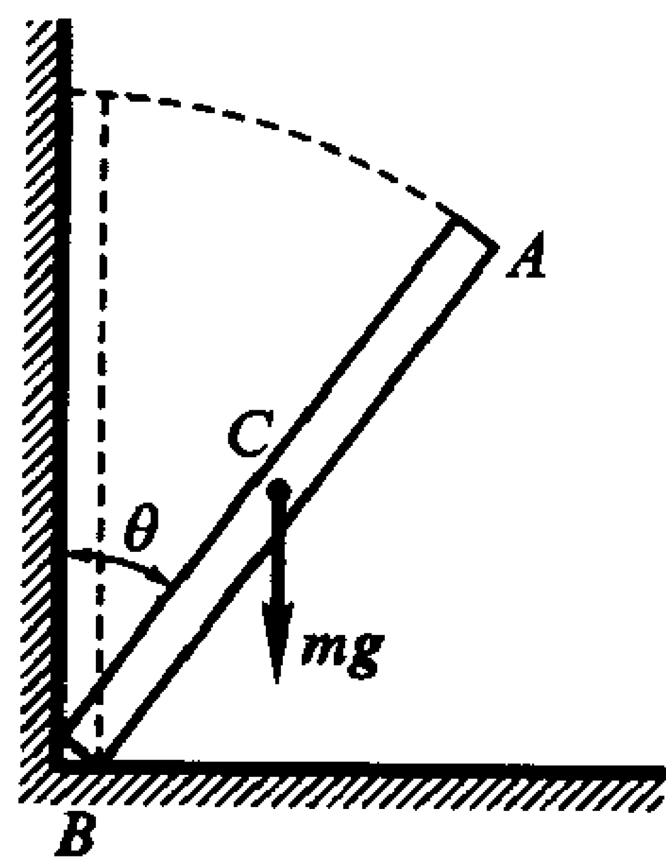
综－18　如图所示，均质细杆 AB 长 l，质量为 m，由直立位置开始滑动，上端 A 沿墙壁向下滑，下端 B 沿地板向右滑，不计摩擦。求细杆在任一位置 φ 时的角速度 ω、角加速度 α 和 A，B 处的约束力。



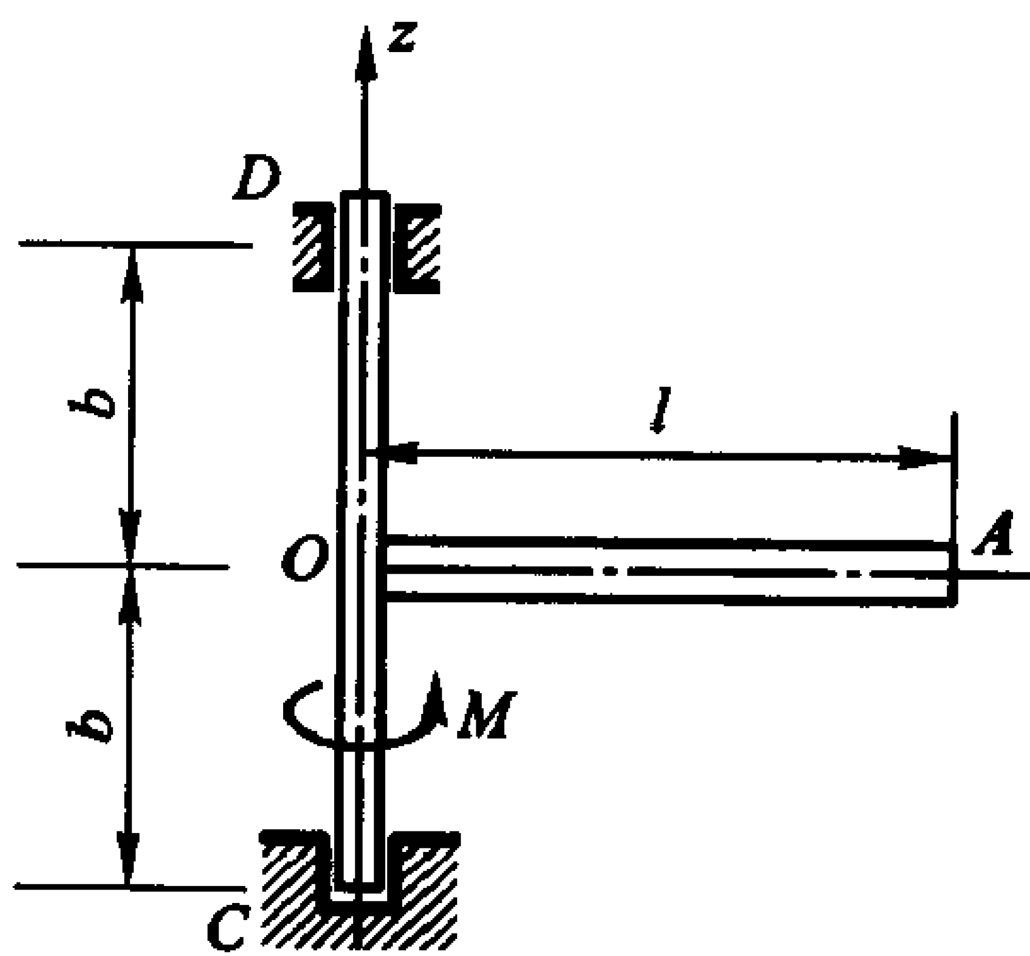
题综－18 图

综－19　均质细杆 AB 长为 l，质量为 m，起初紧靠在铅垂墙壁上，由于微小干扰，杆绕 B 点倾倒如图。不计摩擦，求：(1) B 端未脱离墙时 AB 杆的角速度、角加速度及 B 处的约束力；(2) B 端脱离墙壁时的 θ_1 角；(3) 杆着地时质心的速度及杆的角速度。

综－20　图示均质直杆 OA，杆长为 l，质量为 m，在常力偶的作用下在水平面内从静止开始绕轴 z 转动，设力偶矩为 M。求：(1) 经过时间 t 后系统的动量、对轴 z 的动量矩和动能的变化；(2) 轴承的动约束力。



题综－19 图



题综－20 图

第十四章　达朗贝尔原理(动静法)

达朗贝尔原理提供了研究动力学问题的一个新的普遍的方法，即用静力学中研究平衡问题的方法来研究动力学问题，因此又称为**动静法**。

§14-1　惯性力·质点的达朗贝尔原理

设一质点的质量为 m，加速度为 $\boldsymbol{a}$，作用于质点的主动力为 $\boldsymbol{F}$，约束力为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$，如图 14-1 所示。由牛顿第二定律，有

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$$

将上式移项写为

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}-m\boldsymbol{a}=0$$

令

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}=-m\boldsymbol{a} \tag{14-1}$$

有

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}=0 \tag{14-2}$$

$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}$ 具有力的量纲，且与质点的质量有关，称其为质点的**惯性力**，它的大小等于质点的质量与加速度的乘积，它的方向与质点加速度的方向相反。式(14-2)可解释为：作用在质点上的主动力、约束力和虚加的惯性力在形式上组成平衡力系。这就是质点的**达朗贝尔原理**。

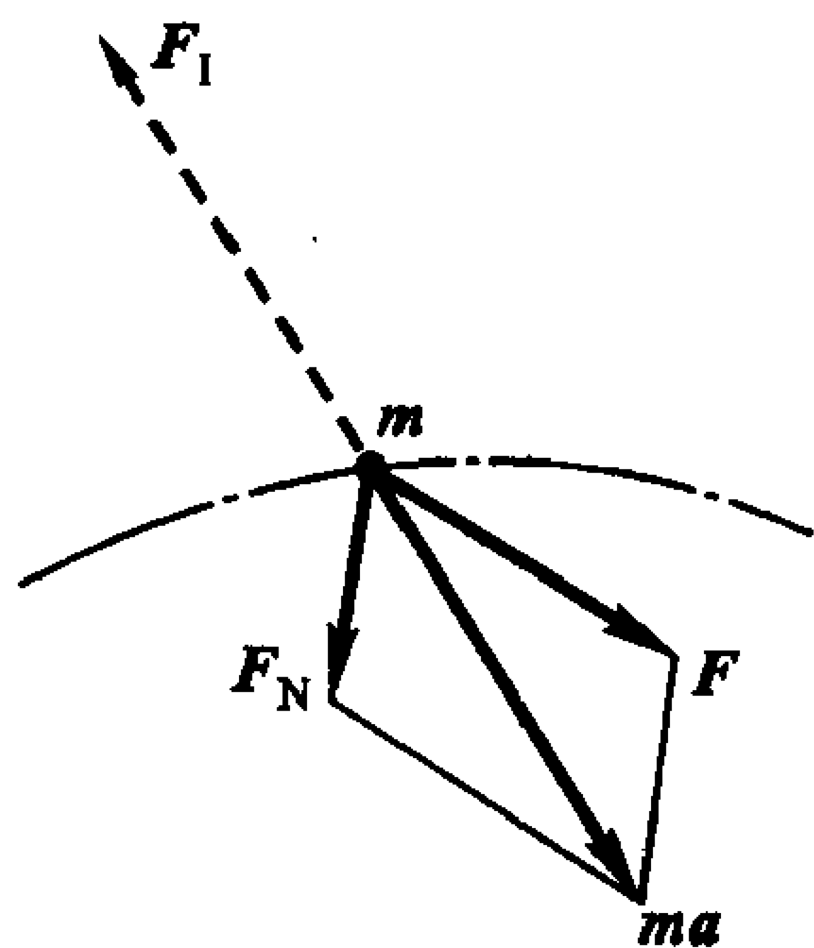


图 14-1

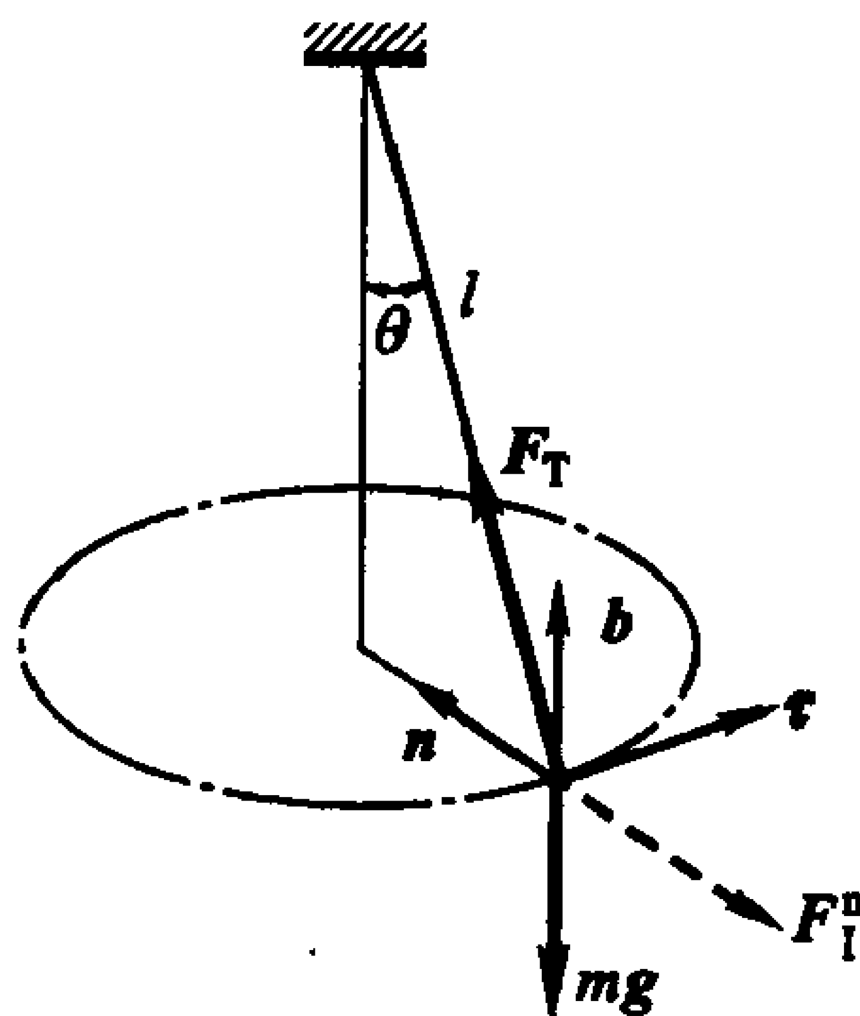


图 14-2

应该强调指出，质点并非处于平衡状态，这样做的目的是将动力学问题转化为静力学问题求解。对质点系动力学问题，这一方法具有很多优越性，因此在工

程中应用比较广泛。同时,达朗贝尔原理与下一章的虚位移原理构成了分析力学的基础。

例 14-1 用达朗贝尔原理求解例 10-3。

解:视小球为质点,其受重力(主动力)$m\boldsymbol{g}$ 与绳拉力(约束力)$\boldsymbol{F}_T$ 作用。质点作匀速圆周运动,只有法向加速度,加上法向惯性力,如图 14-2 所示,

且

$$F_I^n = ma_n = m\frac{v^2}{l\sin\theta}$$

根据质点的达朗贝尔原理,这三力在形式上组成平衡力系,

$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_T + \boldsymbol{F}_I^n = 0$$

取上式在图示自然轴上的投影式,有

$$\sum F_b = 0,\quad F_T\cos\theta - mg = 0 \qquad \sum F_n = 0,\quad F_T\sin\theta - F_I^n = 0$$

解得

$$F_T = \frac{mg}{\cos\theta} = 1.96\ \text{N} \qquad v = \sqrt{\frac{F_T l\sin^2\theta}{m}} = 2.1\ \text{m/s}$$

§ 14-2 质点系的达朗贝尔原理

设质点系由 n 个质点组成,其中任一质点 i 的质量为 m_i,加速度为 $\boldsymbol{a}_i$,把作用于此质点上的所有力分为主动力的合力 $\boldsymbol{F}_i$、约束力的合力 $\boldsymbol{F}_{Ni}$,对这个质点假想地加上它的惯性力 $\boldsymbol{F}_{Ii} = -m_i\boldsymbol{a}_i$,由质点的达朗贝尔原理,有

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ni} + \boldsymbol{F}_{Ii} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{14-3}$$

上式表明,质点系中每个质点上作用的主动力、约束力和它的惯性力在形式上组成平衡力系,这就是质点系的达朗贝尔原理。

把作用于第 i 个质点上的所有力分为外力的合力 $\boldsymbol{F}_i^{(e)}$,内力的合力 $\boldsymbol{F}_i^{(i)}$,则式(14-3)可改写为

$$\boldsymbol{F}_i^{(e)} + \boldsymbol{F}_i^{(i)} + \boldsymbol{F}_{Ii} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

这表明,质点系中每个质点上作用的外力、内力和它的惯性力在形式上组成平衡力系。由静力学知,空间任意力系平衡的充分必要条件是力系的主矢和对于任一点的主矩等于零,即

$$\sum\boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum\boldsymbol{F}_i^{(i)} + \sum\boldsymbol{F}_{Ii} = 0$$
$$\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) + \sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(i)}) + \sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{Ii}) = 0$$

由于质点系的内力总是成对存在,且等值、反向、共线,因此有 $\sum\boldsymbol{F}_i^{(i)} = 0$ 和 $\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(i)}) = 0$,于是有

$$\left.\begin{aligned}&\sum\boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum\boldsymbol{F}_{Ii} = 0\\&\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) + \sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{Ii}) = 0\end{aligned}\right\} \tag{14-4}$$

式(14-4)表明,作用在质点系上的所有外力与虚加在每个质点上的惯性力在形式上组成平衡力系,这是质点系达朗贝尔原理的又一表述。

在静力学中,称$\sum \boldsymbol{F}_i$为主矢,$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)$为对点$O$的主矩,现在称$\sum \boldsymbol{F}_{Ii}$为惯性力系的主矢,$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{Ii})$为惯性力系对点$O$的主矩。与静力学中空间任意力系的平衡条件

$$\boldsymbol{F}_R=\sum \boldsymbol{F}_i=\sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}=0,\quad \boldsymbol{M}_O=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})=0$$

比较,(14-4)中分别多出了惯性力的主矢$\sum \boldsymbol{F}_{Ii}$与主矩$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{Ii})$,由质点系的达朗贝尔原理,这在形式上也是一个平衡力系,因而可用静力学各章所述求解各种平衡力系的方法,求解动力学问题。

例14-2　如图14-3所示,定滑轮的半径为r,质量m均匀分布在轮缘上,绕水平轴O转动。跨过滑轮的无重绳的两端挂有质量为m_1和m_2的重物($m_1>m_2$),绳与轮间不打滑,轴承摩擦忽略不计,求重物的加速度。

解:取滑轮与两重物组成的质点系为研究对象,作用于此质点系的外力有重力$m_1\boldsymbol{g}$,$m_2\boldsymbol{g}$,$m\boldsymbol{g}$和轴承的约束力$\boldsymbol{F}_{Ox}$,$\boldsymbol{F}_{Oy}$,对两重物加惯性力如图14-3,大小分别为

$$F_{I1}=m_1a\qquad F_{I2}=m_2a$$

记滑轮边缘上任一点i的质量为m_i,加速度有切向、法向之分,加惯性力如图,大小分别为

$$F_{Ii}^{t}=m_ir\alpha=m_ia\qquad F_{Ii}^{n}=m_i\frac{v^2}{r}$$

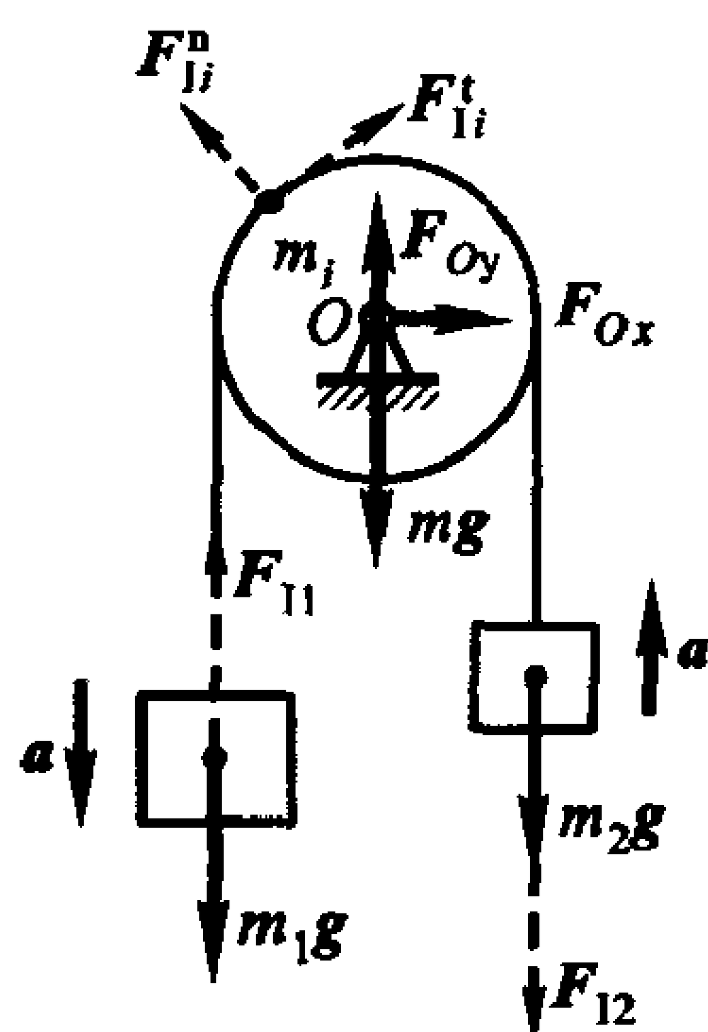


图14-3

列平衡方程

$$\sum M_O=0,\qquad (m_1g-F_{I1}-m_2g-F_{I2})r-\sum F_{Ii}^{t}\cdot r=0$$

即

$$(m_1g-m_1a-m_2g-m_2a)r-\sum m_iar=0$$

注意到

$$\sum m_iar=(\sum m_i)ar=mar$$

解得

$$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+m}g$$

例14-3　飞轮质量为m,半径为R,以匀角速度ω定轴转动,设轮辐质量不计,质量均布在较薄的轮缘上,不考虑重力的影响,求轮缘横截面的张力。

解:由于对称,取四分之一轮缘为研究对象,如图14-4所示,取微小弧段,每段加惯性力$\boldsymbol{F}_{Ii}=m_i\boldsymbol{a}_i^{n}$,即

$$F_{Ii}=m_ia_i^{n}=\frac{m}{2\pi R}R\Delta\theta_i\cdot R\omega^2$$

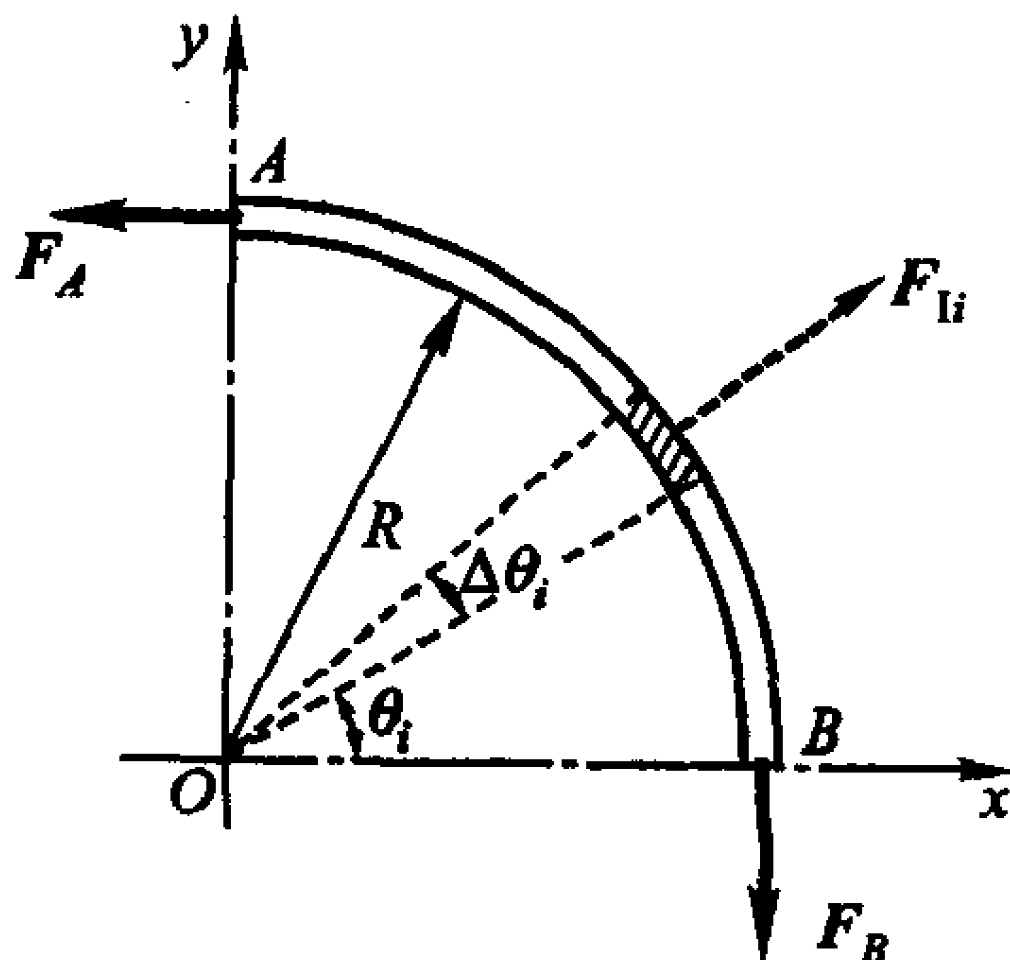


图14-4

列平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad \sum F_{Ii}\cos\theta_i-F_A=0$$

$$\sum F_y=0,\quad \sum F_{Ii}\sin\theta_i-F_B=0$$

令$\Delta\theta_i\to 0$,有

$$F_A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{m}{2\pi}R\omega^2\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{mR\omega^2}{2\pi},\quad F_B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{m}{2\pi}R\omega^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{mR\omega^2}{2\pi}$$

由于对称,任一横截面张力相同。

§14-3 刚体惯性力系的简化

用质点系的达朗贝尔原理求解质点系动力学问题,需要对质点系内每个质点加上各自的惯性力,这些惯性力也形成一个力系,称为惯性力系。若利用静力学的力系简化理论,求出惯性力系的主矢和主矩,代替具体求解时对每一个质点所加的惯性力,将给解题带来方便。下面只讨论刚体平移,定轴转动和平面运动时惯性力系的简化。以 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}$ 表示惯性力系的主矢,由(14-4)中第一式及质心运动定理,有

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}=-\sum\boldsymbol{F}_i^{(e)}=-m\boldsymbol{a}_C \tag{14-5}$$

此式对任何质点系做任意运动均成立,当然适用于作平移、定轴转动与平面运动的刚体。

由静力学中任意力系简化理论知,主矢的大小和方向与简化中心的位置无关,主矩一般与简化中心的位置有关。下面对刚体作平移、定轴转动、平面运动时惯性力系简化的主矩进行讨论。

1. 刚体作平移

刚体平移时,每一瞬时刚体内任一质点 i 的加速度 $\boldsymbol{a}_i$ 与质心 C 的加速度 $\boldsymbol{a}_C$ 相同,有 $\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{a}_C$,刚体的惯性力系分布如图 14-5 所示,任选一点 O 为简化中心,主矩用 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{IO}}$ 表示,有

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{IO}}=\sum\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i}=\sum\boldsymbol{r}_i\times(-m_i\boldsymbol{a}_i)$$
$$=-(\sum m_i\boldsymbol{r}_i)\times\boldsymbol{a}_C=-m\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{a}_C$$

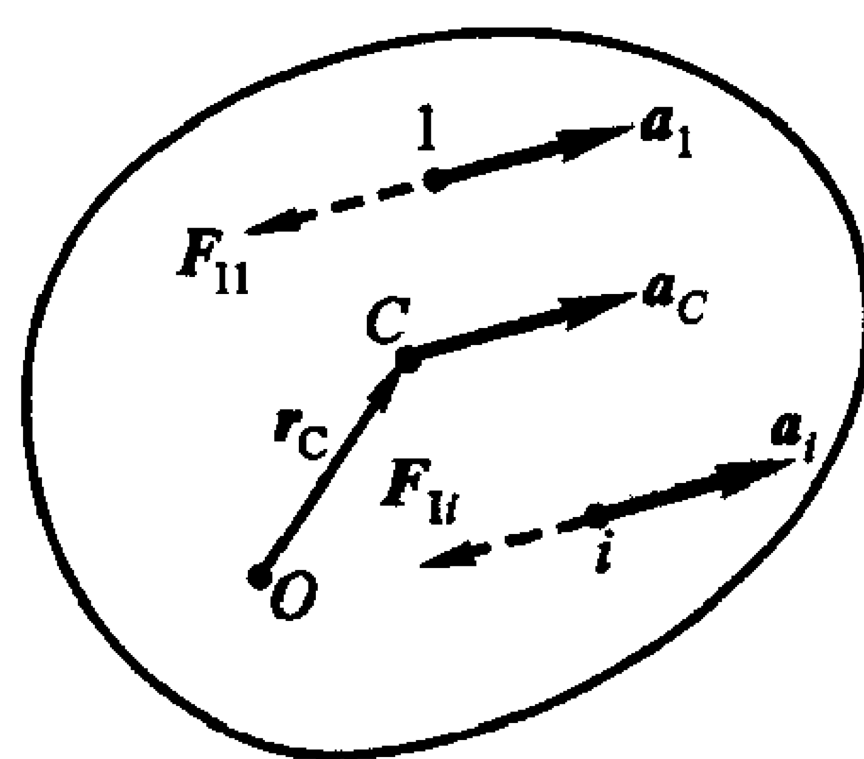


图 14-5

式中,$\boldsymbol{r}_C$ 为质心 C 到简化中心 O 的矢径,此主矩一般不为零。若选质心 C 为简化中心,主矩以 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{IC}}$ 表示,则 $\boldsymbol{r}_C=0$,有

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{IC}}=0 \tag{14-6}$$

刚体平移时,惯性力对任意点 O 的主矩一般不为零。若选质心为简化中心,其主矩为零,简化为一合力。因此有结论:平移刚体的惯性力系可以简化为通过质心的合力,其大小等于刚体的质量与加速度的乘积,合力的方向与加速度方向相反。

2. 刚体定轴转动

刚体定轴转动时,设刚体的角速度为 ω,角加速度为 α,刚体内任一质点的质量为 m_i,到转轴的距离为 r_i,则刚体内任一质点的惯性力为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i}=-m_i\boldsymbol{a}_i$。

为简单起见，在转轴上任选一点 O 为简化中心，由第四章知，力对点的矩矢在通过该点的某轴上的投影，等于力对该轴的矩，所以建立直角坐标系如图 14－6 所示，质点的坐标为 x_i, y_i, z_i，现在分别计算惯性力系对 x, y, z 轴的矩，分别以 M_{Ix}, M_{Iy}, M_{Iz} 表示。

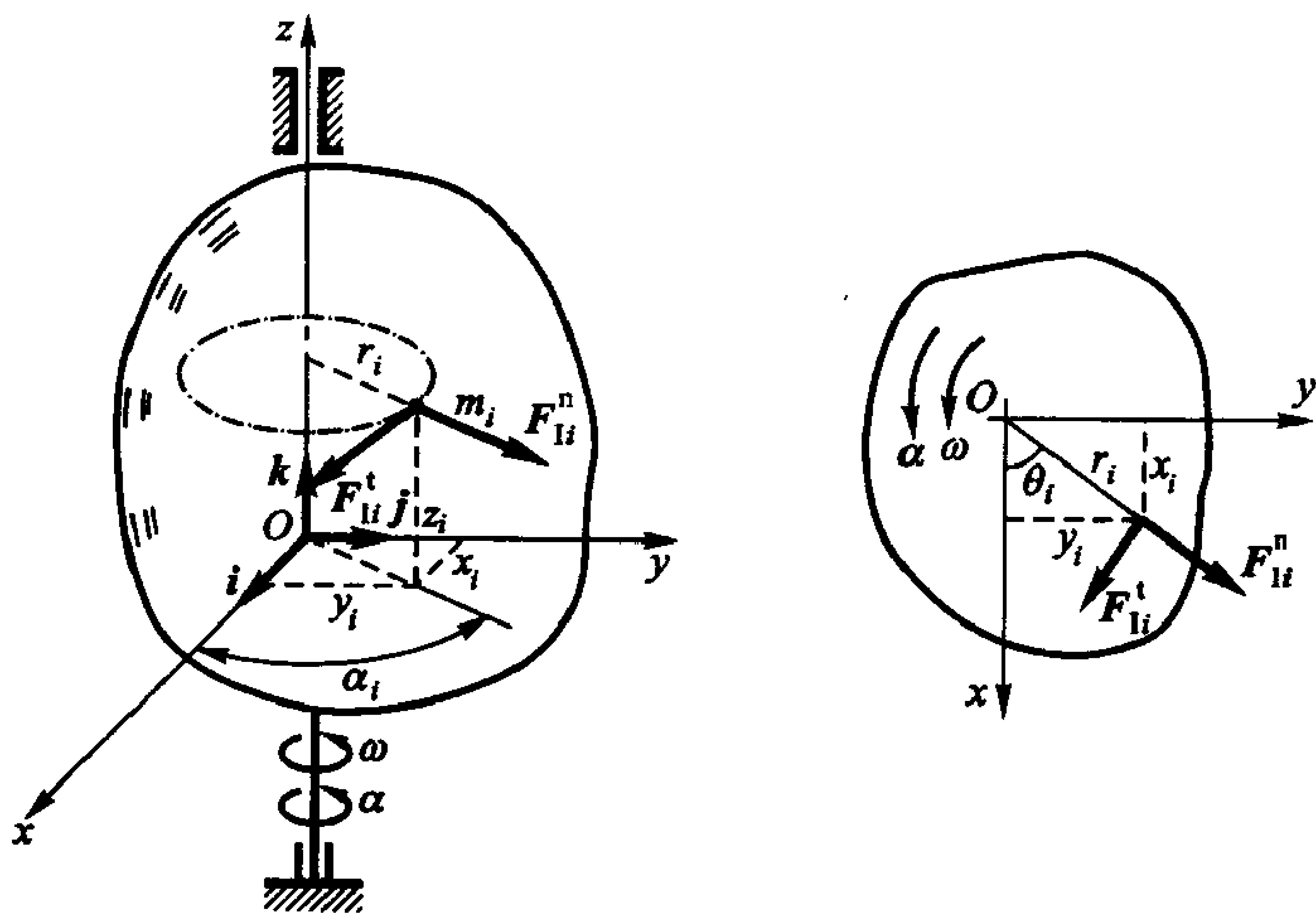


图 14－6

质点的惯性力 $\boldsymbol{F}_{Ii} = -m_i \boldsymbol{a}_i$ 可分解为**切向惯性力** $\boldsymbol{F}_{Ii}^{t}$ 与**法向惯性力** $\boldsymbol{F}_{Ii}^{n}$，它们的方向如图 14－6 所示，大小分别为

$$F_{Ii}^{t} = m_i a_i^{t} = m_i r_i \alpha \qquad F_{Ii}^{n} = m_i a_i^{n} = m_i r_i \omega^2$$

惯性力系对 x 轴的矩为

$$\begin{aligned} M_{Ix} &= \sum M_x(\boldsymbol{F}_{Ii}) = \sum M_x(\boldsymbol{F}_{Ii}^{t}) + \sum M_x(\boldsymbol{F}_{Ii}^{n}) \\ &= \sum m_i r_i \alpha \cos\theta_i \cdot z_i + \sum - m_i r_i \omega^2 \sin\theta_i \cdot z_i \end{aligned}$$

而
$$\cos\theta_i = \frac{x_i}{r_i} \qquad \sin\theta_i = \frac{y_i}{r_i}$$

则
$$M_{Ix} = \alpha \sum m_i x_i z_i - \omega^2 \sum m_i y_i z_i$$

记

$$J_{yz} = \sum m_i y_i z_i, \qquad J_{xz} = \sum m_i x_i z_i \tag{14-7}$$

称其为对于 z 轴的惯性积，它取决于刚体质量对于坐标轴的分布情况。于是，惯性力系对于 x 轴的矩为

$$M_{Ix} = J_{xz}\alpha - J_{yz}\omega^2 \tag{14-8}$$

同理可得惯性力系对于 y 轴的矩为

$$M_{Iy} = J_{yz}\alpha + J_{xz}\omega^2 \tag{14-9}$$

惯性力系对于 z 轴的矩为

$$M_{Iz}=\sum M_z(\boldsymbol{F}_{Ii}^{t})+\sum M_z(\boldsymbol{F}_{Ii}^{n})$$

由于各质点的法向惯性力均通过轴 z，$\sum M_z(\boldsymbol{F}_{Ii}^{n})=0$，有

$$M_{Iz}=\sum M_z(\boldsymbol{F}_{Ii}^{t})=\sum -m_i r_i\alpha\cdot r_i=-(\sum m_i r_i^2)\alpha=-J_z\alpha \quad (14-10)$$

综上可得，刚体定轴转动时，惯性力系向转轴上一点 O 简化的主矩为

$$\boldsymbol{M}_{IO}=M_{Ix}\boldsymbol{i}+M_{Iy}\boldsymbol{j}+M_{Iz}\boldsymbol{k} \quad (14-11)$$

如果刚体有质量对称平面且该平面与转轴 z 垂直，简化中心 O 取为此平面与转轴 z 的交点，则

$$J_{xz}=\sum m_i x_i z_i=0,\quad J_{yz}=\sum m_i y_i z_i=0$$

则惯性力系简化的主矩为

$$M_{IO}=M_{Iz}=-J_z\alpha$$

工程中绕定轴转动的刚体常常有质量对称平面。

于是得结论：当刚体有质量对称平面且绕垂直于此对称面的轴作定轴转动时，惯性力系向转轴简化为此对称面内的一个力和一个力偶。这个力等于刚体质量与质心加速度的乘积，方向与质心加速度方向相反，作用线通过转轴；这个力偶的矩等于刚体对转轴的转动惯量与角加速度的乘积，转向与角加速度相反。

3. 刚体作平面运动(平行于质量对称平面)

工程中，作平面运动的刚体常常有质量对称平面，且平行于此平面运动，现仅限于讨论这种情况下惯性力系的简化。与刚体绕定轴转动相似，刚体作平面运动，其上各质点的惯性力组成的空间力系，可简化为在质量对称平面内的平面力系。取质量对称平面内的平面图形如图 14－7 所示。由运动学知，平面图形的运动可分解为随基点的平移与绕基点的转动。现取质心 C 为基点，设质心的加速度为 $\boldsymbol{a}_C$，绕质心转动的角速度为 ω，角加速度为 α，与刚体绕定轴转动相似，此时惯性力系向质心 C 简化的主矩为

$$M_{IC}=-J_C\,\alpha \quad (14-12)$$

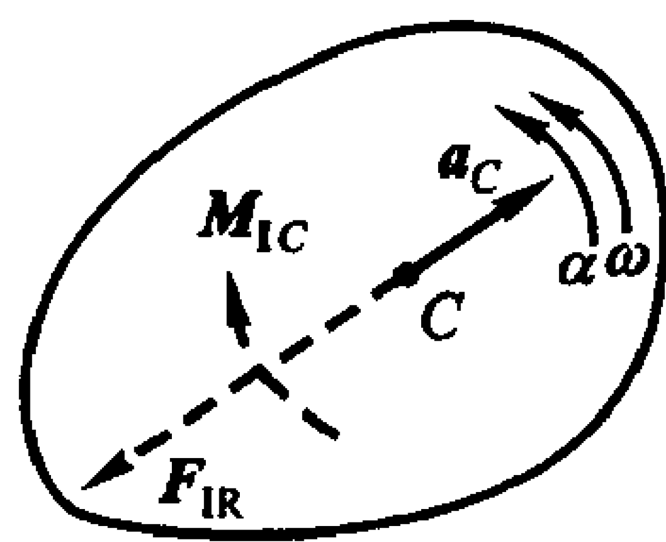


图 14－7

式中，J_C 为刚体对通过质心且垂直于质量对称平面的轴的转动惯量。

于是得结论：有质量对称平面的刚体，平行于此平面运动时，刚体的惯性力系简化为在此平面内的一个力和一个力偶。这个力通过质心，其大小等于刚体的质量与质心加速度的乘积，其方向与质心加速度的方向相反；这个力偶的矩等于刚体对过质心且垂直于质量对称面的轴的转动惯量与角加速度的乘积，转向与角加速度相反。

例 14－4 如图 14－8a 所示均质杆的质量为 m，长为 l，绕定轴 O 转动的角速度为 ω，角

加速度为 α。求惯性力系向点 O 简化的结果(方向在图上画出)。

解：该杆作定轴转动，惯性力系向点 O 简化的主矢、主矩大小为

$$F_{IO}^{t}=m\cdot\frac{l}{2}\alpha\ ,\ F_{IO}^{n}=m\cdot\frac{l}{2}\omega^{2},\ M_{IO}=\frac{1}{3}ml\cdot\alpha$$

方向分别如图 14-8b 所示。

注意，能不能以 $\boldsymbol{F}_{IR}=-m\boldsymbol{a}_C$、惯性力和质心加速度 $\boldsymbol{a}_C$ 相反为由，把惯性力系的主矢画在 C 点，如图 14-8b 中 C 处的虚线所示？

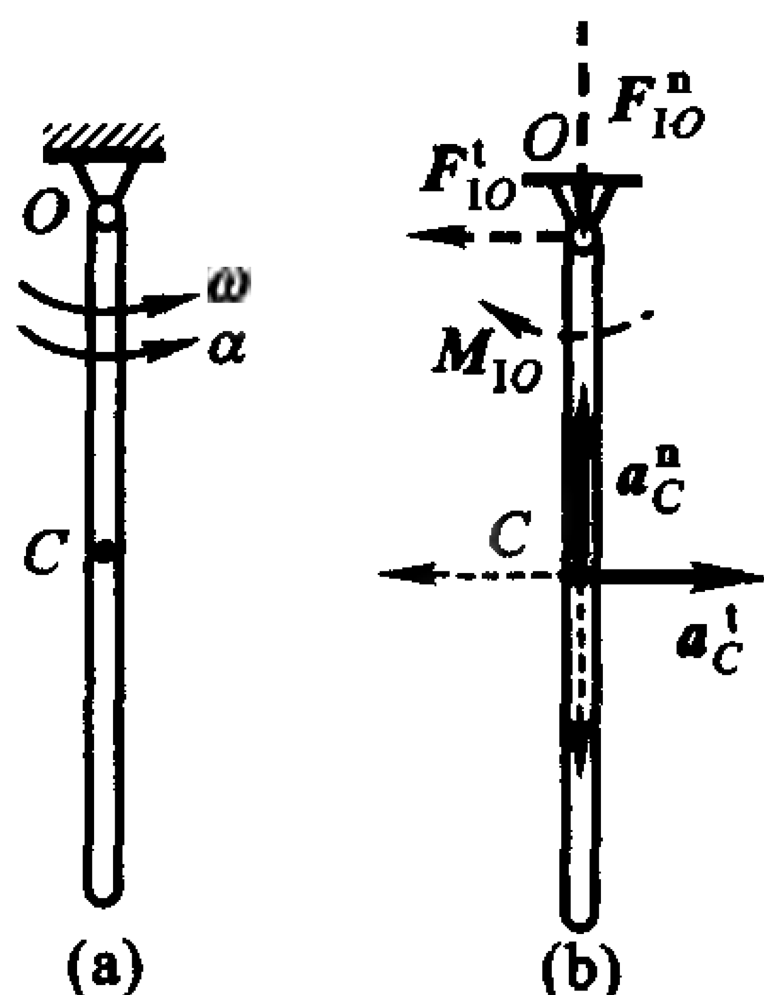


图 14-8

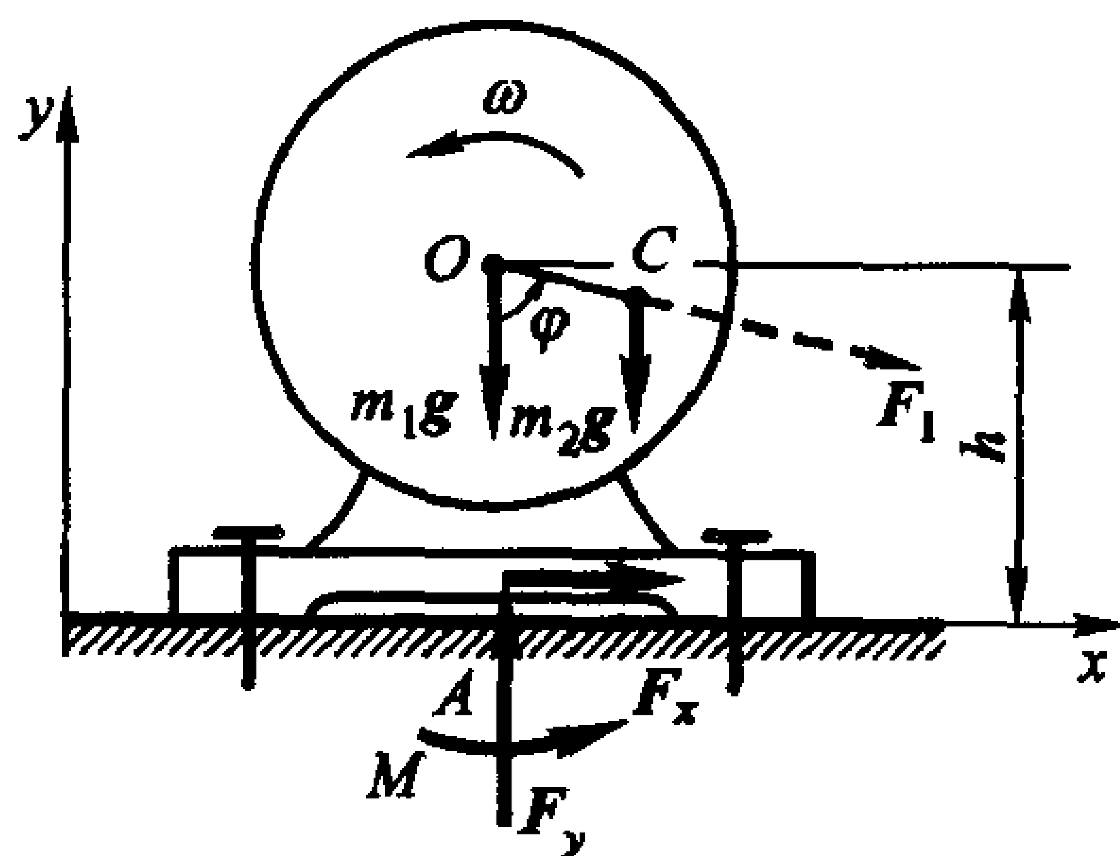


图 14-9

例 14-5　如图 14-9 所示，电动机定子及其外壳总质量为 m_1，质心位于 O 处。转子的质量为 m_2，质心位于 C 处，偏心距 $OC=e$，图示平面为转子的质量对称平面。电动机用地脚螺钉固定于水平基础上，转轴 O 与水平基础间的距离为 h。运动开始时，转子质心 C 位于最低位置，转子以匀角速度 ω 转动。求基础与地脚螺钉给电动机总的约束力。

解：取电动机整体为研究对象，作用于其上的外力有重力 $m_1\boldsymbol{g}$ 与 $m_2\boldsymbol{g}$，基础与地脚螺钉给电动机的约束力向点 A 简化，得一力偶 M 与一力 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}$ 以其分力 $\boldsymbol{F}_x$，$\boldsymbol{F}_y$ 表示。定子与外壳无需加惯性力，对转子来说，由于角加速度 $\alpha=0$，无需加惯性力矩，而质心加速度为 $e\omega^2$，所以只需加惯性力 $\boldsymbol{F}_I$ 如图 14-9 所示，其大小为

$$F_I=me\omega^2$$

根据质点系的达朗贝尔原理，此电动机上的外力与惯性力形成一个平衡力系，列平衡方程

$$\sum F_x=0\qquad F_x+F_I\sin\varphi=0$$

$$\sum F_y=0\qquad F_y-(m_1+m_2)g-F_I\cos\varphi=0$$

$$\sum M_A=0\qquad M-m_2ge\sin\varphi-F_Ih\sin\varphi=0$$

因 $\varphi=\omega t$，解上述方程组，得

$$F_x=-m_2e\omega^2\sin\omega t,F_y=(m_1+m_2)g+m_2e\omega^2\cos\omega t,M=m_2ge\sin\omega t+m_2e\omega^2h\sin\omega t$$

例 14-6　如图 14-10 所示，电动绞车安装在梁上，梁的两端搁在支座上，绞车与梁共重为 $\boldsymbol{P}$。绞盘半径为 R，与电机转子固结在一起，转动惯量为 J，质心位于 O 处。绞车以加

速度 a 提升质量为 m 的重物，其他尺寸如图。求支座 A，B 受到的附加约束力。

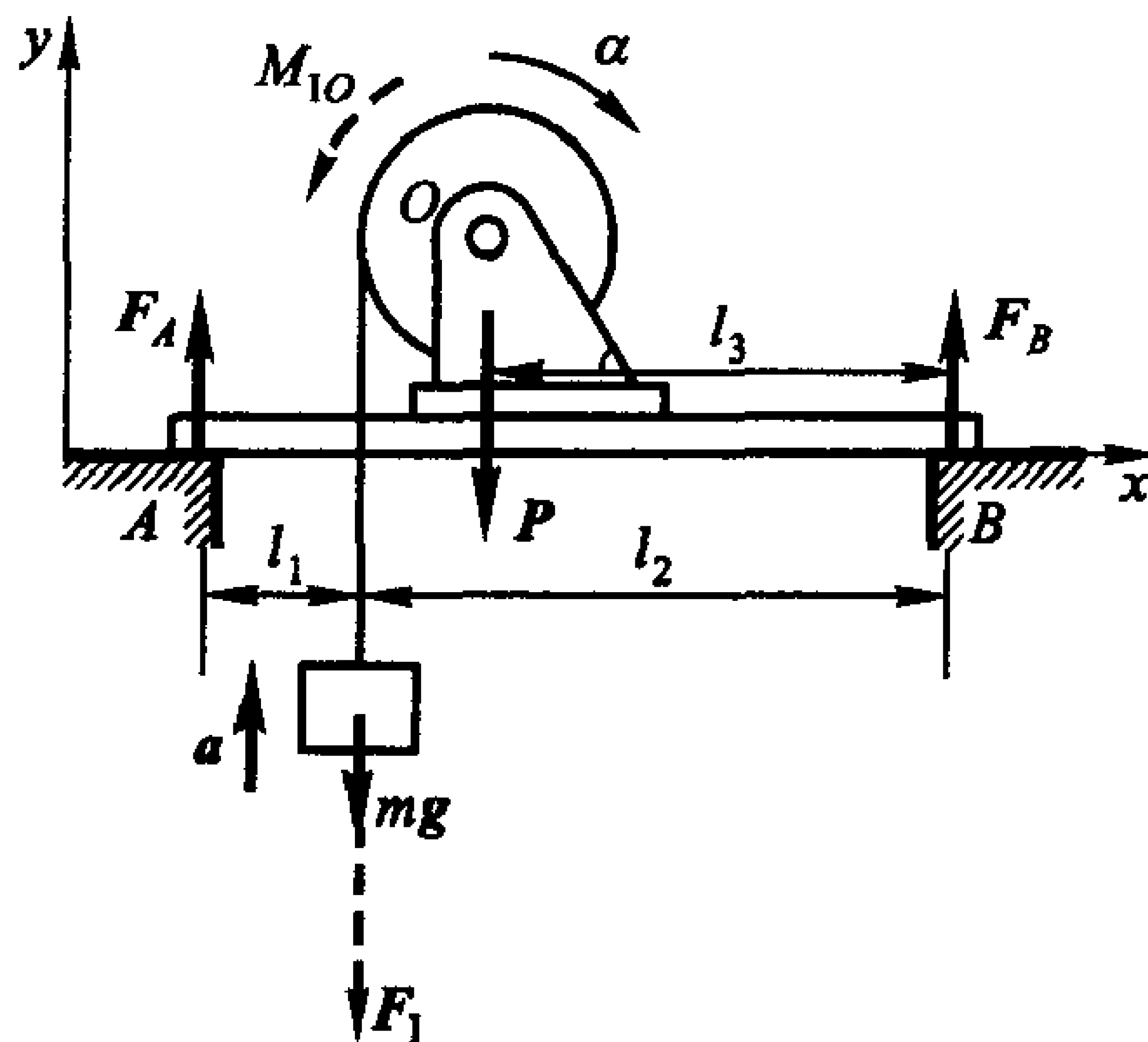


图 14－10

解：取整个系统为研究对象，作用于质点系的外力有重力 mg，P 及支座 A，B 对梁的法向约束力 F_A，F_B（没画支座处摩擦力或者忽略支座处摩擦力）。重物作平移，加惯性力如图 14－10 所示，其大小为

$$F_1 = ma$$

绞盘与电机转子共同绕 O 转动，由于质心位于转轴上，所以只有惯性力矩，其大小为

$$M_{1O} = J\alpha = J\frac{a}{R}$$

方向如图 14－10 所示。

由质点系的达朗贝尔原理，列平衡方程

$$\sum M_B = 0, \qquad mgl_2 + F_1 l_2 + Pl_3 + M_{1O} - F_A(l_1 + l_2) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_A + F_B - mg - P - F_1 = 0$$

解得

$$F_A = \frac{1}{l_1 + l_2}\left[mgl_2 + Pl_3 + a\left(ml_2 + \frac{J}{R} \right) \right]$$

$$F_B = \frac{1}{l_1 + l_2}\left[mgl_1 + P(l_1 + l_2 - l_3) + a\left(ml_1 - \frac{J}{R} \right) \right]$$

上式中前两项为支座静约束力，因此支座 A，B 受到的附加压力为

$$F'_A = \frac{a}{l_1 + l_2}\left(ml_2 + \frac{J}{R} \right) \qquad F'_B = \frac{a}{l_1 + l_2}\left(ml_1 - \frac{J}{R} \right)$$

附加压力(或附加动约束力)决定于惯性力系，只求附加压力时，列方程时可以不考虑惯性力以外的其他力。

例 14－7　均质圆盘质量为 m_1，半径为 R。均质细长杆长 $l = 2R$，质量为 m_2。杆端 A 与轮心为光滑铰接，如图 14－11a 所示。如在 A 处加一水平拉力 F，使轮沿水平面纯滚动。问：力 F 为多大方能使杆的 B 端刚好离开地面？又为保证纯滚动，轮与地面间的静滑动摩擦因数应为多大？

解：细杆刚好离开地面时仍为平移，则地面约束力为零，设其加速度为 a，取杆为研究对象，杆承受的力并加上惯性力如图 14－11b 所示，其中 $F_{IC} = m_2 a$。按达朗贝尔原理列平衡方程

$$\sum M_A = 0 \qquad m_2 aR\sin 30^\circ - m_2 gR\cos 30^\circ = 0$$

解出

$$a = \sqrt{3}g$$

取整体为研究对象，承受的力并加上惯性力如图 14－11a 所示，其中

$$F_{IA} = m_1 a, \quad M_{IA} = \frac{1}{2}m_1 R^2 \frac{a}{R}$$

由　$\sum M_D = 0 \qquad FR - F_{IA}R - M_{IA} - F_{IC}R\sin 30^\circ - m_2 gR\cos 30^\circ = 0$

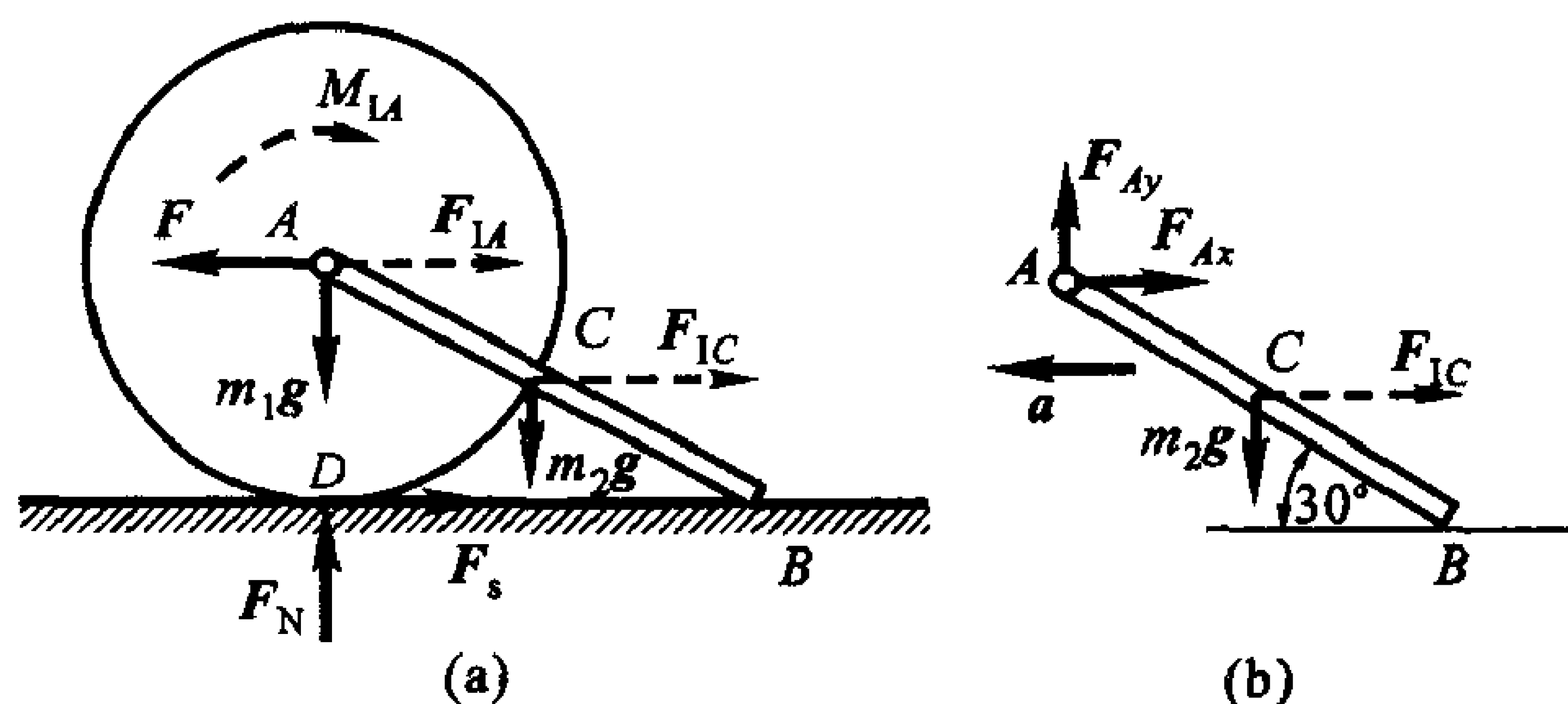


图 14-11

解得

$$F=\left(\frac{3}{2}m_1+m_2\right)\sqrt{3}g$$

由　$\sum F_x=0$　　$F-F_s-(m_1+m_2)a=0$

解出

$$F_s=\frac{\sqrt{3}}{2}m_1 g$$

而

$$F_s\leqslant f_s F_N=f_s(m_1+m_2)g$$

解得

$$f_s\geqslant\frac{F_s}{F_N}=\frac{\sqrt{3}m_1}{2(m_1+m_2)}$$

由以上例题可见,用动静法求解动力学问题的步骤与求解静力学平衡问题相似,只是在分析物体受力时,应再加上相应的惯性力;对于刚体,则应按其运动形式的不同,加上相应惯性力系的简化结果。为计算方便,加惯性力时,主矢与主矩的方向在图上最好与加速度 $\boldsymbol{a}$ 及角加速度 α 反向,而列出的惯性力的表达式只表示大小,在实际计算时,按图示方向考虑正负即可,而不用再加负号了。

§14-4　绕定轴转动刚体的轴承动约束力

在日常生活和工程实际中,有大量绕定轴转动的刚体(电动机、柴油机、电风扇、车床主轴等等),如何使这些机械在转动时不产生破坏、振动与噪声,是工程师相当关心的问题。如果这些机械在转动起来之后轴承受力与不转时轴承受力一样,则一般说来这些机械不会产生破坏,也不会产生振动与噪声。从理论上讲从而也在实践上,这一点是能够做到的。由前面已知静约束力与动约束力的概念,对绕定轴转动的刚体,如果能够消除轴承动约束力,使轴承只受到静约束力作用,就可以做到这一点。为此,先把任意一个绕定轴转动刚体的轴承全约束力(包括静约束力与动约束力)求出来,然后再推出消除动约束力的条件。

设任一刚体绕轴 AB 定轴转动,角速度为 ω,角加速度为 α,取此刚体为研究对象,转轴上一点 O 为简化中心,其上所有的主动力向 O 点简化的主矢与主

矩以$\boldsymbol{F}_R$与$\boldsymbol{M}_O$表示,惯性力系向O点简化的主矢与主矩以$\boldsymbol{F}_{IR}$与$\boldsymbol{M}_{IO}$表示(注意$\boldsymbol{F}_{IR}$没有沿z方向的分量),轴承A,B处的五个全约束力分别以$\boldsymbol{F}_{Ax},\boldsymbol{F}_{Ay},\boldsymbol{F}_{Bx},\boldsymbol{F}_{By},\boldsymbol{F}_{Bz}$表示,均如图14-12所示。

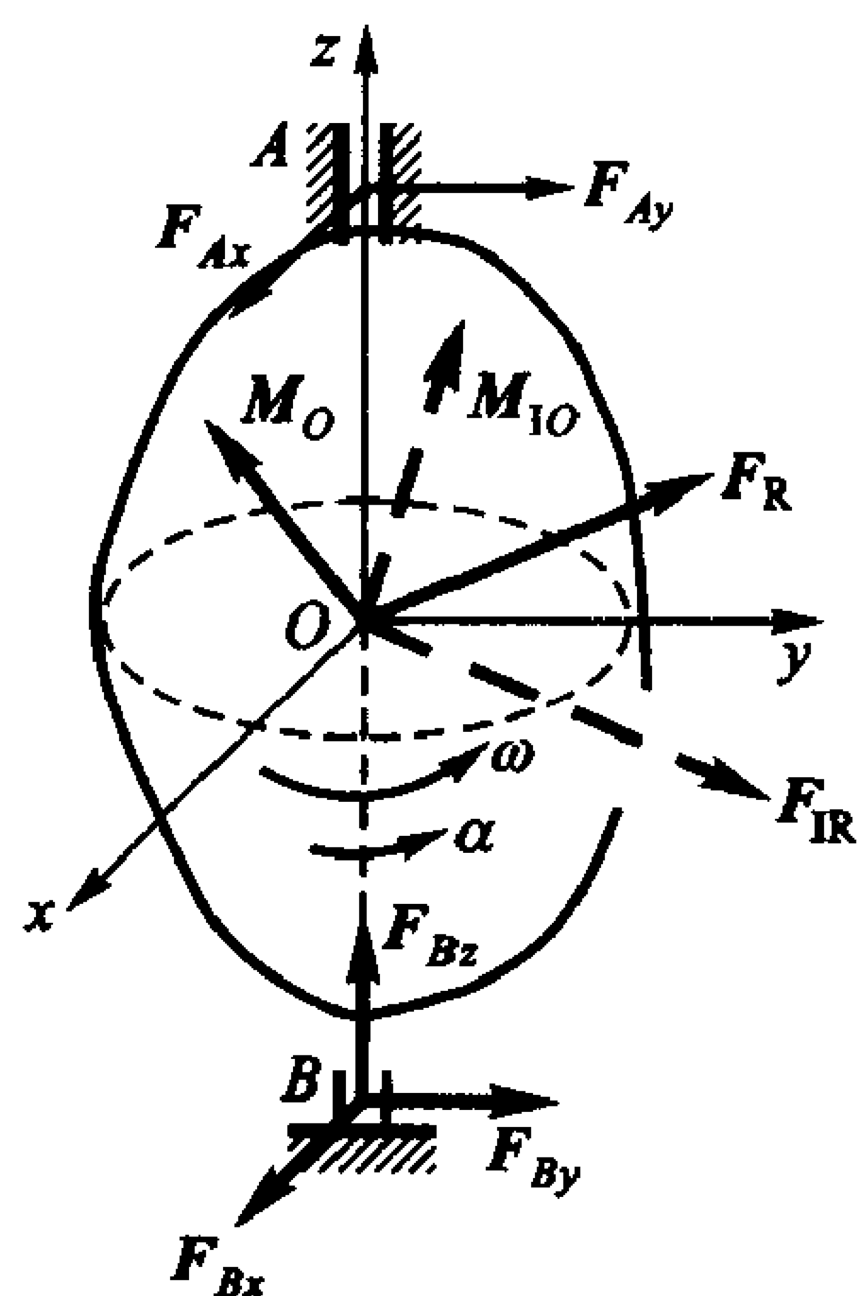


图 14-12

为求出轴承A,B处的全约束力,建立坐标系如图14-12所示,根据质点系的动静法。这形成一个空间任意平衡力系,列平衡方程如下

$$\sum F_x=0 \quad F_{Ax}+F_{Bx}+F_{rx}+F_{Ix}=0$$
$$\sum F_y=0 \quad F_{Ay}+F_{By}+F_{ry}+F_{Iy}=0$$
$$\sum F_z=0 \quad F_{Bz}+F_{rz}=0$$
$$\sum M_x=0 \quad F_{By}\cdot OB-F_{Ay}\cdot OA+M_x+M_{Ix}=0$$
$$\sum M_y=0 \quad F_{Ax}\cdot OA-F_{Bx}\cdot OB+M_y+M_{Iy}=0$$

由上述5个方程解得轴承全约束力为

$$\left.\begin{aligned}
F_{Ax}&=-\frac{1}{AB}[(M_y+F_{rx}\cdot OB)+(M_{Iy}+F_{Ix}\cdot OB)]\\
F_{Ay}&=\frac{1}{AB}[(M_x-F_{ry}\cdot OB)+(M_{Ix}-F_{Iy}\cdot OB)]\\
F_{Bx}&=\frac{1}{AB}[(M_y-F_{rx}\cdot OA)+(M_{Iy}-F_{Ix}\cdot OA)]\\
F_{By}&=-\frac{1}{AB}[(M_x+F_{ry}\cdot OA)+(M_{Ix}+F_{Iy}\cdot OA)]\\
F_{Bz}&=-F_{rz}
\end{aligned}\right\} \tag{14-13}$$

由于惯性力没有沿z轴方向的分量,所以止推轴承B沿z轴的约束力$\boldsymbol{F}_{Bz}$与惯性力无关,而与z轴垂直的轴承约束力$\boldsymbol{F}_{Ax},\boldsymbol{F}_{Ay},\boldsymbol{F}_{Bx},\boldsymbol{F}_{By}$显然与惯性力系的主矢$\boldsymbol{F}_{IR}$与主矩$\boldsymbol{M}_{IO}$有关。由于$\boldsymbol{F}_{IR},\boldsymbol{M}_{IO}$引起的轴承约束力称为动约束力,要使动约束力等于零,必须有

$$F_{Ix}=F_{Iy}=0 \qquad M_{Ix}=M_{Iy}=0$$

即要使轴承动约束力等于零的条件是:惯性力系的主矢等于零,惯性力系对于x轴和y轴的主矩等于零。

由式(14-5)和式(14-8),(14-9),应有

$$F_{Ix}=-ma_{Cx}=0, \quad F_{Iy}=-ma_{Cy}=0$$
$$M_{Ix}=J_{xz}\alpha-J_{yz}\omega^2=0, \quad M_{Iy}=J_{yz}\alpha+J_{xz}\omega^2=0$$

由此可见,要使惯性力系的主矢等于零,必须有$\boldsymbol{a}_C=0$,即转轴必须通过质心。而要使$M_{Ix}=0,M_{Iy}=0$,必须有$J_{xz}=J_{yz}=0$,即刚体对于转轴z的惯性积必须

等于零。

于是得结论，刚体绕定轴转动时，避免出现轴承动约束力的条件是：转轴通过质心，刚体对转轴的惯性积等于零。

如果刚体对于通过某点的 z 轴的惯性积 J_{xz} 和 J_{yz} 等于零，则称此轴为过该点的惯性主轴。通过质心的惯性主轴，称为中心惯性主轴。所以上述结论也可叙述为：避免出现轴承动约束力的条件是，刚体的转轴应是刚体的中心惯性主轴。

设刚体的转轴通过质心，且刚体除重力外，没有受到其他主动力作用，则刚体可以在任意位置静止不动，称这种现象为**静平衡**。当刚体的转轴通过质心且为惯性主轴时，刚体转动时不出现轴承动约束力，称这种现象为**动平衡**。能够静平衡的定轴转动刚体不一定能够实现动平衡，但能够动平衡的定轴转动刚体肯定能够实现静平衡。

事实上，由于材料的不均匀或制造、安装误差等原因，都可能使定轴转动刚体的转轴偏离中心惯性主轴。为了避免出现轴承动约束力，确保机器运行安全可靠，在有条件的地方，可在专门的静平衡与动平衡试验机上进行静、动平衡试验，根据试验数据，在刚体的适当位置附加一些质量或去掉一些质量，使其达到静、动平衡。静平衡试验机可以调整质心在转轴上或尽可能地在转轴上，动平衡试验机可以调整对转轴的惯性积，使其对转轴的惯性积为零或尽可能地为零。

当然，在工程中也有相反的实例，即制造定轴转动刚体时，故意制造出偏心距，如某些打夯机，正是利用偏心块的运动来夯实地基的，这种情况另当别论。

例 14-8 如图 14-13 所示，轮盘(连同轴)的质量 $m=20$ kg，转轴 AB 与轮盘的质量对称面垂直，但轮盘的质心 C 不在转轴上，偏心距 $e=0.1$ mm。当轮盘以匀转速 $n=12\ 000$ r/min转动时，求轴承 A，B 的约束力。

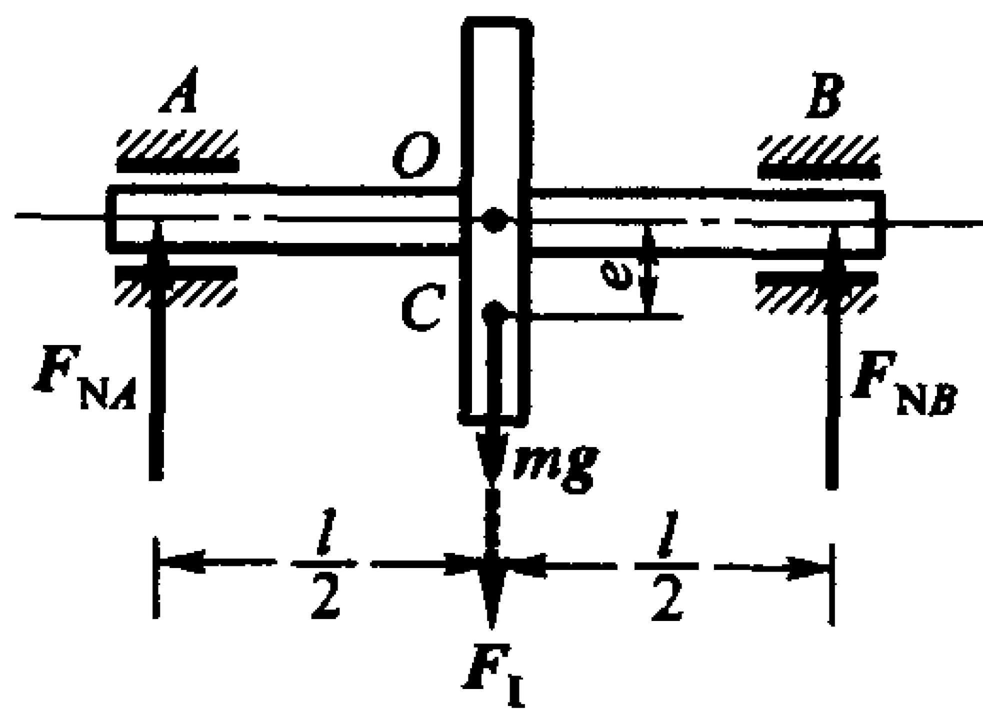


图 14-13

解：由于转轴 AB 与轮盘的质量对称面垂直，所以转轴 AB 为惯性主轴，即对此轴的惯性积为零，又由于是匀速转动，$\alpha=0$，所以惯性力矩均为零，取此刚体为研究对象，当重心 C 位于最下端时，轴承处约束力最大，受力图如图 14-13 所示，由于轮盘为匀速转动，质心 C 只有法向加速度

$$a_n = e\omega^2 = \frac{0.1}{1\ 000}\ \text{m} \times \left(\frac{12\ 000\ \pi}{30}\text{1/s}\right)^2 = 158\ \text{m/s}^2$$

因此惯性力大小为

$$F_I^n = ma_n = 3\ 160\ \text{N}$$

方向如图 14-13 所示。

由质点系的动静法，列平衡方程可得

$$F_{NA}=F_{NB}=\frac{1}{2}(mg+F_I^n)=\frac{1}{2}\times(20\times9.81+3\ 160)\text{N}=1\ 680\text{ N}$$

其中轴承动约束力为$\frac{1}{2}F_I^n=1\ 580$ N。由此可见,在高速转动下,0.1 mm 的偏心距所引起的轴承动约束力,可达静约束力$\frac{1}{2}mg=98$ N 的 16 倍之多! 而且转速越高,偏心距越大,轴承动约束力越大,这势必使轴承磨损加快,甚至引起轴承的破坏。再者,注意到惯性力 F_I^n 的方向随刚体的旋转而周期性的变化,使轴承动约束力的大小与方向也发生周期性的变化,因而势必引起机器的振动与噪声,同样会加速轴承的磨损与破坏。因此,必须尽量减小与消除偏心距。

对此题,设系统质心位于转轴上,由于安装误差,轮盘盘面与转轴成角 $\theta=1^\circ$,轮盘为均质圆盘,半径为 200 mm,厚度为 20 mm,l 为 1 m,轮盘质量与转速不变。可求得此时静约束力仍为 98 N,但动约束力为 5 493 N(计算略,有兴趣的读者可以计算),是静约束力的 56 倍之多,这对轴承受力是相当不利的,所以应尽量减少安装误差。

小　　结

1. 设质点的质量为 m,加速度为 $\boldsymbol{a}$,则质点的惯性力 $\boldsymbol{F}_I$ 定义为

$$\boldsymbol{F}_I=-m\boldsymbol{a}$$

2. 质点的达朗贝尔原理:质点上除了作用有主动力 $\boldsymbol{F}$ 和约束力 $\boldsymbol{F}_N$ 外,如果假想地认为还作用有该质点的惯性力 $\boldsymbol{F}_I$,则这些力在形式上形成一个平衡力系,即

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_N+\boldsymbol{F}_I=0$$

3. 质点系的达朗贝尔原理:在质点系中每个质点上都假想地加上各自的惯性力 $\boldsymbol{F}_{Ii}$,则质点系的所有外力 $\boldsymbol{F}_i^{(e)}$ 和惯性力 $\boldsymbol{F}_{Ii}$,在形式上形成一个平衡力系,可以表示为

$$\sum\boldsymbol{F}_i^{(e)}+\sum\boldsymbol{F}_{Ii}=0$$

$$\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})+\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{Ii})=0$$

4. 刚体惯性力系的简化结果:

(1) 刚体平移,惯性力系向质心 C 简化,主矢与主矩为

$$\boldsymbol{F}_I=-m\boldsymbol{a}_C\qquad M_{IC}=0$$

(2) 刚体绕定轴转动,惯性力系向转轴上一点 O 简化,主矢与主矩为

$$\boldsymbol{F}_I=-m\boldsymbol{a}_C,\quad M_{IO}=M_{Ix}\boldsymbol{i}+M_{Iy}\boldsymbol{j}+M_{Iz}\boldsymbol{k}$$

其中,

$$M_{Ix}=J_{xz}\alpha-J_{yz}\omega^2\qquad M_{Iy}=J_{yz}\alpha+J_{xz}\omega^2\qquad M_{Iz}=-J_z\alpha$$

$$J_{xz}=\sum m_ix_iz_i\qquad J_{yz}=\sum m_iy_iz_i\qquad J_z=\sum m_ir_i^2$$

如果刚体有质量对称平面,且此平面与转轴 z 垂直,则惯性力系向此质量

对称平面与转轴 z 的交点 O 简化，主矢与主矩为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}} = -m\boldsymbol{a}_C \qquad M_{\mathrm{I}O} = -J_z\alpha$$

(3) 刚体作平面运动，若此刚体有一质量对称平面且此平面作同一平面运动，惯性力系向质心 C 简化，主矢和主矩为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}} = -m\boldsymbol{a}_C \qquad M_{\mathrm{I}C} = -J_C\alpha$$

式中 J_C 为对过质心且与质量对称平面垂直的轴的转动惯量。

5. 刚体绕定轴转动，消除动约束力的条件是，此转轴是中心惯性主轴（转轴过质心且对此轴的惯性积为零）；质心在转轴上，刚体可以在任意位置静止不动，称为静平衡；转轴为中心惯性主轴，不出现轴承动约束力，称为动平衡。

思 考 题

14-1 应用动静法时，对静止的质点是否需要加惯性力？对运动着的质点是否都需要加惯性力？

14-2 质点在空中运动，只受到重力作用，当质点作自由落体运动、质点被上抛、质点从楼顶水平弹出时，质点惯性力的大小与方向是否相同？

14-3 如图 14-14 所示，均质滑轮对轴 O 的转动惯量为J_O，重物质量为 m，拉力为 $\boldsymbol{F}$，绳与轮间不打滑。当重物以等速 v 上升和下降，以加速度 a 上升和下降时，轮两边绳的拉力是否相同？

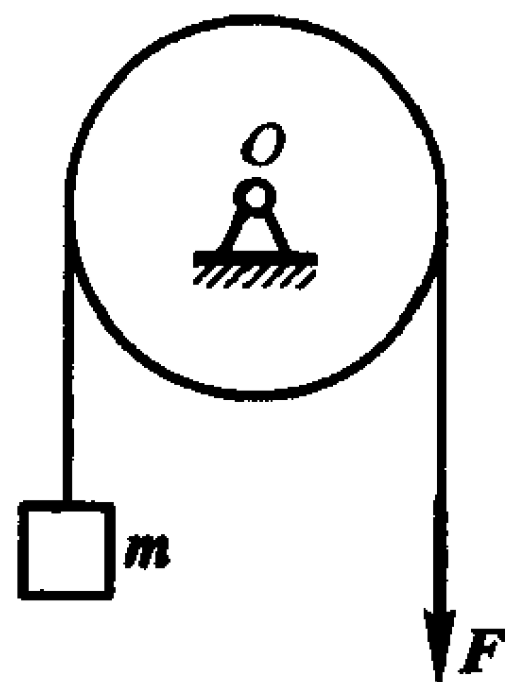


图 14-14

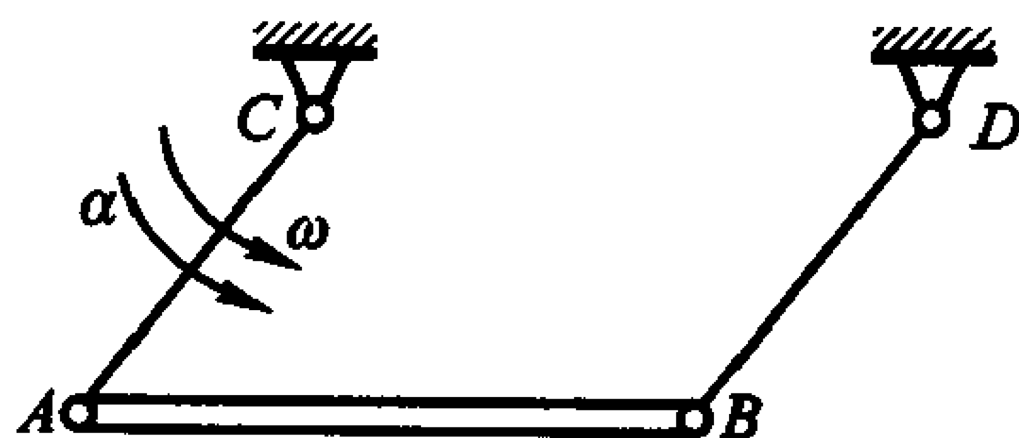


图 14-15

14-4 图 14-15 所示的平面机构中，$AC /\!/ BD$，且 $AC = BD = a$，均质杆 AB 的质量为 m，长为 l。问杆 AB 作何种运动？其惯性力系的简化结果是什么？若杆 AB 是非均质杆又如何？

14-5 任意形状的均质等厚板，垂直于板面的轴都是惯性主轴，对吗？不与板面垂直的轴都不是惯性主轴，对吗？

14-6 如图 14-16 所示，不计质量的轴上用不计质量的细杆固连着几个质量均等于 m 的小球，当轴以匀角速度 ω 转动时，图示各情况中哪些满足动平衡？哪些只满足静平衡？哪些都不满足？

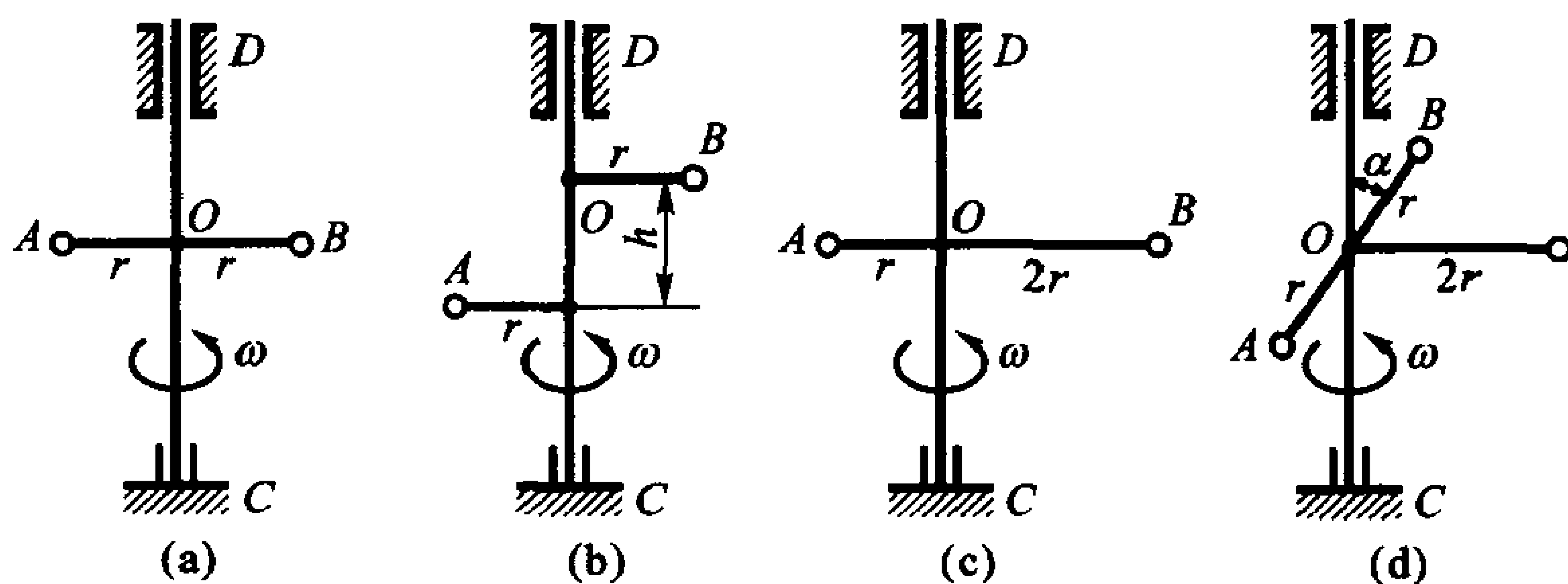
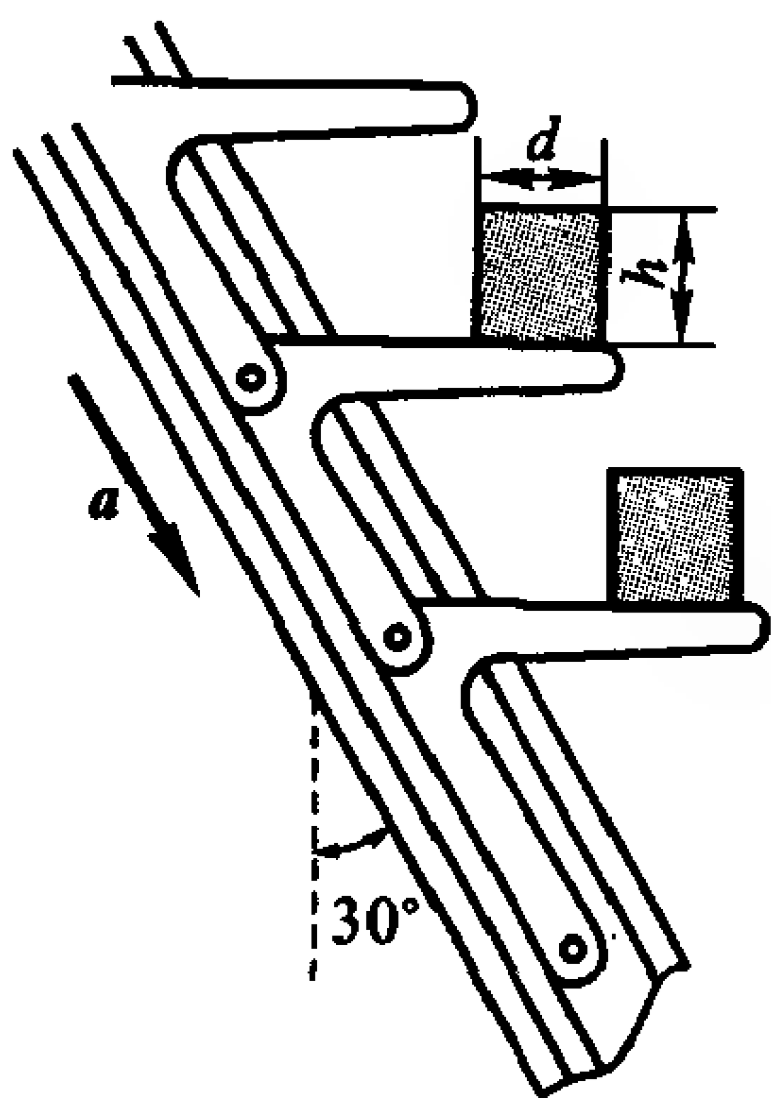


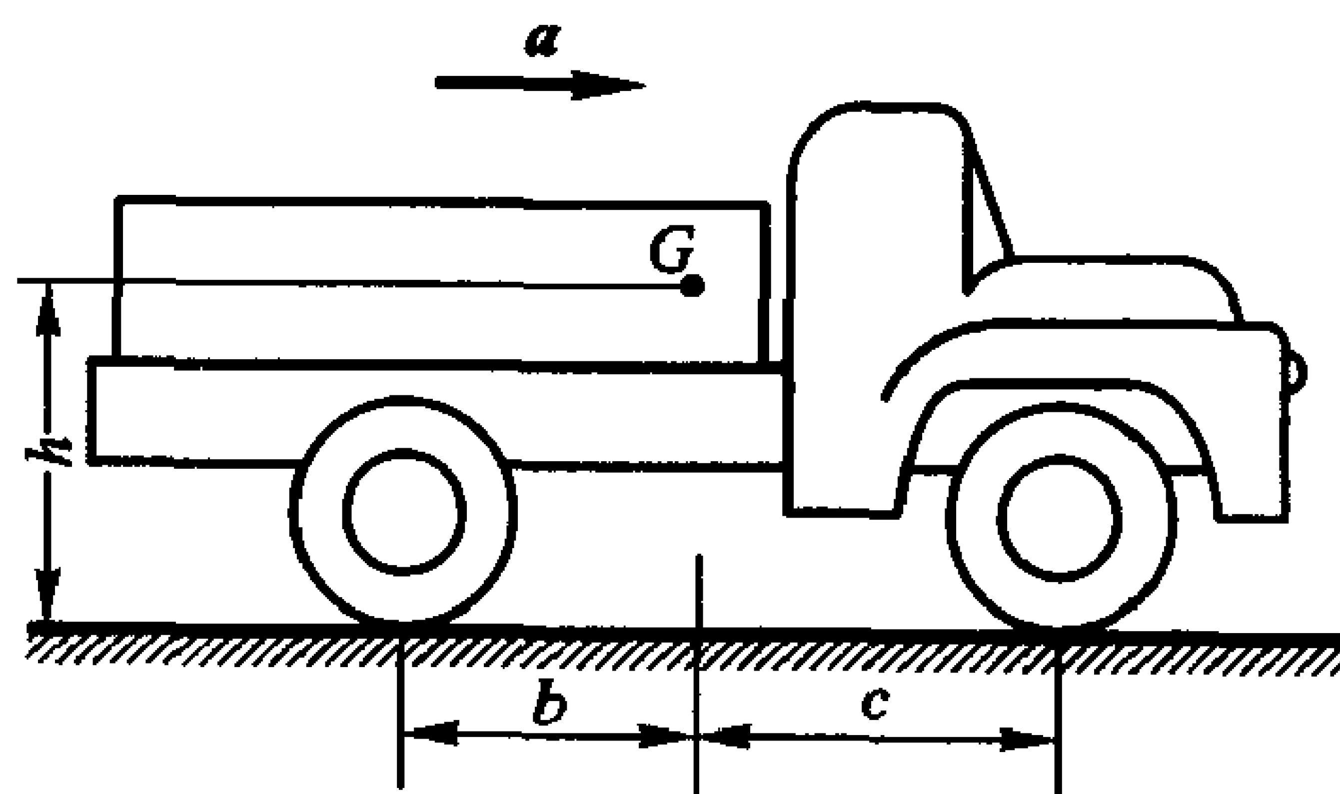
图 14－16

习 题

14－1 图示由相互铰接的水平臂连成的传送带，将圆柱形零件从一高度传送到另一个高度。设零件与臂之间的摩擦因数 $f_s = 0.2$。求：(1) 降落加速度 $\boldsymbol{a}$ 为多大时，零件不致在水平臂上滑动；(2) 在此加速度 $\boldsymbol{a}$ 下，比值 h/d 等于多少时，零件在滑动之前先倾倒。



题 14－1 图

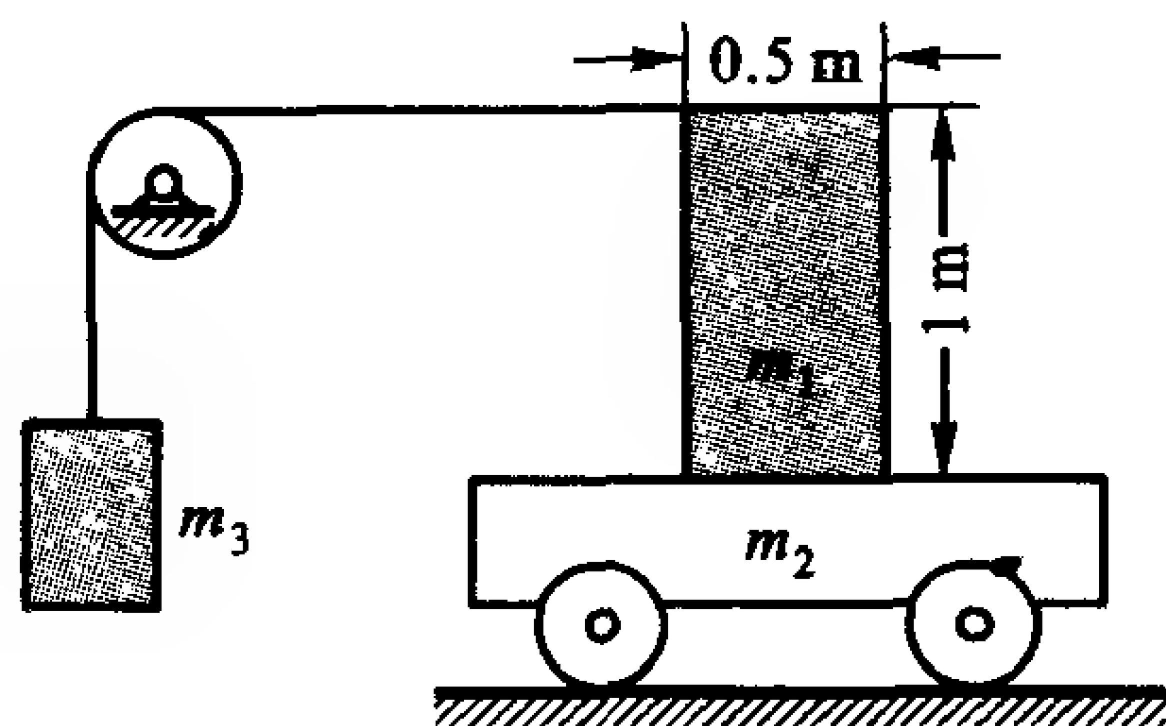


题 14－2 图

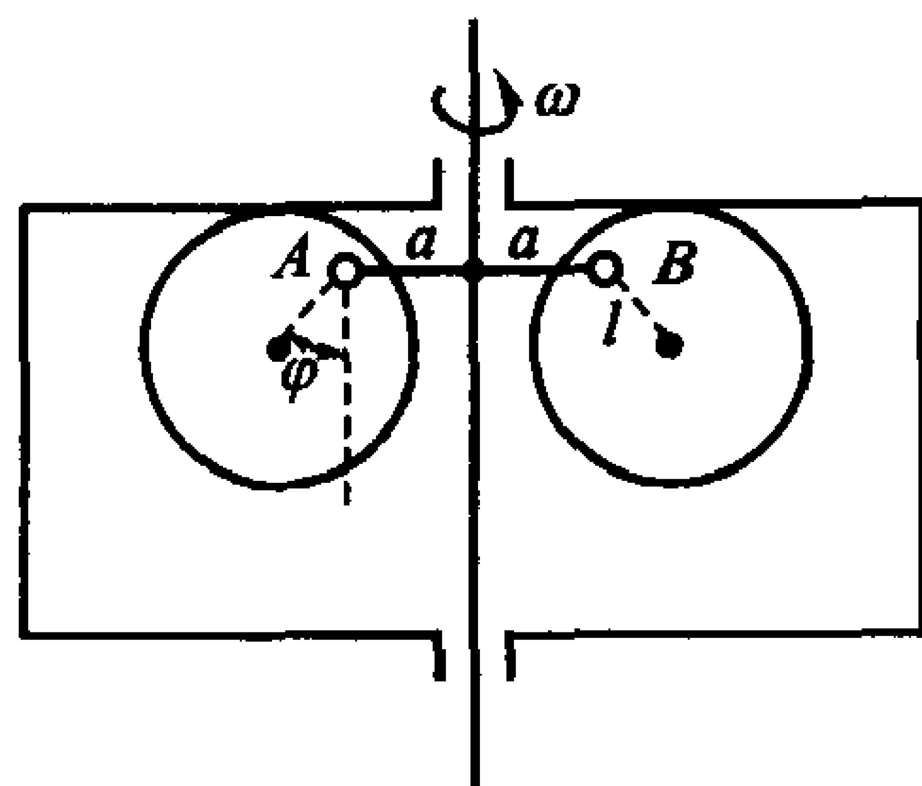
14－2 图示汽车总质量为 m，以加速度 $\boldsymbol{a}$ 作水平直线运动。汽车质心 G 离地面的高度为 h，汽车的前后轴到通过质心垂线的距离分别等于 c 和 b。求其前后轮的正压力；又，汽车应如何行驶能使前后轮的压力相等？

14－3 图示矩形块质量 $m_1 = 100\ \mathrm{kg}$，置于平台车上，车质量 $m_2 = 50\ \mathrm{kg}$，此车沿光滑的水平面运动。车和矩形块在一起由质量为 m_3 的物体牵引，使之作加速运动。设物块与车之间的摩擦力足够阻止相互滑动，求能够使车加速运动的质量 m_3 的最大值，以及此时车的加速度大小。

14－4 调速器由两个质量为 m_1 的均质圆盘构成，圆盘偏心地铰接于距转轴为 a 的 A，B 两点。调速器以等角速度 ω 绕铅直轴转动，圆盘中心到悬挂点的距离为 l。调速器的外壳质量为 m_2，并放在圆盘上。不计摩擦，求角速度 ω 与偏角 φ 之间的关系。

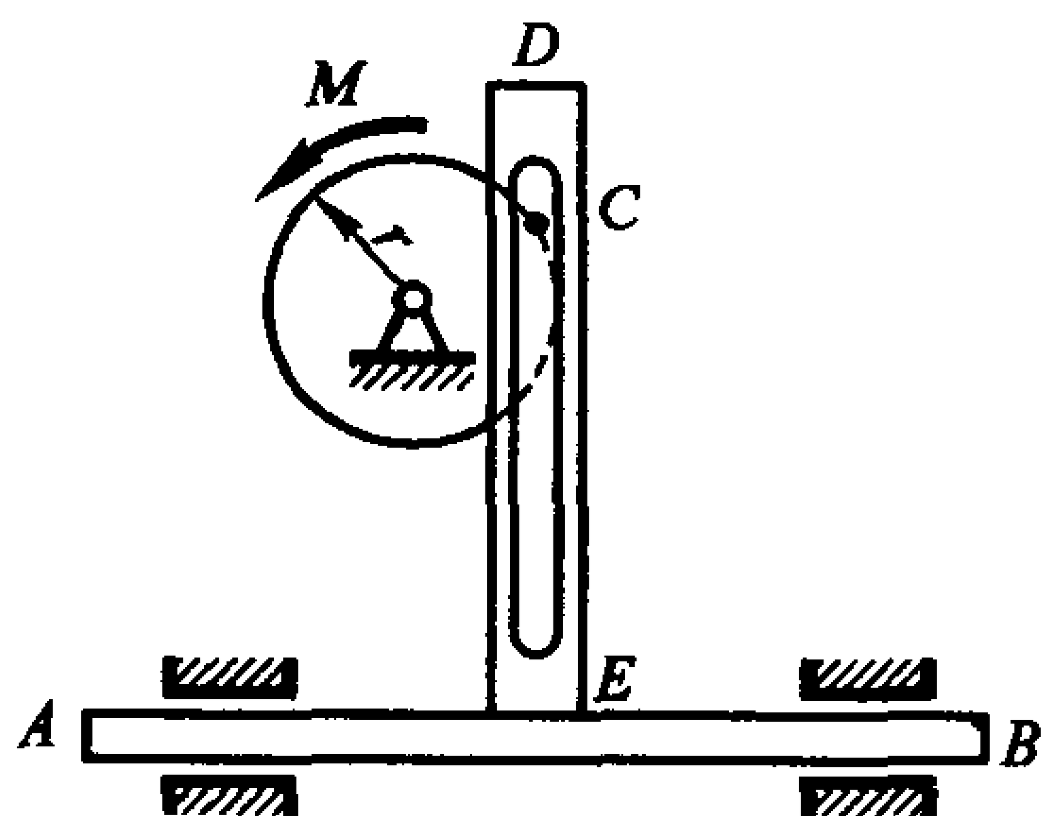


题 14－3 图

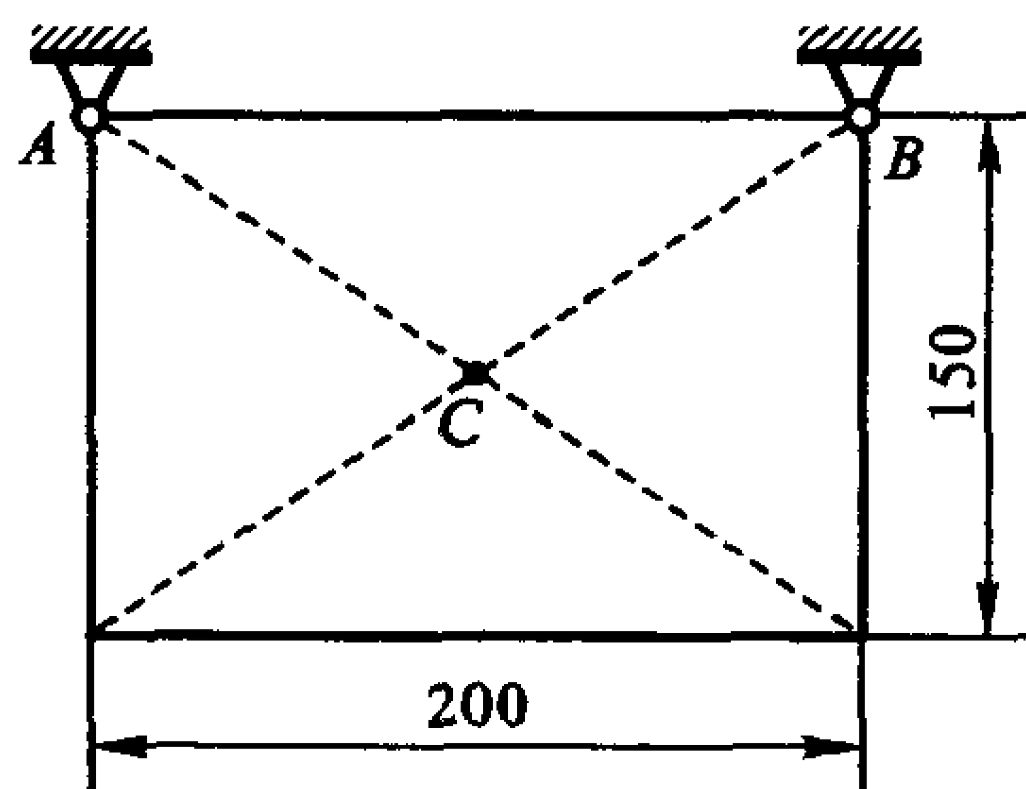


题 14－4 图

14－5　曲柄滑道机构如图所示，已知圆轮半径为 r，对转轴的转动惯量为 J，轮上作用一不变的力偶 M，ABD 滑槽的质量为 m，不计摩擦。求圆轮的转动微分方程。



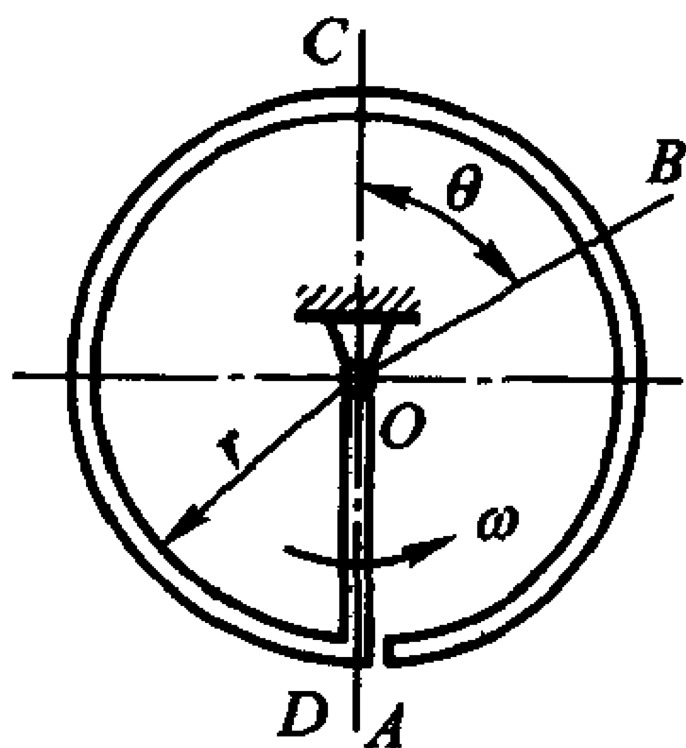
题 14－5 图



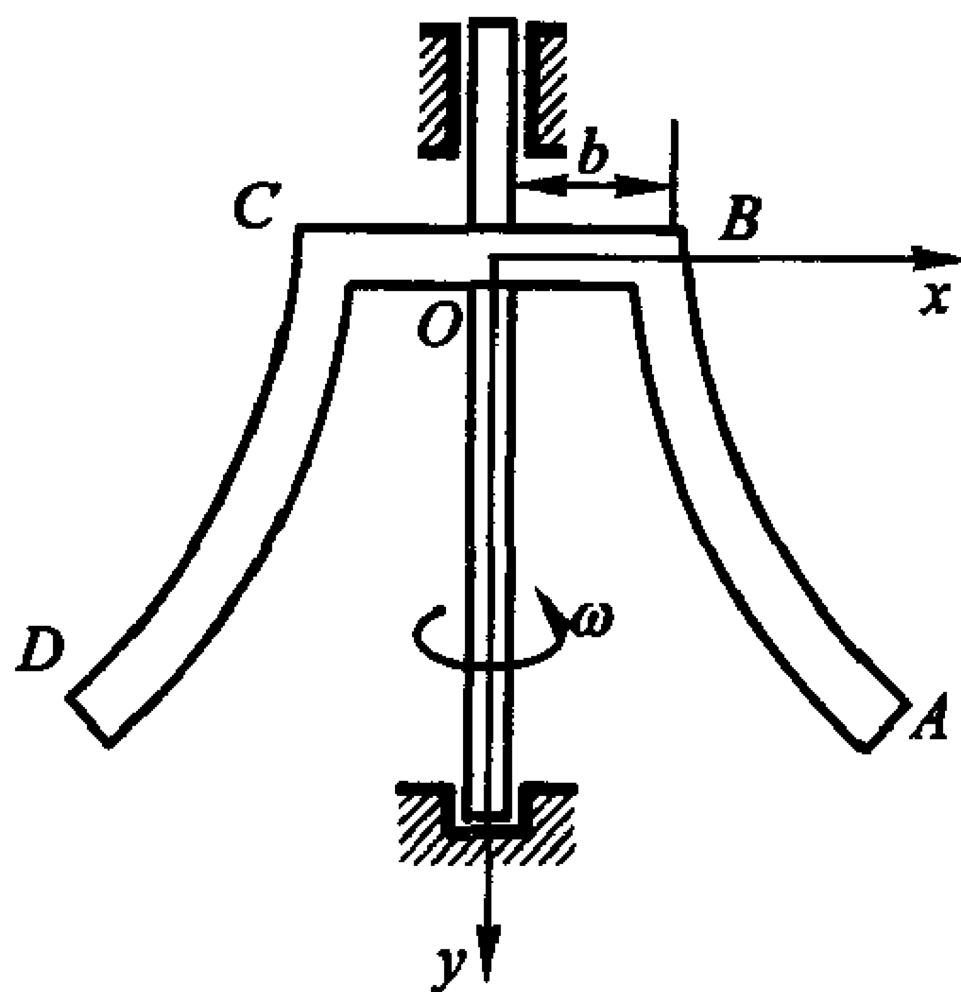
题 14－6 图

14－6　图示长方形均质平板，质量为 27 kg，由两个销 A 和 B 悬挂。如果突然撤去销 B，求在撤去销 B 的瞬时平板的角加速度和销 A 的约束力。

14－7　图示为均质细杆弯成的圆环，半径为 r，转轴 O 通过圆心垂直于环面，A 端自由，AD 段为微小缺口，设圆环以匀角速度 ω 绕轴 O 转动，环的线密度为 ρ，不计重力，求任意截面 B 处对 AB 段的约束力。



题 14－7 图

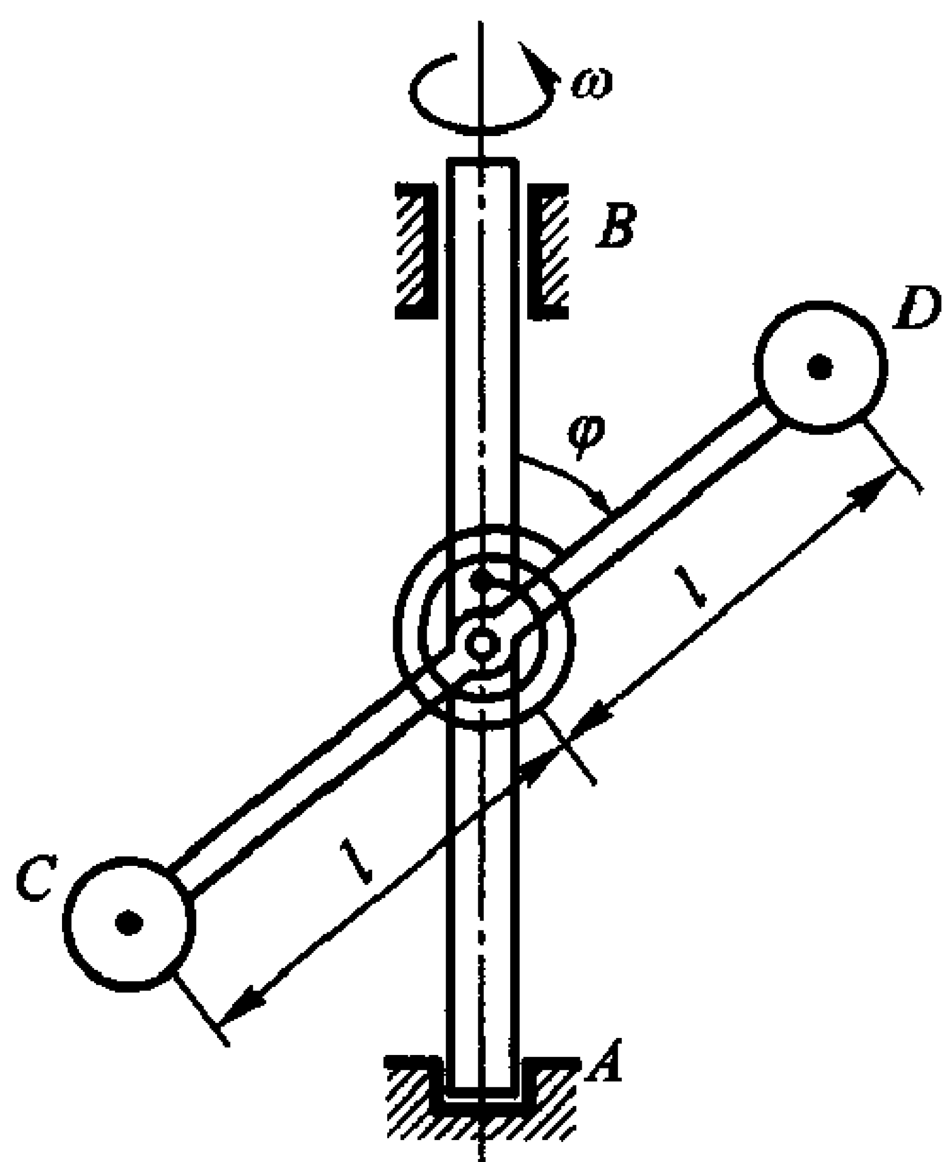


题 14－8 图

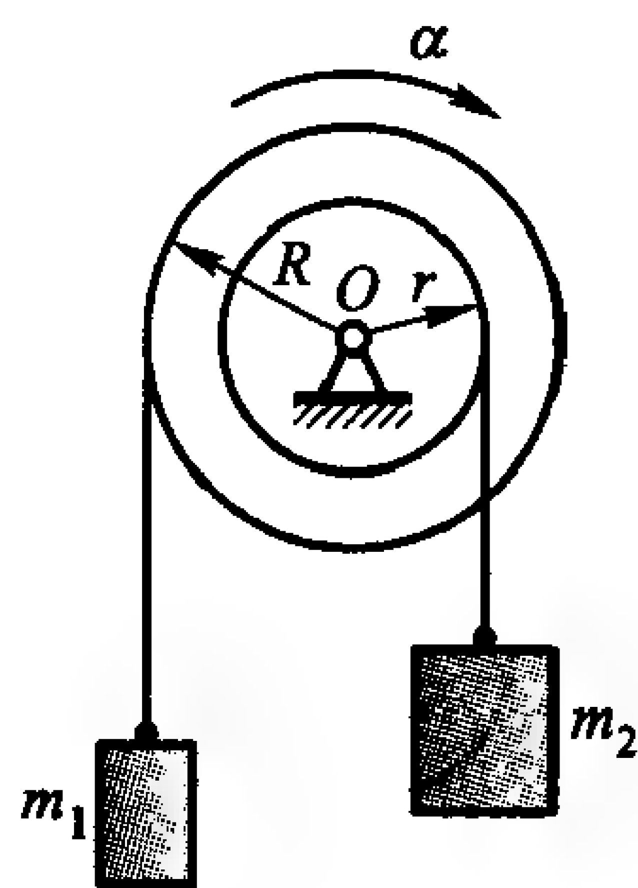
14－8　图示均质曲杆 $ABCD$，刚性地连接于铅直转轴上，已知 $CO=OB=b$。转轴以匀

角速度 ω 转动,欲使 AB 及 CD 段截面只受沿杆的轴向力,试求 AB,CD 段的曲线方程。

14-9　转速表的简化模型如图所示。杆 CD 的两端各有质量为 m 的 C 球和 D 球,杆 CD 与转轴 AB 铰接于各自的中点,质量不计。当转轴 AB 转动时,杆 CD 的转角 φ 就发生变化。设 $\omega=0$ 时,$\varphi=\varphi_0$,且盘簧中无力。盘簧产生的力矩 M 与转角 φ 的关系为 $M=k(\varphi-\varphi_0)$,式中 k 为盘簧刚度系数。轴承 A,B 间距离为 $2b$。求(1) 角速度 ω 与角 φ 的关系;(2) 当系统处于图示平面时,轴承 A,B 的约束力。



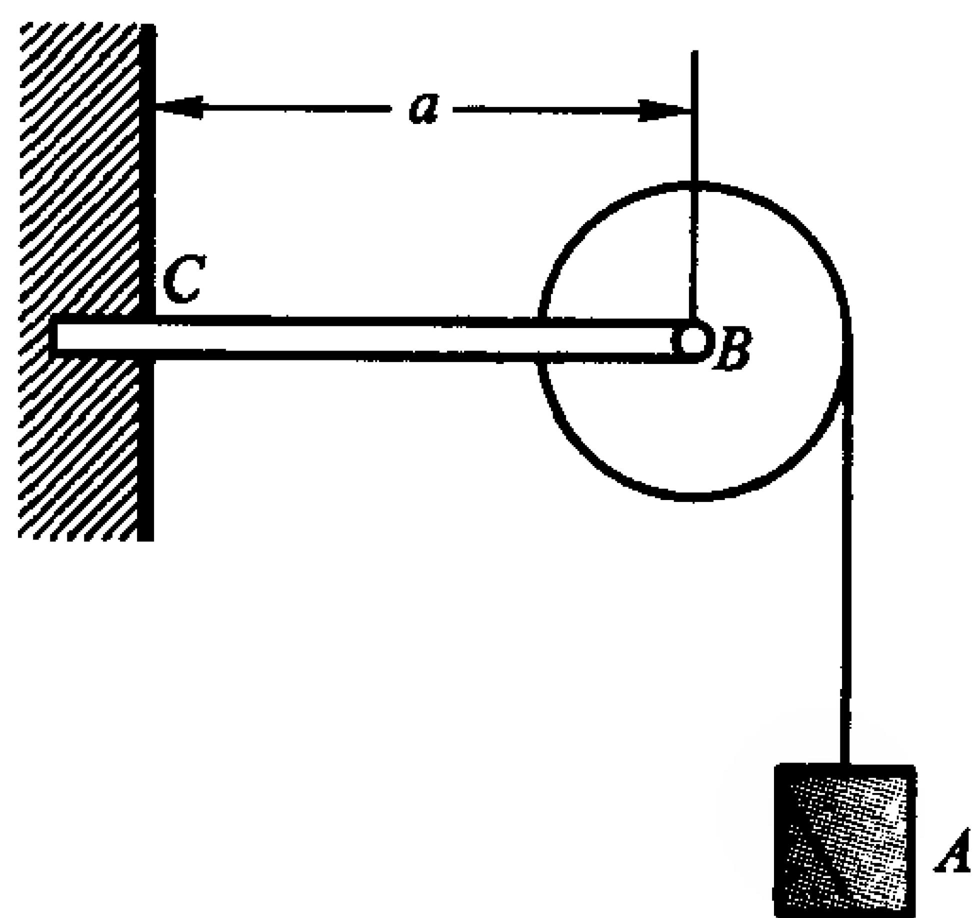
题 14-9 图



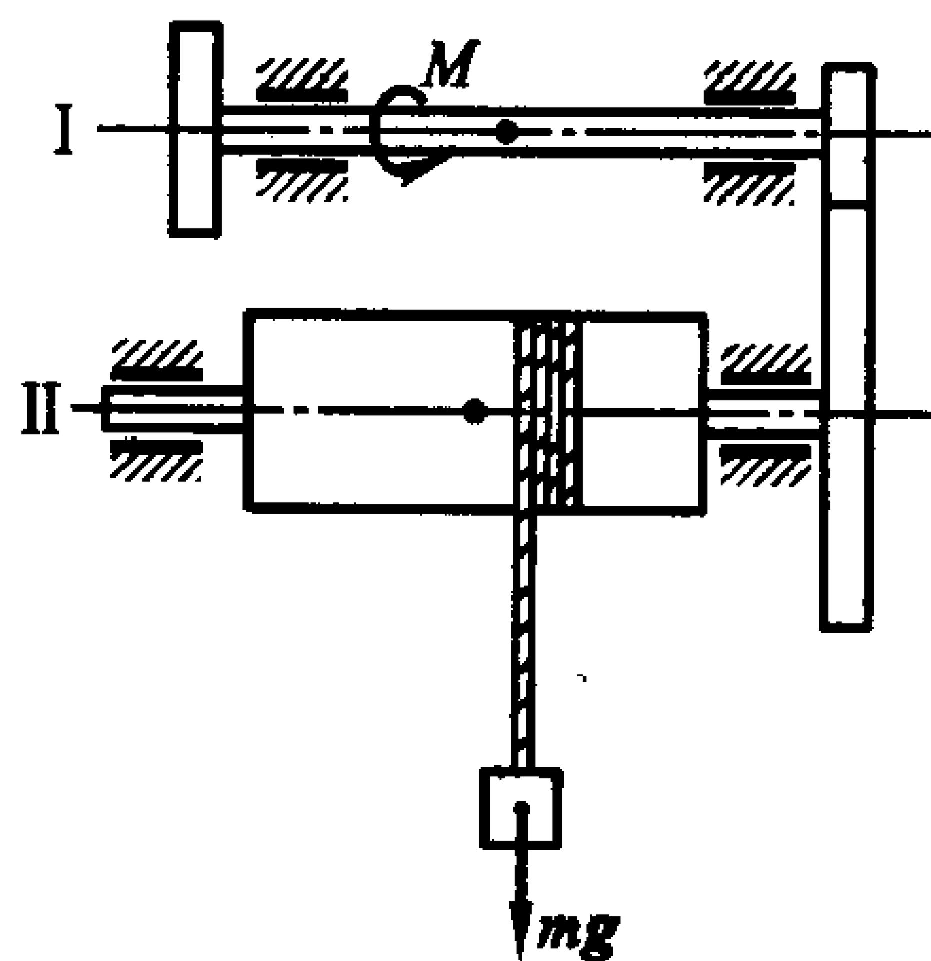
题 14-10 图

14-10　轮轴质心位于 O 处,对轴 O 的转动惯量为 J_O。在轮轴上系有两个质量各为 m_1 和 m_2 的物体,若此轮轴以顺时针转向转动,求轮轴的角加速度 α 和轴承 O 的动约束力。

14-11　如图所示,质量为 m_1 的物体 A 下落时,带动质量为 m_2 的均质圆盘 B 转动,不计支架和绳子的重量及轴上的摩擦,$BC=a$,盘 B 的半径为 R。求固定端 C 的约束力。



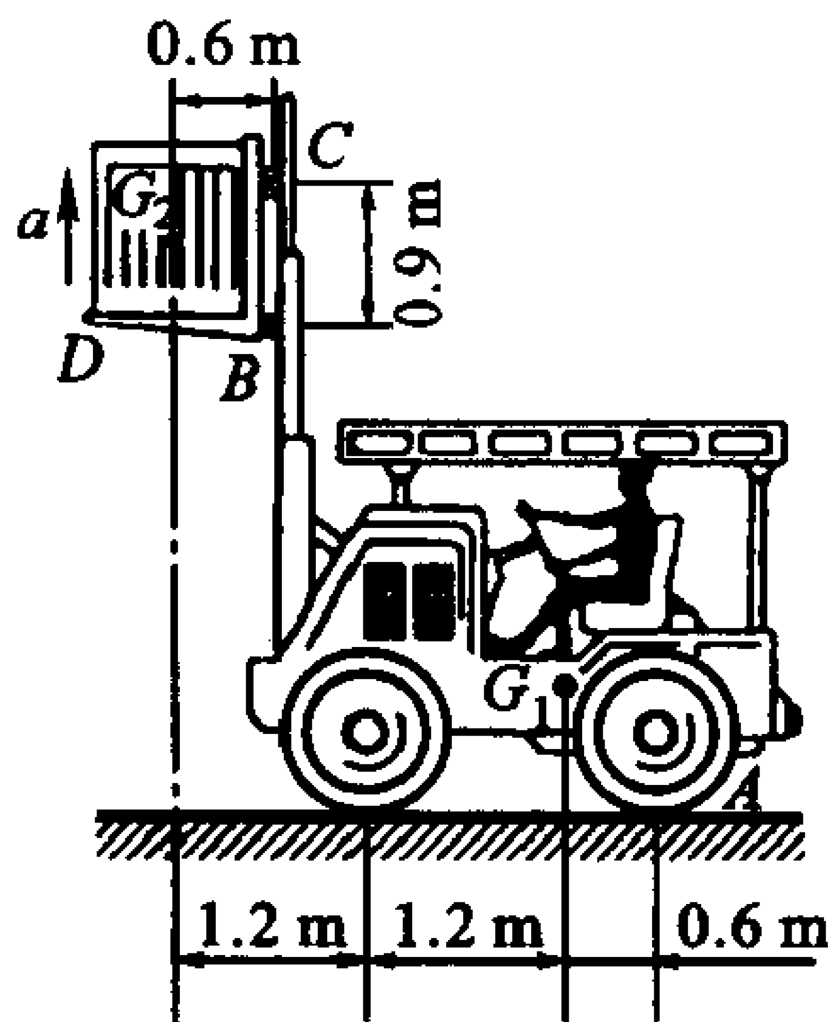
题 14-11 图



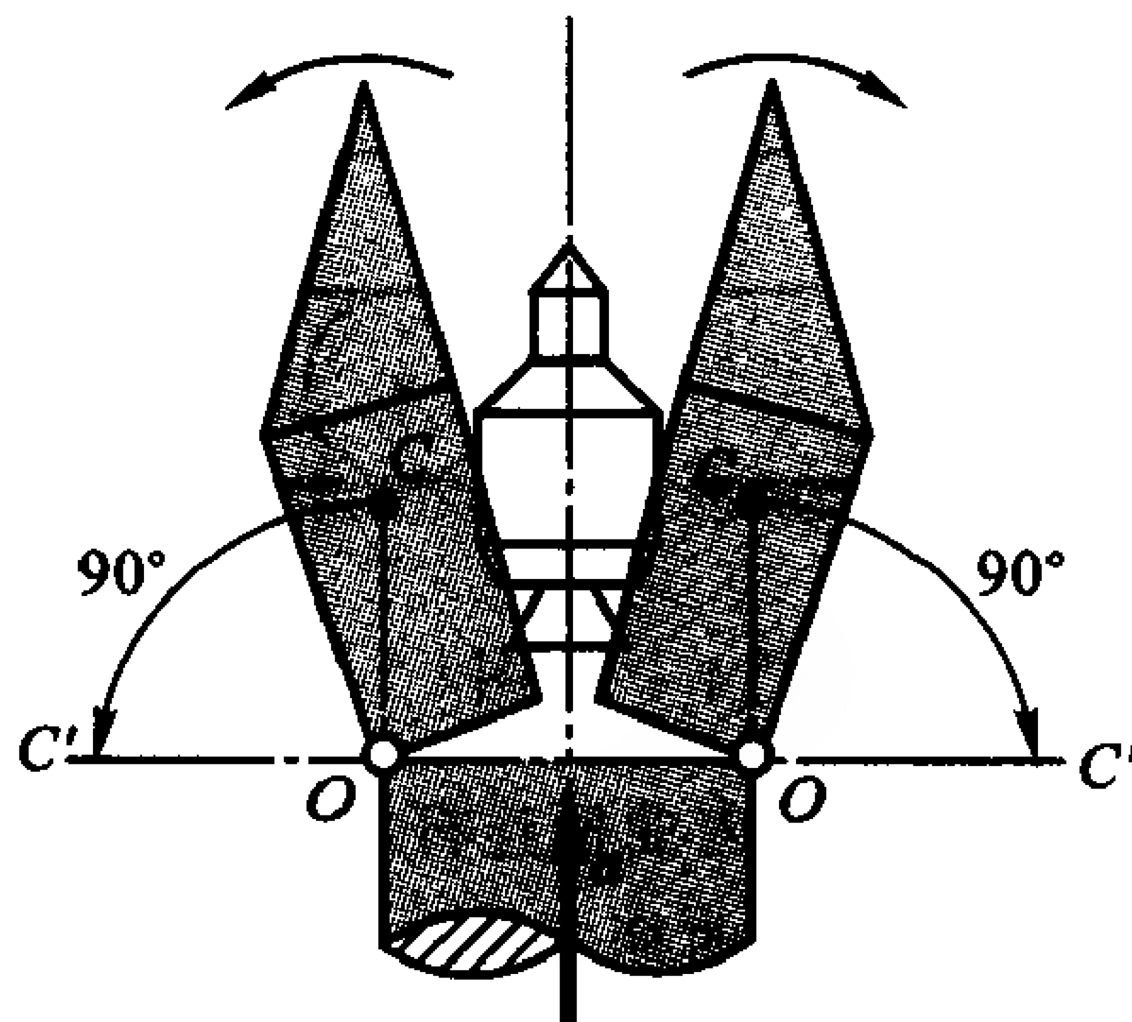
题 14-12 图

14-12　图示电动绞车提升一质量为 m 的物体,在主动轴上作用有一矩为 M 的主动力偶。已知主动轴和从动轴连同安装在这两轴上的齿轮以及其他附属零件的转动惯量分别为 J_1 和 J_2;传动比 $z_2:z_1=i$;吊索缠绕在鼓轮上,此轮半径为 R。设轴承的摩擦和吊索的质量均略去不计,求重物的加速度。

14－13　图示为升降重物用的叉车，B 为可动圆滚（滚动支座），叉头 DBC 用铰链 C 与铅直导杆连接。由于液压机构的作用，可使导杆在铅直方向上升或下降，因而可升降重物。已知叉车连同铅直导杆的质量为 1 500 kg，质心在 G_1；叉头与重物的共同质量为 800 kg，质心在 G_2。如果叉头向上的加速度使得后轮 A 的约束力等于零，求这时滚轮 B 的约束力。



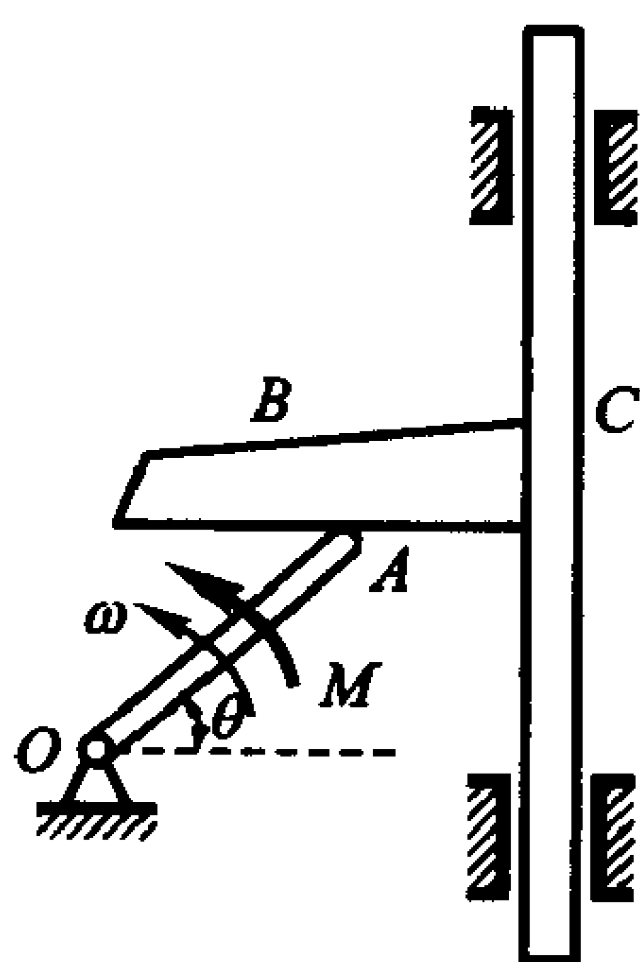
题 14－13 图



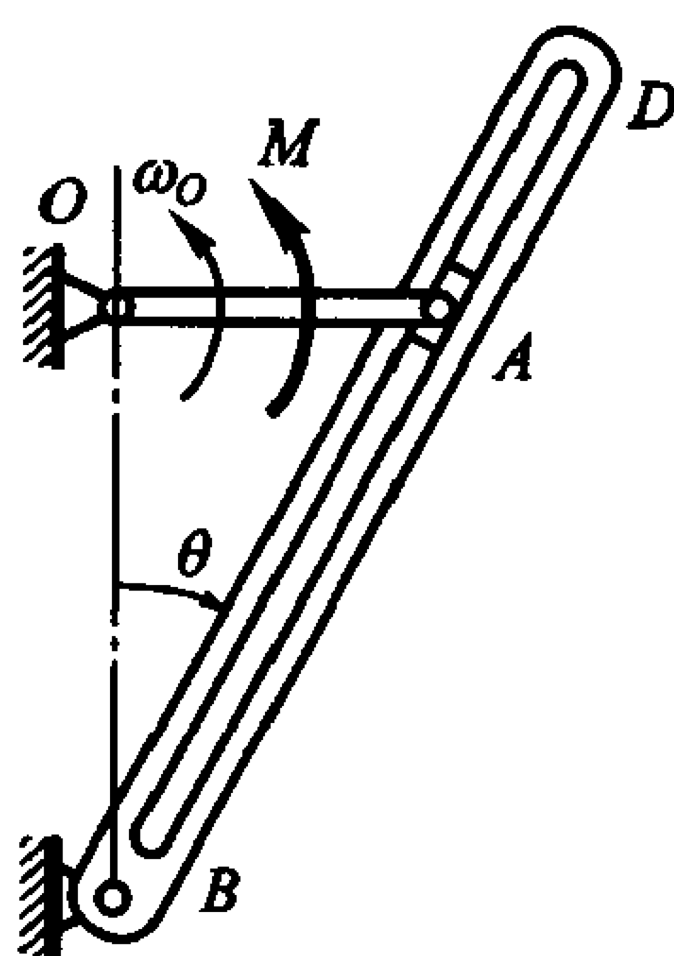
题 14－14 图

14－14　当发射卫星实现星箭分离时，打开卫星整流罩的一种方案如图所示。先由释放机构将整流罩缓慢送到图示位置，然后令火箭加速，加速度为 a，从而使整流罩向外转。当其质心 C 转到位置 C' 时，O 处铰链自动脱开，使整流罩离开火箭。设整流罩质量为 m，对轴 O 的回转半径为 ρ，质心到轴 O 的距离 $OC=r$。问整流罩脱落时，角速度为多大？

14－15　图示曲柄 OA 质量为 m_1，长为 r，以等角速度 ω 绕水平轴 O 逆时针方向转动。曲柄的 A 端推动水平板 B，使质量为 m_2 的滑杆 C 沿铅直方向运动。忽略摩擦，求当曲柄与水平方向夹角 $\theta=30^\circ$ 时的力偶矩 M 及轴承 O 的约束力。



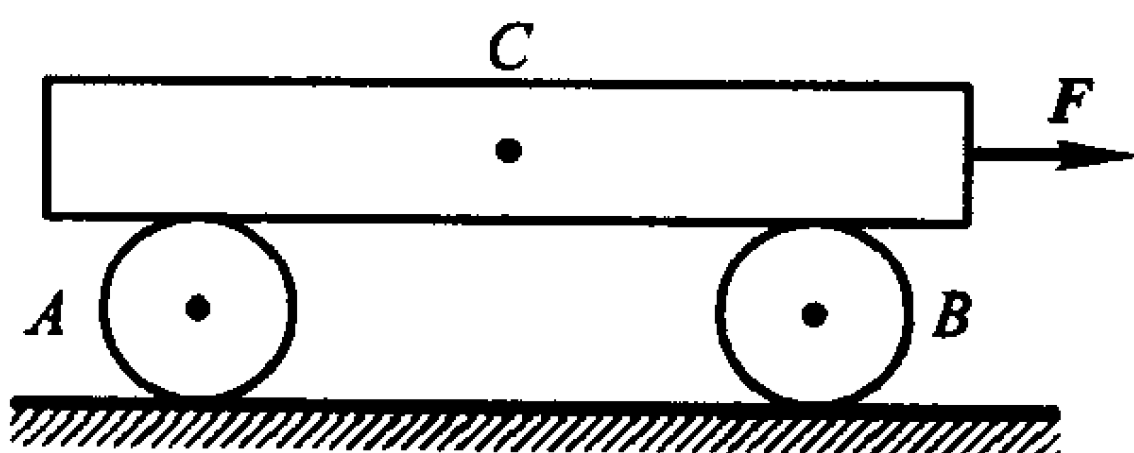
题 14－15 图



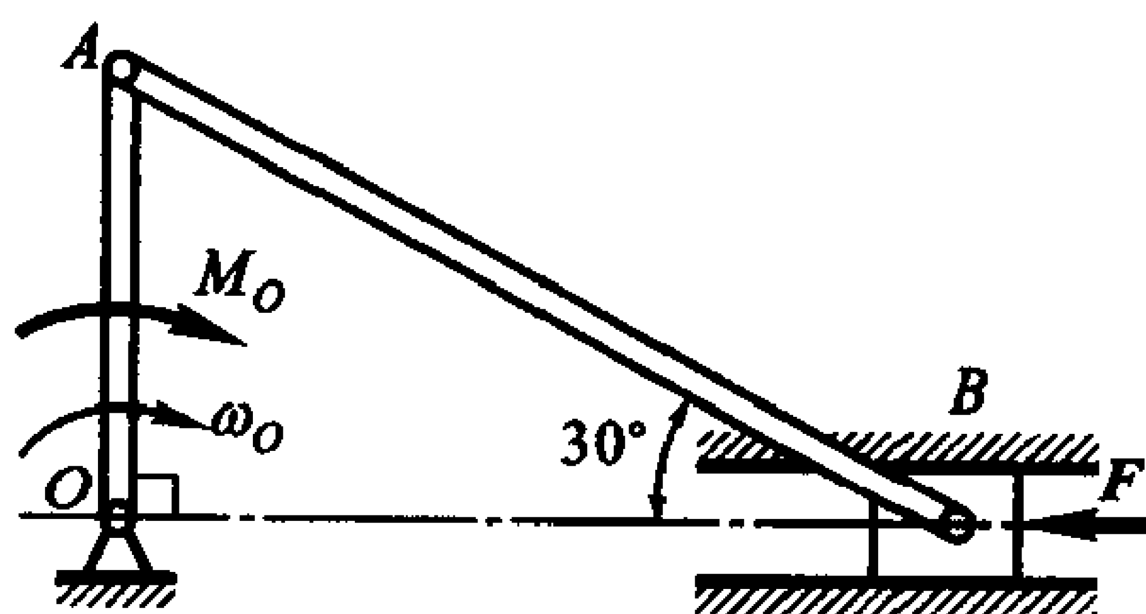
题 14－16 图

14－16　曲柄摇杆机构的曲柄 OA 长为 r，质量为 m，在力偶 M（随时间而变化）驱动下以匀角速度 ω_O 转动，并通过滑块 A 带动摇杆 BD 运动。OB 铅垂，BD 可视为质量为 $8m$ 的均质等直杆，长为 $3r$。不计滑块 A 的质量和各处摩擦；图示瞬时，OA 水平、$\theta=30^\circ$。求此时驱动力偶矩 M 和 O 处约束力。

14-17　图示均质板质量为 m,放在两个均质圆柱滚子上,滚子质量皆为 $\frac{m}{2}$,其半径均为 r。如在板上作用一水平力 $\boldsymbol{F}$,并设滚子无滑动,求板的加速度。



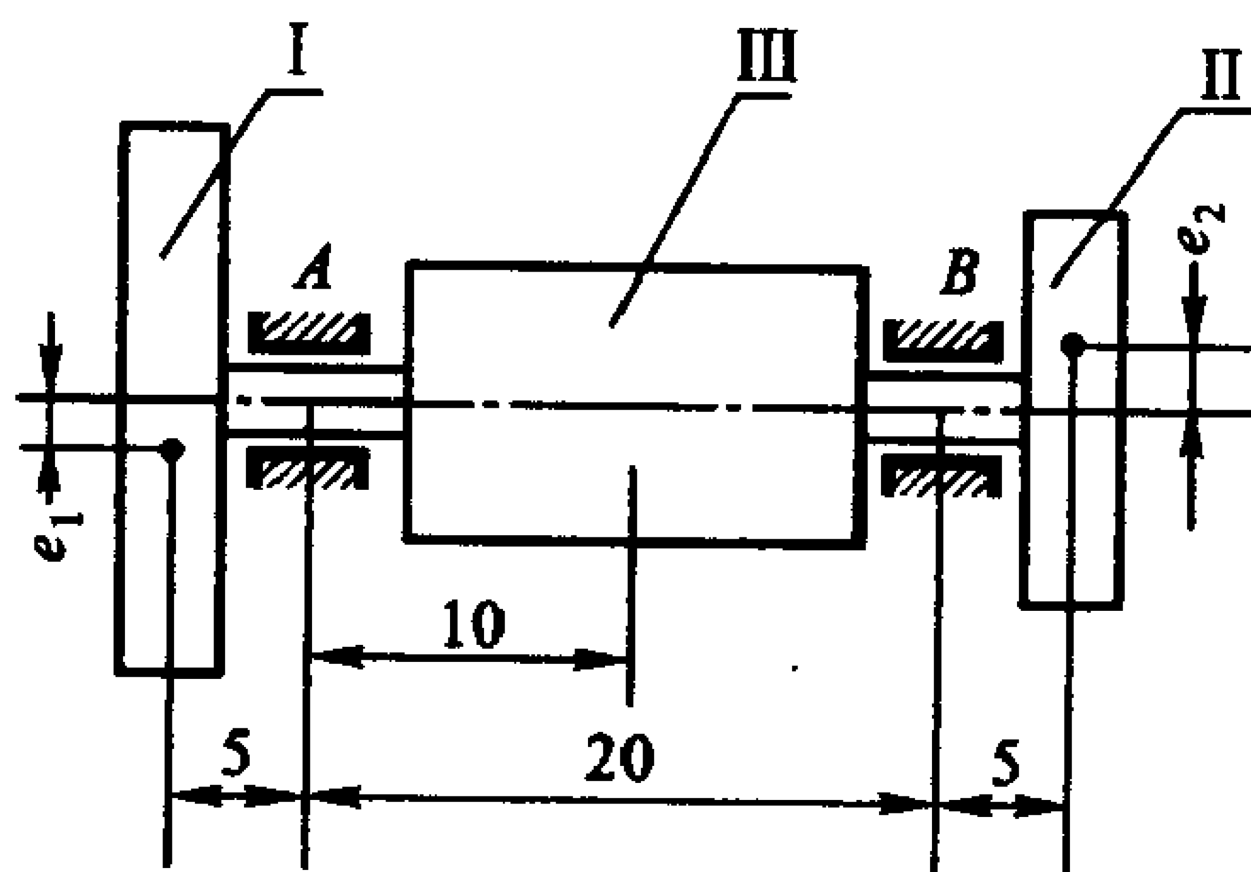
题 14-17 图



题 14-18 图

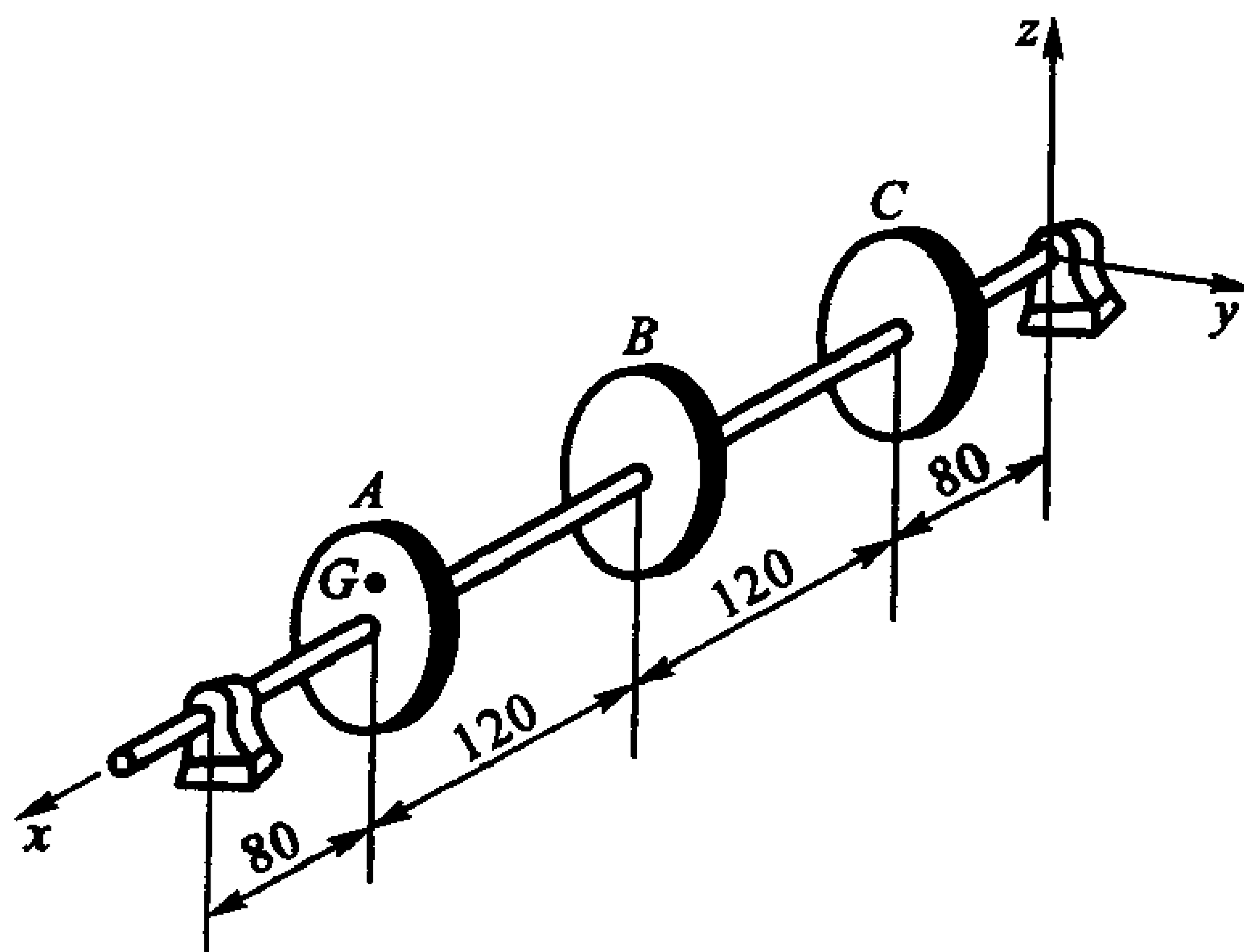
14-18　铅垂面内曲柄连杆滑块机构中,均质直杆 $OA=r$,$AB=2r$,质量分别为 m 和 $2m$,滑块质量为 m。曲柄 OA 匀速转动,角速度为 ω_O。在图示瞬时,滑块运行阻力为 $\boldsymbol{F}$。不计摩擦,求滑道对滑块的约束力及 OA 上的驱动力偶矩 M_O。

14-19　图示磨刀砂轮Ⅰ质量 $m_1=1$ kg,其偏心距 $e_1=0.5$ mm,小砂轮Ⅱ质量 $m_2=0.5$ kg,偏心距 $e_2=1$ mm。电机转子Ⅲ质量 $m_3=8$ kg,无偏心,带动砂轮旋转,转速 $n=3\ 000$ r/min。求转动时轴承 A,B 的附加动约束力。



题 14-19 图

14-20　三圆盘 A,B 和 C 的质量各为 12 kg,共同固结在 x 轴上,位置如图所示。若 A 盘质心 G 的坐标为(320,0,5),而 B 和 C 盘的质心在轴上。今若将两个质量均为 1 kg 的均衡质量分别放在 B 和 C 盘上,问应如何放置可使轴系达到动平衡?



题 14-20 图

第十五章　虚位移原理

虚位移原理应用功的概念分析系统的平衡问题，是研究静力学平衡问题的另一途径。

虚位移原理与达朗贝尔原理结合起来组成动力学普遍方程，为求解复杂系统的动力学问题提供了另一种普遍的方法，构成了分析力学的基础。本书只介绍虚位移原理的工程应用，而不按分析力学的体系追求其完整性和严密性。

§15-1　约束·虚位移·虚功

1. 约束及其分类

在第一章，我们将限制物体位移的周围物体称为该物体的约束。为研究上的方便，现将约束定义为：限制质点或质点系运动的条件称为**约束**，表示这些限制条件的数学方程称为**约束方程**。我们从不同的角度对约束分类如下。

(1) 几何约束和运动约束

限制质点或质点系在空间的几何位置的条件称为**几何约束**。例如图15-1所示单摆，其中质点 M 可绕固定点 O 在平面 Oxy 内摆动，摆长为 l。这时摆杆对质点的限制条件是：质点 M 必须在以点 O 为圆心、以 l 为半径的圆周上运动。若以 x,y 表示质点的坐标，则其约束方程为 $x^2+y^2=l^2$。又如，质点 M 在图15-2所示固定曲面上运动，那么曲面方程就是质点 M 的约束方程，即

$$f(x,y,z)=0$$

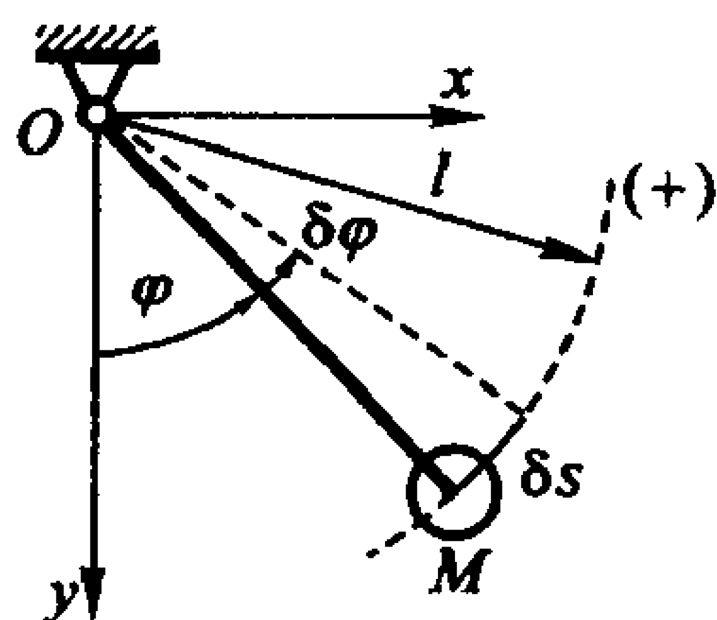


图15-1

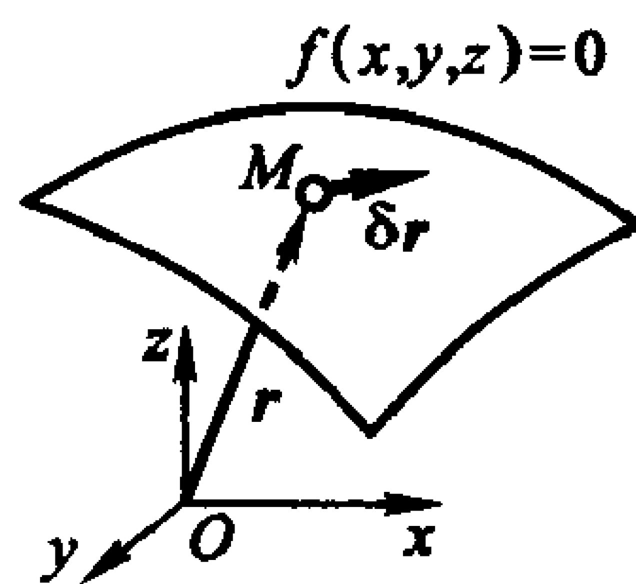


图15-2

又例如，在图15-3所示曲柄连杆机构中，连杆 AB 所受约束有：点 A 只能作以点 O 为圆心，以 r 为半径的圆周运动；点 B 与点 A 间的距离始终保持为杆长 l；点 B 始终沿滑道作直线运动。这三个条件以约束方程表示为

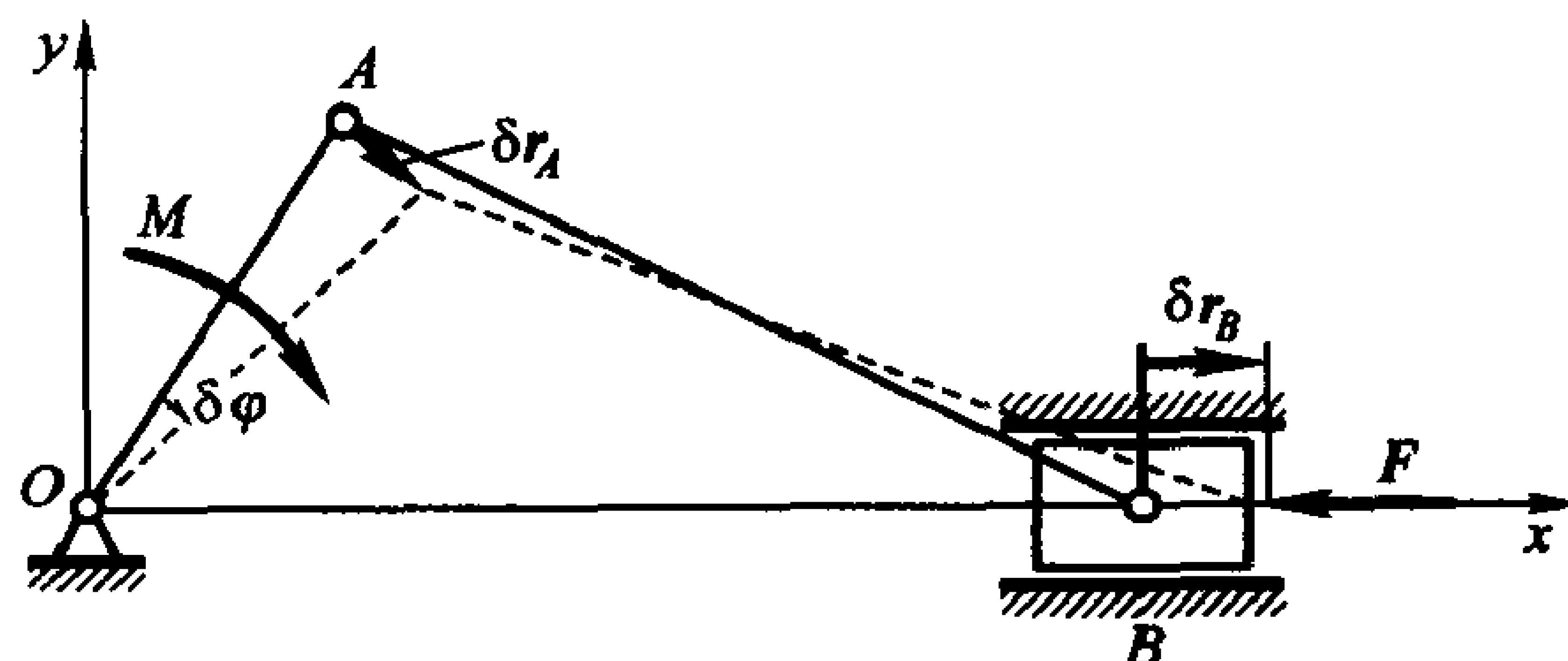


图 15－3

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2$$
$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2$$
$$y_B = 0$$

上述例子中各约束都是限制物体的几何位置，因此都是几何约束。

在力学中，除了几何约束外，还有限制质点系运动情况的运动学条件，称为运动约束。例如，图 15－4 所示车轮沿直线轨道作纯滚动时，车轮除了受到限制其轮心 A 始终与地面保持距离为 r 的几何约束 $y_A = r$ 外，还受到只滚不滑的运动学的限制，即每一瞬时有

$$v_A - r\omega = 0$$

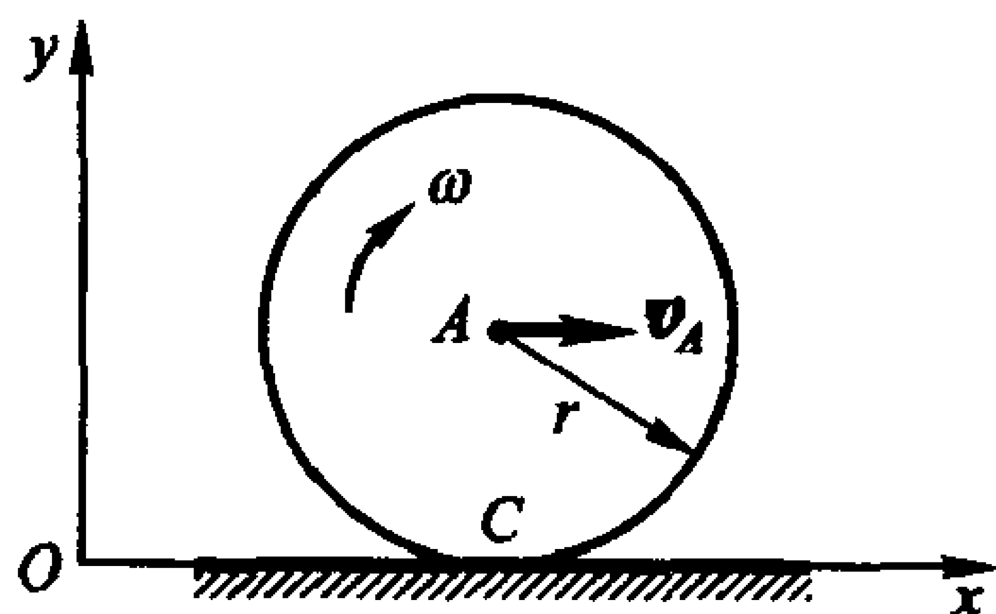


图 15－4

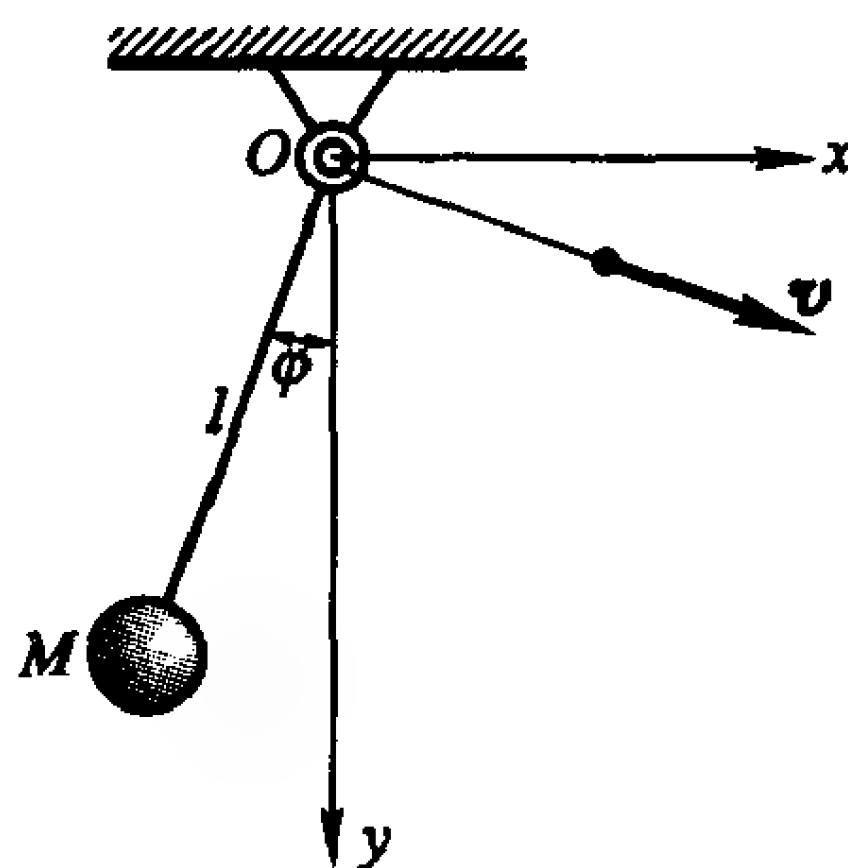


图 15－5

上述约束就是运动约束，该方程即为约束方程。设 x_A 和 φ 分别为点 A 的坐标和车轮的转角，有 $v_A = \dot{x}_A$，$\omega = \dot{\varphi}$。则上式又可改写为

$$\dot{x}_A - r\dot{\varphi} = 0$$

(2) 定常约束和非定常约束

图 15－5 为一摆长 l 随时间变化的单摆，图中重物 M 由一根穿过固定圆环 O 的细绳系住。设摆长在开始时为 l_0，然后以不变的速度 $\boldsymbol{v}$ 拉动细绳的另一端，此时单摆的约束方程为

$$x^2+y^2=(l_0-vt)^2$$

由上式可见,约束条件是随时间变化的,这类约束称为非定常约束。

不随时间变化的约束称为**定常约束**,在定常约束的约束方程中不显含时间 t,图 15-1 所示单摆的约束是定常约束。

(3) 其他分类

如果约束方程中包含坐标对时间的导数(如运动约束),而且方程不可能积分为有限形式,这类约束称为非完整约束。非完整约束方程总是微分方程的形式。反之,如果约束方程中不包含坐标对时间的导数,或者约束方程中的微分项可以积分为有限形式,这类约束称为完整约束。例如,在上述车轮沿直线轨道作纯滚动的例子中,其运动约束方程 $\dot{x}_A-r\dot{\varphi}=0$ 虽是微分方程的形式,但它可以积分为有限形式,所以仍是完整约束。完整约束方程的一般形式为

$$f_j(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_n,y_n,z_n;t)=0 \qquad (j=1,2,\cdots,s)$$

式中 n 为质点系的质点数,s 为完整约束的方程数。

在前述单摆的例子中,摆杆是一刚性杆,它限制质点沿杆的拉伸方向的位移,又限制质点沿杆的压缩方向的位移,这类约束称为双侧约束(或称为固执约束),双侧约束的约束方程是等式。若单摆是用绳子系住的,则绳子不能限制质点沿绳子缩短方向的位移,这类约束称为单侧约束(或称为非固执约束),单侧约束的约束方程是不等式。例如,单侧约束的单摆,其约束方程为

$$x^2+y^2\leqslant l^2$$

本章只讨论定常的双侧几何约束,其约束方程的一般形式为

$$f_j(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_n,y_n,z_n)=0 \qquad (j=1,2,\cdots,s)$$

式中 n 为质点系的质点数,s 为约束的方程数。

2. 虚位移

在静止平衡问题中,质点系中各个质点都不动。我们设想在约束允许的条件下,给某质点一个任意的、极其微小的位移。例如在图 15-2 中,可设想质点 M 在固定曲面上沿某个方向有一极小的位移 $\delta\boldsymbol{r}$。在图 15-3 中,可设想曲柄在平衡位置上转过任一极小角 $\delta\varphi$,这时点 A 沿圆弧切线方向有相应的位移 $\delta\boldsymbol{r}_A$,点 B 沿导轨方向有相应的位移 $\delta\boldsymbol{r}_B$。上述两例中的位移 $\delta\boldsymbol{r},\delta\varphi,\delta\boldsymbol{r}_A,\delta\boldsymbol{r}_B$ 都是约束允许的、可能实现的某种假想的极微小的位移。在某瞬时,质点系在约束允许的条件下,可能实现的任何无限小的位移称为**虚位移**。虚位移可以是线位移,也可以是角位移。虚位移用符号 δ 表示,它是变分符号,“变分”包含有无限小的“变更”的意思。

必须注意,虚位移与实际位移(简称实位移)是不同的概念。实位移是质点系在一定时间内真正实现的位移,它除了与约束条件有关外,还与时间、主动力

以及运动的初始条件有关;而虚位移仅与约束条件有关。因为虚位移是任意的无限小的位移,所以在定常约束的条件下,实位移只是所有虚位移中的一个,而虚位移视约束情况,可以有多个,甚至无穷多个。对于非定常约束,某个瞬时的虚位移是将时间固定后,约束所允许的虚位移,而实位移是不能固定时间的,所以这时实位移不一定是虚位移中的一个。对于无限小的实位移,我们一般用微分符号表示,例如 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,$\mathrm{d}x$,$\mathrm{d}\varphi$,…等。

3. 虚功

力在虚位移中作的功称为**虚功**。如图 15-3 中,按图示的虚位移,力 $\boldsymbol{F}$ 的虚功为 $\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}_B$,是负功;力偶 M 的虚功为 $M\delta\varphi$,是正功。力 $\boldsymbol{F}$ 在虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 上作的虚功一般以 $\delta W=\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}$ 表示,本书中的虚功与实位移中的元功虽然采用同一符号 δW,但它们之间是有本质区别的。因为虚位移只是假想的,不是真实发生的,因而虚功也是假想的,是虚的。图 15-3 中的机构处于静止平衡状态,显然任何力都没作实功,但力可以作虚功。

4. 理想约束

如果在质点系的任何虚位移中,所有约束力所作虚功的和等于零,称这种约束为**理想约束**。若以 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}$ 表示作用在某质点 i 上的约束力,$\delta\boldsymbol{r}_i$ 表示该质点的虚位移,$\delta W_{\mathrm{N}i}$ 表示该约束反力在虚位移中所作的功,则理想约束可以用数学公式表示为

$$\delta W_{\mathrm{N}}=\sum\delta W_{\mathrm{N}i}=\sum\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

在动能定理一章已分析过光滑固定面约束、光滑铰链、无重刚杆、不可伸长的柔索、固定端等约束为理想约束,现从虚位移原理的角度看,这些约束也为理想约束。

§ 15-2 虚位移原理

设有一质点系处于静止平衡状态,取质点系中任一质点 m_i,如图 15-6 所示,作用在该质点上的主动力的合力为 $\boldsymbol{F}_i$,约束力的合力为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}$。因为质点系处于平衡状态,则这个质点也处于平衡状态,因此有

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}=0$$

若给质点系以某种虚位移,其中质点 m_i 的虚位移为 $\delta\boldsymbol{r}_i$,则作用在质点 m_i 上的力 $\boldsymbol{F}_i$ 和 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}$ 的虚功的和为

$$\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

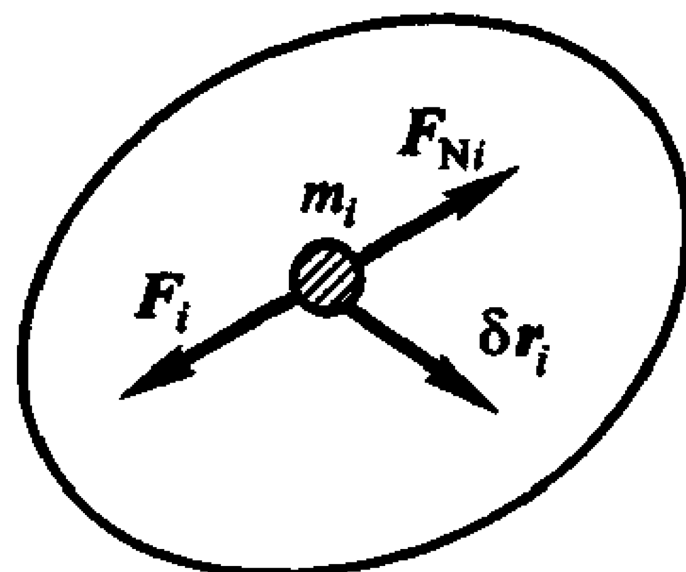


图 15-6

对于质点系内所有质点,都可以得到与上式同样的等式。将这些等式相加,得

$$\sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum \boldsymbol{F}_{Ni} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

如果质点系具有理想约束，则约束力在虚位移中所作虚功的和为零，即$\sum \boldsymbol{F}_{Ni} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$，代入上式得

$$\sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{15-1}$$

用δW_{Fi}代表作用在质点m_i上的主动力的虚功，由于$\delta W_{Fi} = \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$，则上式可以写为

$$\sum \delta W_{Fi} = 0 \tag{15-2}$$

可以证明，上式不仅是质点系平衡的必要条件，也是充分条件。

因此可得结论：对于具有理想约束的质点系，其平衡的充分必要条件是：作用于质点系的所有主动力在任何虚位移中所作虚功的和等于零。上述结论称为**虚位移原理**，又称为**虚功原理**，式(15-1)、(15-2)又称为虚功方程。

式(15-1)也可写成解析表达式，即

$$\sum (F_{xi}\delta x_i + F_{yi}\delta y_i + F_{zi}\delta z_i) = 0 \tag{15-3}$$

式中F_{xi}，F_{yi}，F_{zi}为作用于质点m_i的主动力$\boldsymbol{F}_i$在直角坐标轴上的投影，δx_i，δy_i，δz_i为虚位移$\delta \boldsymbol{r}_i$在直角坐标轴上的投影。

以上证明了虚位移原理的必要性，即：若质点系平衡则式(15-1)必定成立。应该指出，式(15-1)也是质点系平衡的充分条件，即：在满足式(15-1)的条件下，质点系必保持平衡状态。下面采用反证法证明虚位移原理的充分性。

如果质点系受力作用而处于非静止平衡状态，则此质点系在初始静止状态下，经过$\mathrm{d}t$时间，必有某些质点由静止而发生运动，而且其位移应沿该质点所受合力的方向。设该质点主动力的合力为$\boldsymbol{F}_i$，约束力的合力为$\boldsymbol{F}_{Ni}$。当约束条件不随时间而变化时，真实发生的小位移也应满足该质点的约束条件，是可能实现的虚位移之一，记为$\delta \boldsymbol{r}_i$，则必有不等式

$$(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ni}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i > 0$$

质点系中发生运动的质点上作用力的虚功都大于零，而保持静止的质点上作用力的虚功等于零，因而全部虚功相加仍为不等式，即

$$\sum (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ni}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i > 0$$

理想约束下，有

$$\sum \boldsymbol{F}_{Ni} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

由此得出

$$\sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i > 0$$

这与式(15-1)是矛盾的。

由上得证：满足式(15-1)条件之下，质点系必定保持静止平衡状态，这就是虚位移原理的充分性。

应该指出，虽然应用虚位移原理的条件是质点系应具有理想约束，但也可以用于有摩擦的情况，只要把摩擦力当作主动力，在虚功方程中计入摩擦力所作的虚功即可。

例 15-1 如图 15-7 所示，在螺旋压榨机的手柄 AB 上作用一在水平面内的力偶（$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}'$），其力偶矩 $M=2Fl$，螺杆的螺距为 h。求机构平衡时加在被压榨物体上的力。

解： 研究以手柄、螺杆和压板组成的平衡系统。若忽略螺杆和螺母间的摩擦，则约束是理想的。

作用于平衡系统上的主动力为：作用于手柄上的力偶（$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}'$），被压物体对压板的阻力 $\boldsymbol{F}_N$。

给系统以虚位移，将手柄按螺纹方向转过极小角 $\delta\varphi$，于是螺杆和压板得到向下的位移 δs。

计算所有主动力在虚位移中所作虚功的和，列出虚功方程

图 15-7

$$\sum \delta W_F = -F_N \cdot \delta s + 2Fl \cdot \delta\varphi = 0$$

由机构的传动关系知：对于单头螺纹，手柄 AB 转一周，螺杆上升或下降一个螺距 h，故有

$$\frac{\delta\varphi}{2\pi} = \frac{\delta s}{h}，即\ \delta s = \frac{h}{2\pi}\delta\varphi$$

将上述虚位移 δs 与 $\delta\varphi$ 的关系式代入虚功方程中，得

$$\sum \delta W_F = \left(2Fl - \frac{F_N h}{2\pi}\right)\delta\varphi = 0$$

因 $\delta\varphi$ 是任意的，故

$$2Fl - \frac{F_N h}{2\pi} = 0$$

解得

$$F_N = \frac{4\pi l}{h}F$$

作用于被压榨物体上的力与此力等值反向。

例 15-2 图 15-8a 中所示结构，各杆自重不计，在 G 点作用一铅直向上的力 $\boldsymbol{F}$，$AC=CE=CD=CB=DG=GE=l$。求支座 B 的水平约束力。

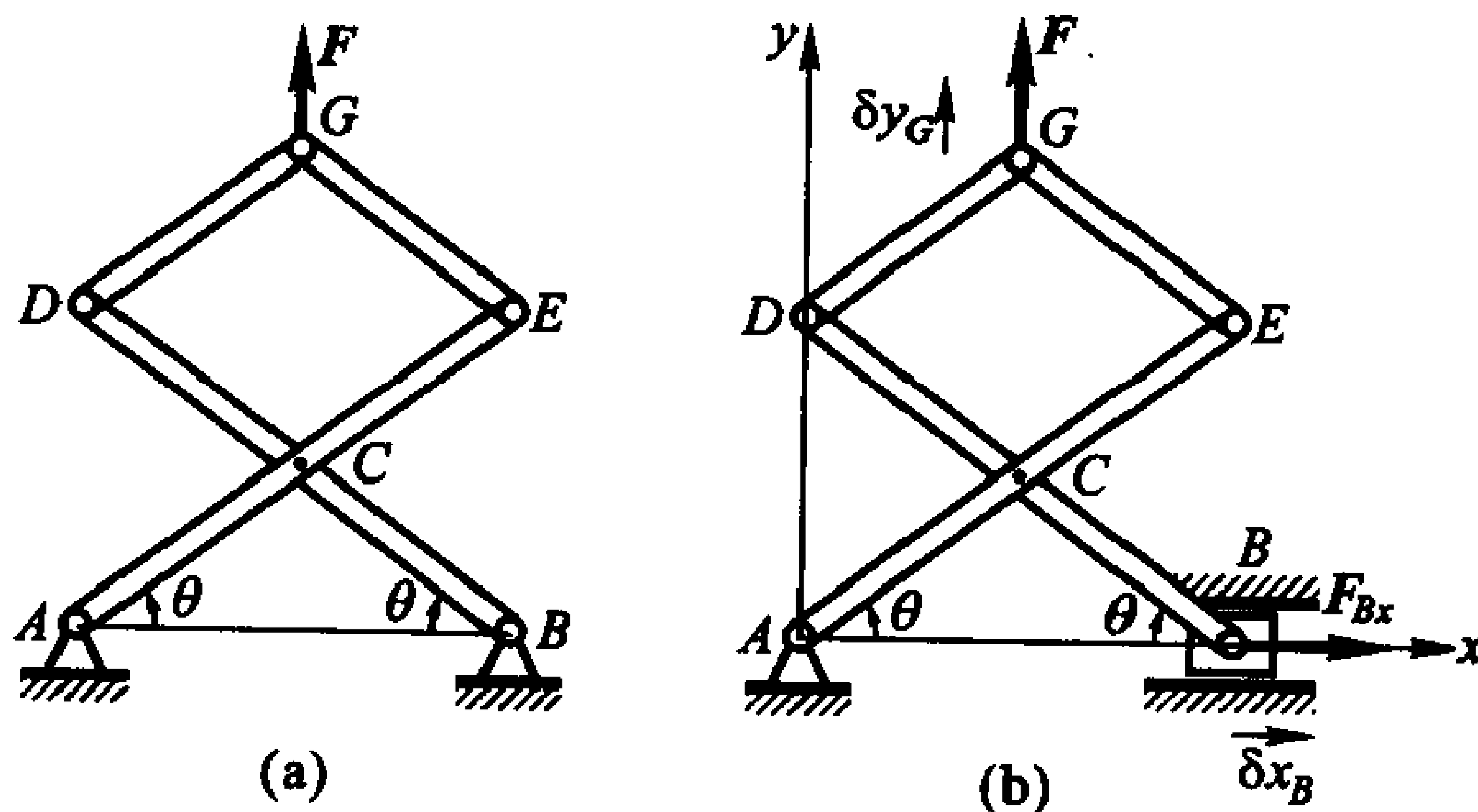


图 15-8

解： 此题涉及的是一个结构，无论如何假想产生虚位移，结构都不允许。为求 B 处水平

约束力，需把 B 处水平约束解除，以力 F_{Bx} 代替，把此力当作主动力，则结构变成图 15－8b 所示的机构，此时就可以假想产生虚位移，用虚位移原理求解。

用解析法。建坐标系如图，列虚功方程

$$\delta W_F = 0 \qquad F_{Bx}\cdot\delta x_B + F\cdot\delta y_G = 0$$

写出点 B 的坐标 x_B 与点 G 的坐标 y_G

$$x_B = 2l\cos\theta \qquad y_G = 3l\sin\theta$$

其变分为

$$\delta x_B = -2l\sin\theta\delta\theta \qquad \delta y_G - 3l\cos\theta\delta\theta$$

将 δx_B，δy_G 代入虚功方程，得

$$F_{Bx}(-2l\sin\theta\delta\theta) + F\cdot 3l\cos\theta\delta\theta = 0$$

解得

$$F_{Bx} = \frac{3}{2}F\cot\theta$$

此题如果在 C，G 两点之间连接一自重不计、刚度系数为 k 的弹簧，如图 15－9a 所示。在图示位置弹簧已有伸长量 δ_0，其他条件不变，仍求支座 B 的水平约束力。则仍需解除 B 处水平方向约束，去掉弹簧，均代之以力，如图 15－9b 所示。在图示位置，弹簧有伸长量 δ_0，所以弹性力 $F_C = F_G = k\delta_0$。仍用解析法，列虚功方程

$$\delta W_F = 0 \qquad F_{Bx}\cdot\delta x_B + F_C\cdot\delta y_C - F_G\cdot\delta y_G + F\cdot\delta y_G = 0$$

而

$$x_B = 2l\cos\theta \qquad y_C = l\sin\theta \qquad y_G = 3l\sin\theta$$

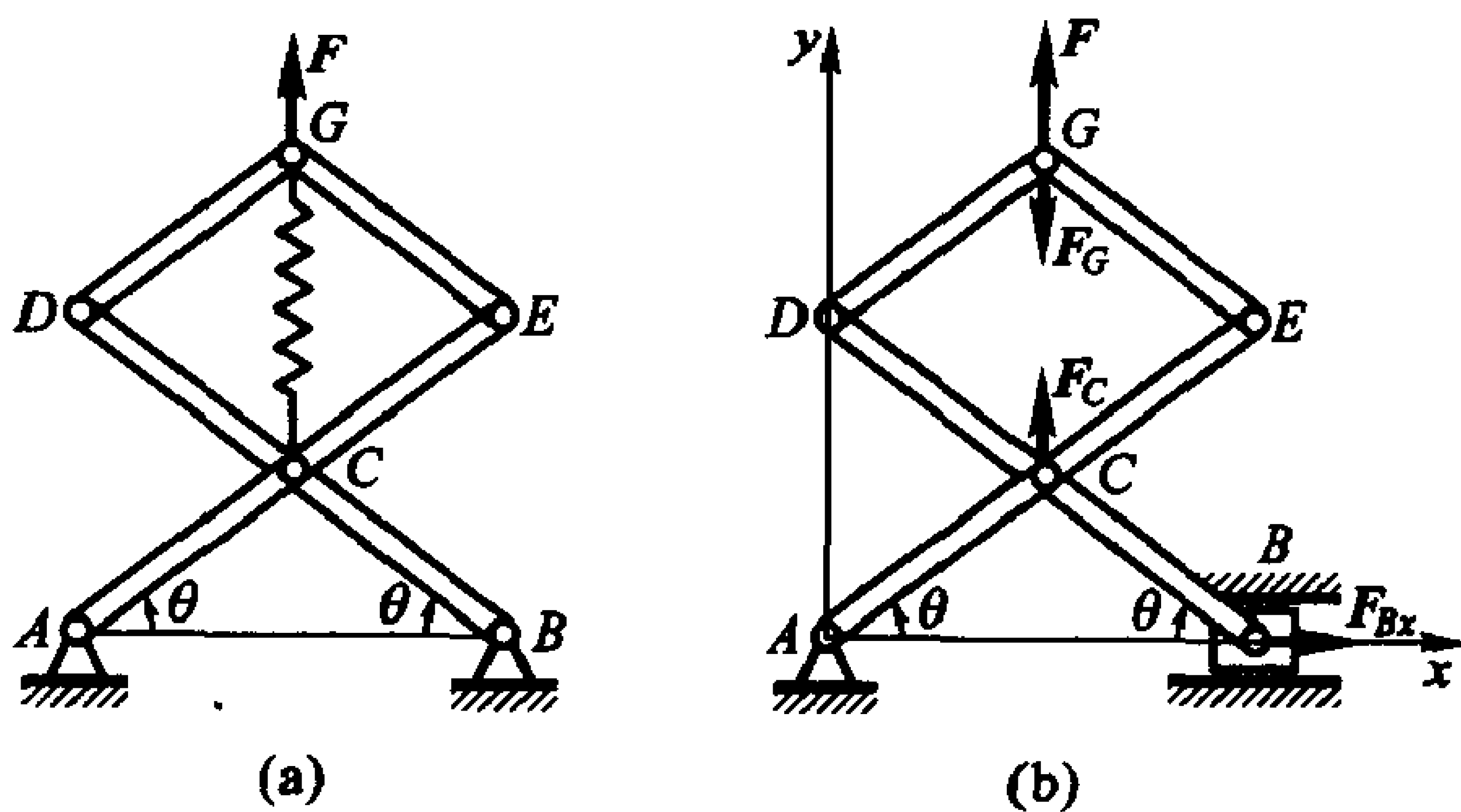


图 15－9

其变分为

$$\delta x_B = -2l\sin\theta\delta\theta \qquad \delta y_C = l\cos\theta\delta\theta \qquad \delta y_G = 3l\cos\theta\delta\theta$$

代入虚功方程，得

$$F_{Bx}(-2l\sin\theta\delta\theta) + k\delta_0\cdot l\cos\theta\delta\theta - k\delta_0\cdot 3l\cos\theta\delta\theta + F\cdot 3l\cos\theta\delta\theta = 0$$

解得

$$F_{Bx} = \frac{3}{2}F\cot\theta - k\delta_0\cot\theta$$

例 15－3　图 15－10 所示椭圆规机构中，连杆 AB 长为 l，滑块 A，B 与杆重均不计，忽略各处摩擦，机构在图示位置平衡。求主动力 $\boldsymbol{F}_A$ 与 $\boldsymbol{F}_B$ 之间的关系。

解：研究整个机构，系统的约束为理想约束。对此题，可用下述几种方法求解。

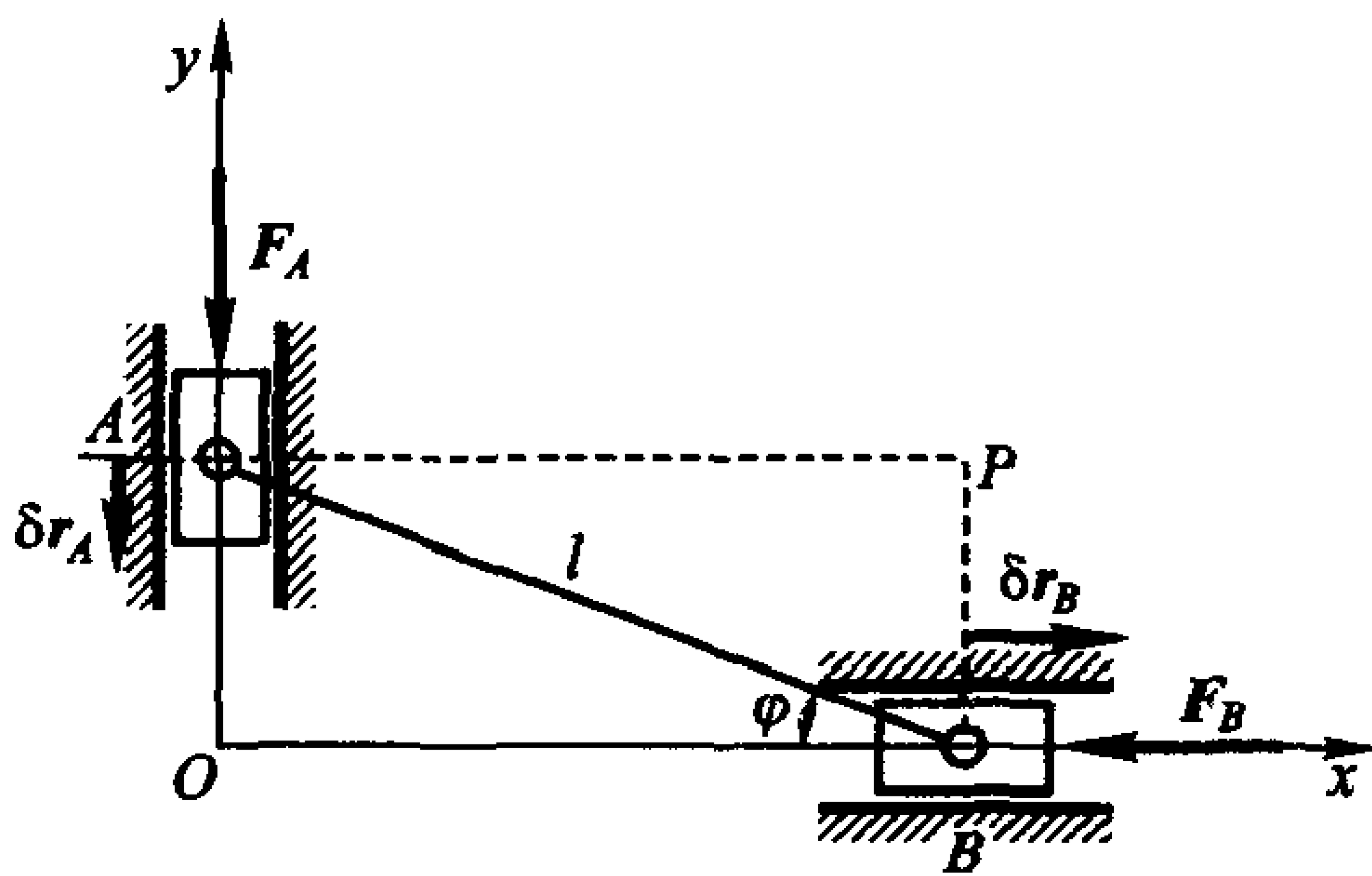


图 15－10

(1) 设给滑块 A 一图示的虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_A$，在约束允许的条件下，滑块 B 的虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_B$ 如图所示，由虚位移原理

$$\sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

有

$$F_A \cdot \delta r_A - F_B \cdot \delta r_B = 0 \tag{a}$$

为求得 F_A 与 F_B 的关系，应找出虚位移 δr_A 与 δr_B 的关系。由于 AB 杆为刚性杆，A，B 两点的虚位移在 AB 连线上的投影应该相等，由图有 $\delta r_B \cos\varphi = \delta r_A \sin\varphi$，

即

$$\delta r_A = \delta r_B \cot\varphi \tag{b}$$

将式(b)代入式(a)，得

$$F_A \cot\varphi - F_B = 0$$

因 δr_B 是任意的，解得

$$F_A = F_B \tan\varphi$$

(2) 用解析法。建立图示坐标系，由

$$\sum (F_{xi}\delta x_i + F_{yi}\delta y_i + F_{zi}\delta z_i) = 0$$

有

$$-F_B \delta x_B - F_A \delta y_A = 0 \tag{c}$$

写出 A，B 点的坐标，为

$$x_B = l\cos\varphi \qquad y_A = l\sin\varphi$$

实施变分运算(类似微分运算)，有

$$\delta x_B = -l\sin\varphi\delta\varphi \qquad \delta y_A = l\cos\varphi\delta\varphi$$

将 δx_B 与 δy_A 代入式(c)，解得

$$F_A = F_B \tan\varphi$$

(3) 为求虚位移间的关系，也可以用所谓的“虚速度法”。我们可以假想虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_A$，$\delta \boldsymbol{r}_B$ 是在某个极短的时间 $\mathrm{d}t$ 内发生的，这时对应点 A 和点 B 的速度 $\boldsymbol{v}_A = \dfrac{\delta \boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}$ 和 $\boldsymbol{v}_B = \dfrac{\delta \boldsymbol{r}_B}{\mathrm{d}t}$ 称为虚速度。代入式(a)得

$$F_B v_B - F_A v_A = 0 \tag{d}$$

由速度投影定理

$$v_B \cos\varphi = v_A \sin\varphi$$

得

$$v_B = v_A \tan\varphi \tag{e}$$

把式(e)代入式(d)得

$$F_A = F_B \tan \varphi$$

例 15－4　图 15－11 所示机构，不计各构件自重与各处摩擦，求机构在图示位置平衡时，主动力偶矩 M 与主动力 $\boldsymbol{F}$ 之间的关系。

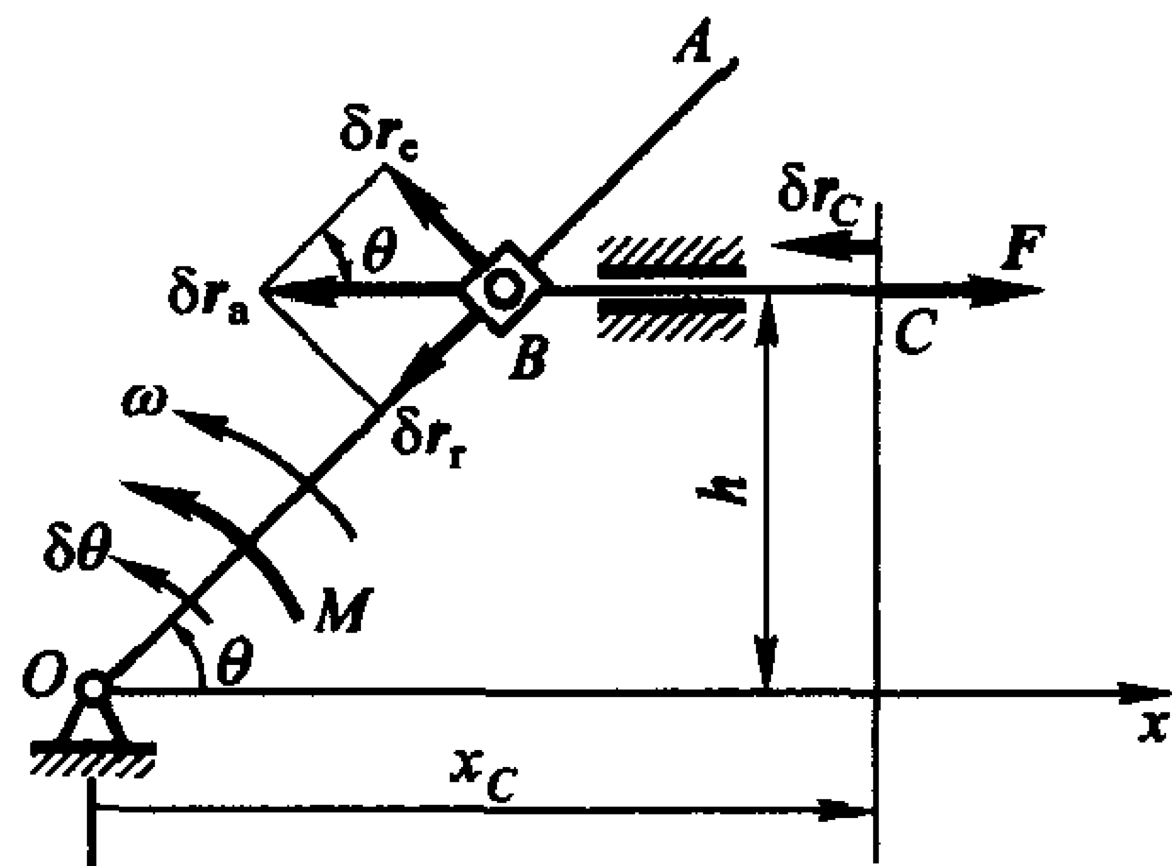


图 15－11

解：系统的约束为理想约束，假想杆 OA 在图示位置逆时针转过一微小角度 $\delta\theta$，则点 C 将会有水平虚位移 δr_C，由

$$\delta W_F = 0 \quad 有 \quad M\delta\theta - F\delta r_C = 0 \tag{a}$$

现在的问题是应找出 $\delta\theta$ 与 δr_C 的关系，杆 OA 的微小转角 $\delta\theta$ 将引起滑块 B 的牵连位移 δr_e，从而有绝对位移 $\delta \boldsymbol{r}_a$ 与相对位移 $\delta \boldsymbol{r}_r$，如图所示。由图中可看出，

$$\delta r_a = \frac{\delta r_e}{\sin\theta}$$

而

$$\delta r_e = OB \cdot \delta\theta = \frac{h}{\sin\theta}\delta\theta \qquad \delta r_C = \delta r_a = \frac{h\delta\theta}{\sin^2\theta}$$

代入式(a)，解得

$$M = \frac{Fh}{\sin^2\theta}$$

若用虚速度法，有 $M\omega - Fv_C = 0$，虚角速度 ω 与点 C 的虚速度 $\boldsymbol{v}_C$ 类似于图中的虚位移关系，只需把各虚位移改为虚速度即可，即

$$v_e = OB \cdot \omega = \frac{h}{\sin\theta} \cdot \omega \qquad v_a = v_C = \frac{h\omega}{\sin^2\theta} \quad 有 \quad M = \frac{Fh}{\sin^2\theta}$$

也可建图示坐标系，由 $\delta W_F = 0$

有

$$M\delta\theta + F\delta x_C = 0$$

而

$$x_C = h\cot\theta + BC, \quad \delta x_C = -\frac{h\delta\theta}{\sin^2\theta}$$

解得

$$M = \frac{Fh}{\sin^2\theta}$$

例 15－5　求图 5－12a 所示无重组合梁支座 A 的约束力。

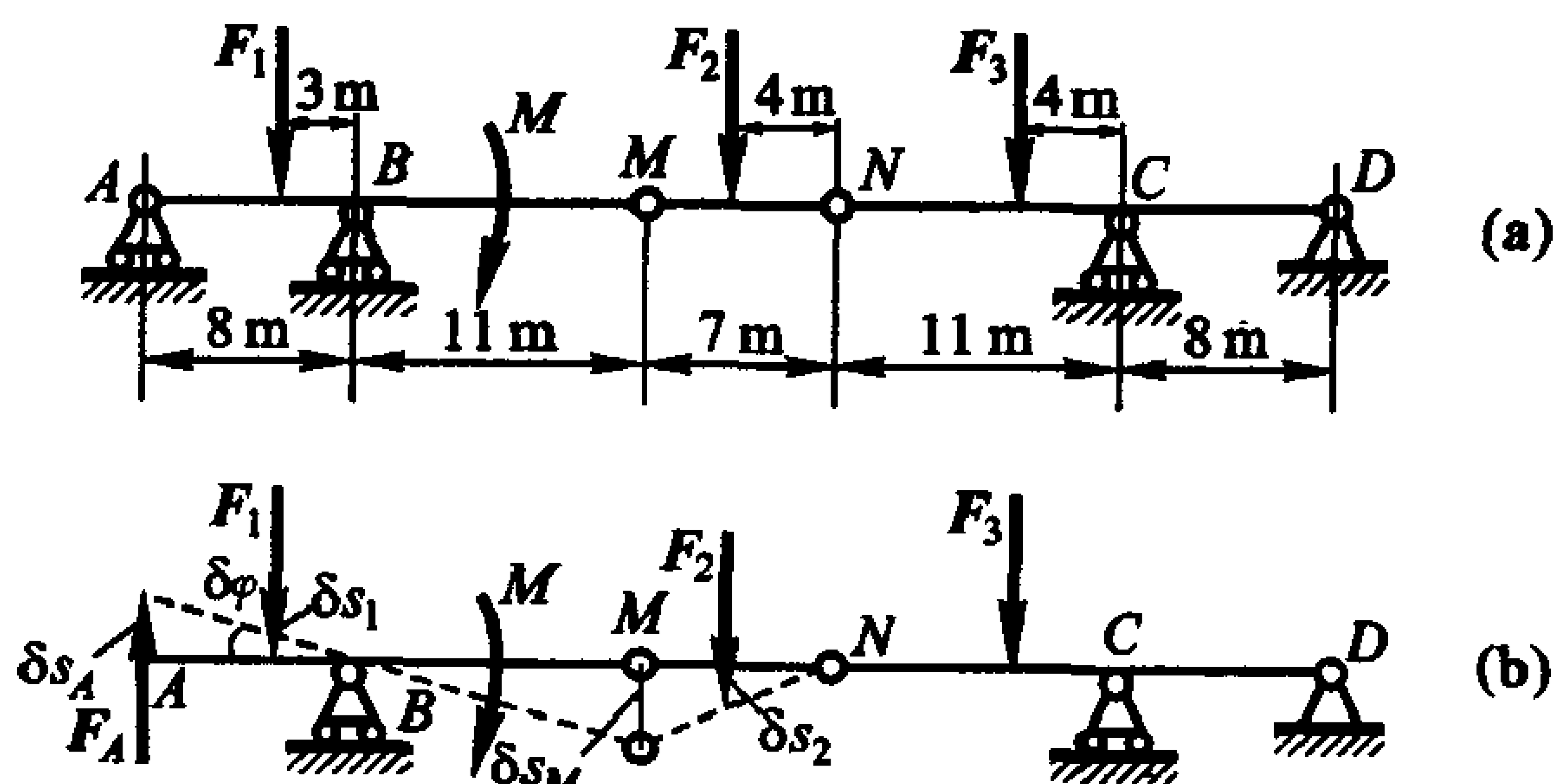


图 15－12

解：解除支座 A 的约束，代之以约束力 F_A，将 F_A 看作为主动力，如图 15－12b 所示。假想支座 A 产生如图所示虚位移，则在约束允许的条件下，各点虚位移如图所示，列虚功方程

$$\delta W_F = 0 \qquad F_A \cdot \delta s_A - F_1 \cdot \delta s_1 + M \cdot \delta\varphi + F_2 \cdot \delta s_2 = 0$$

从图中可看出

$$\delta\varphi = \frac{\delta s_A}{8} \qquad \delta s_1 = 3 \cdot \delta\varphi = \frac{3}{8}\delta s_A \qquad \delta s_M = 11 \cdot \delta\varphi = \frac{11}{8}\delta s_A$$

$$\delta s_2 = \frac{4}{7}\delta s_M = \frac{4}{7} \cdot \frac{11}{8}\delta s_A - \frac{11}{14}\delta s_A$$

代入虚功方程得

$$F_A = \frac{3}{8}F_1 - \frac{11}{14}F_2 - \frac{1}{8}M$$

由以上数例可见，用虚位移原理求解机构的平衡问题，关键是找出各虚位移之间的关系，一般应用中，可采用下列三种方法建立各虚位移之间的关系。

(1) 设机构某处产生虚位移，作图给出机构各处的虚位移，直接按几何关系，确定各有关虚位移之间的关系，如例 15－1，15－2，15－3，15－5。

(2) 建立坐标系，选定一合适的自变量，写出各有关点的坐标，对各坐标进行变分运算，确定各虚位移之间的关系，如例 15－2，15－3，15－4。

(3) 按运动学方法，设某处产生虚速度，计算各有关点的虚速度，计算各虚速度时，可采用运动学中各种方法，如点的合成运动方法，刚体平面运动的基点法，速度投影定理，瞬心法及写出运动方程再求导数等，如例 15－2，15－3。

用虚位移原理求解结构的平衡问题时，要求某一支座反力时，首先需解除该支座约束而代以约束力，把结构变为机构，把约束力当作主动力，这样，在虚位移方程中只包含一个未知力，然后用虚位移原理求解。如例 15－4，15－5。若需求多个约束力，则需要一个一个地解除约束用虚位移原理求解，这样求解有时并不方便，如例 15－4，15－5，若要求各处约束力，则不如用平衡方程方便。

小　结

1. 虚位移 · 虚功 · 理想约束

在某瞬时，质点系在约束允许的条件下，人所假想的任何无限小位移称为虚位移。虚位移可以是线位移，也可以是角位移。

力在虚位移中所作的功称为虚功。

在质点系的任何虚位移中，所有约束力所作虚功的和等于零，这种约束称为理想约束。

2. 虚位移原理：对于具有理想约束的质点系，其平衡条件是作用于质点系上的所有主动力在任何虚位移上所作虚功的和等于零。其一般表达形式为 $\delta W_F = 0$

虚位移原理是不同于列平衡方程求解静力学平衡问题的一种方法。虚位移原理可以用于具有理想约束的系统，也可以用于具有非理想约束的系统。虚位移原理可以求主动力之间的关系，也可以求约束力。

思　考　题

15-1　图 15-13 所示机构均处于静止平衡状态，图中所给各虚位移有无错误？如有错误，应如何改正？

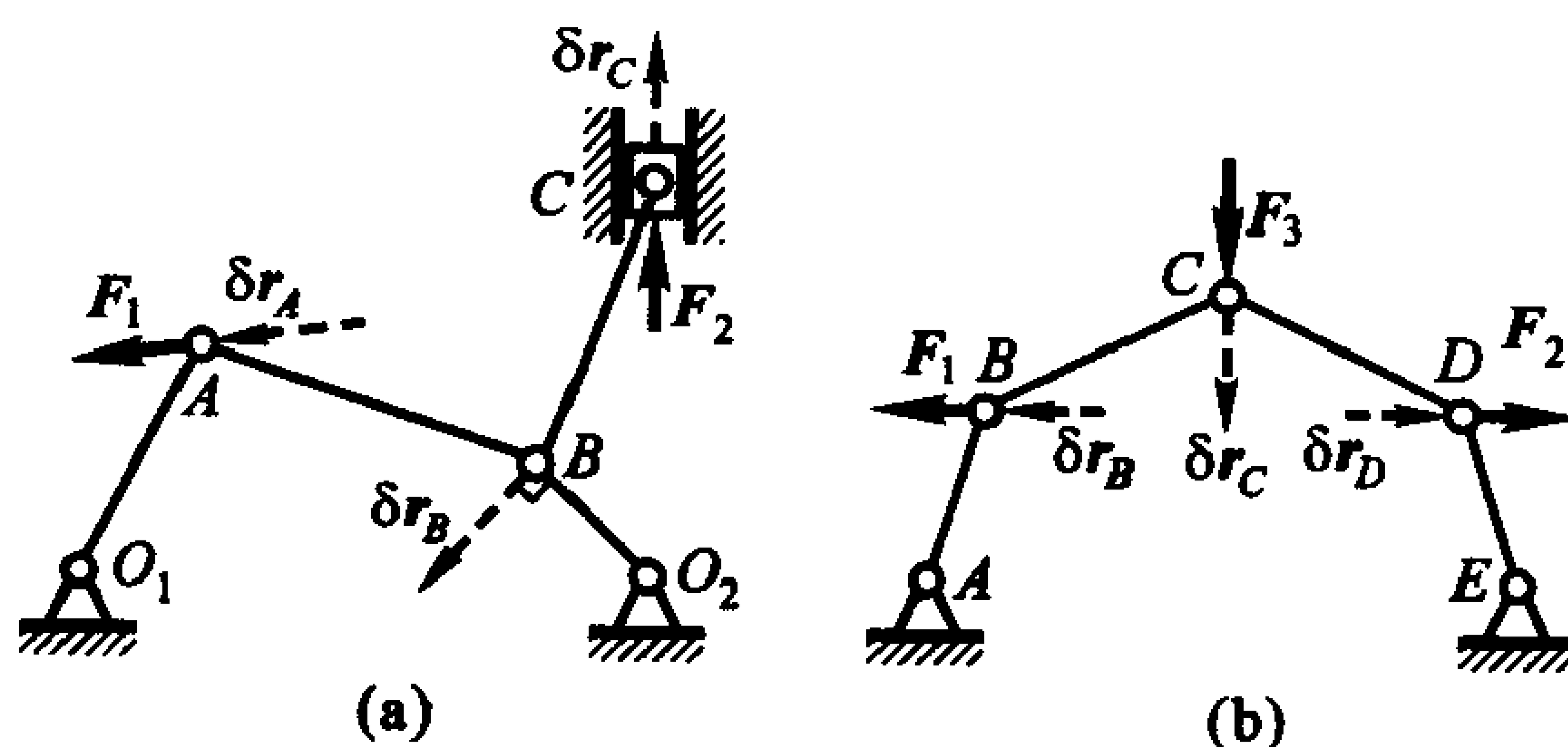


图 15-13

15-2　对图 15-14 所示各机构，你能用哪些不同的方法确定虚位移 $\delta\theta$ 与力 F 作用点 A 的虚位移的关系，并比较各种方法。

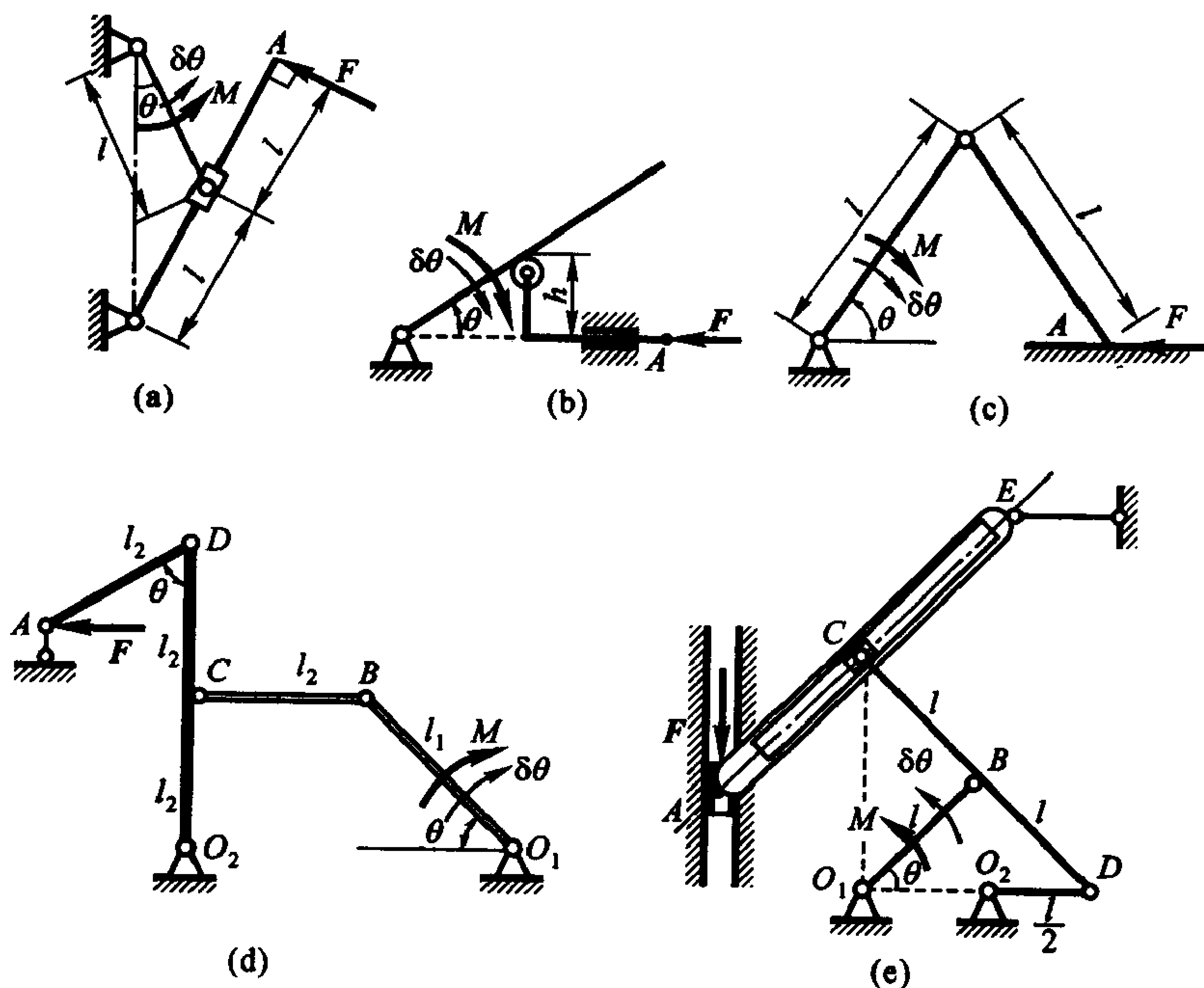


图 15-14

15-3　图 15-15 所示平面平衡系统，若对整体列平衡方程求解时，是否需要考虑弹簧的内力？若改用虚位移原理求解，弹簧力为内力，是否需要考虑弹簧力的功？

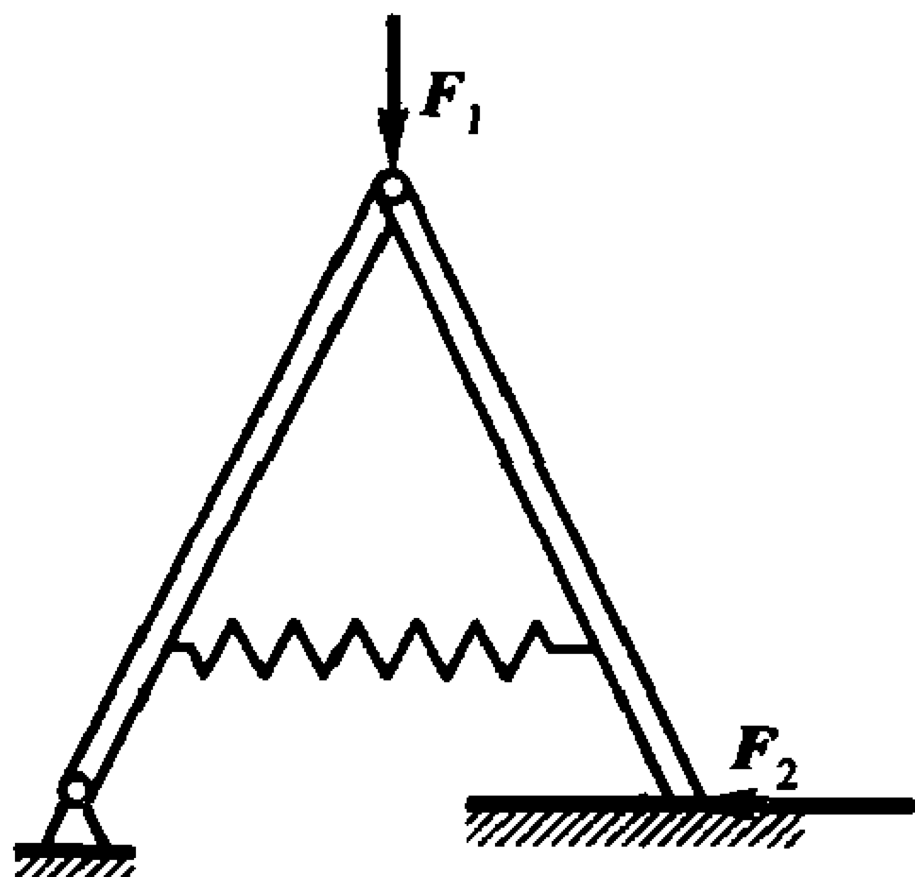


图 15-15

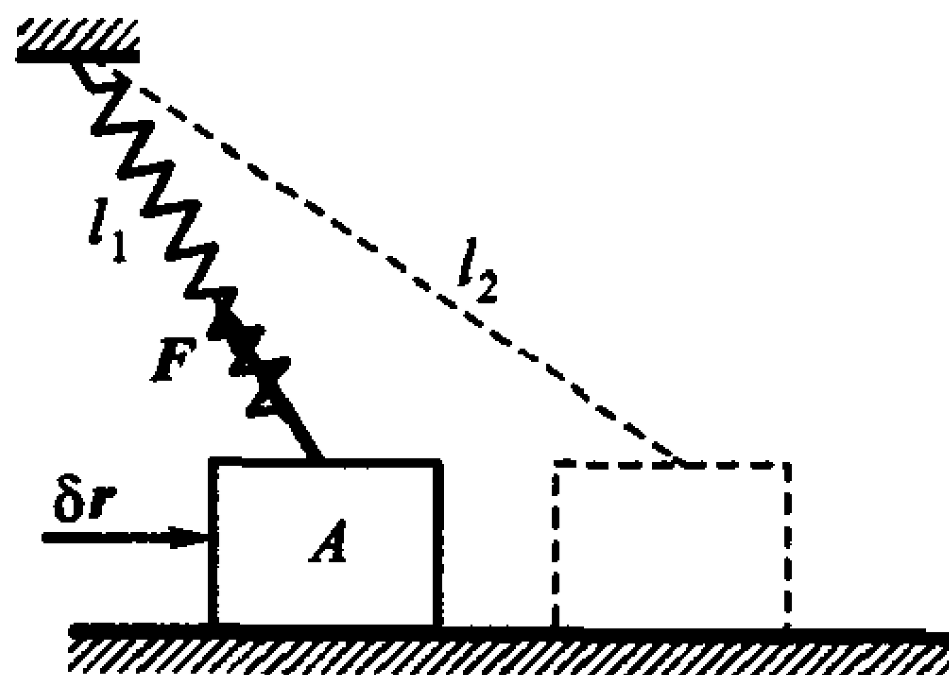


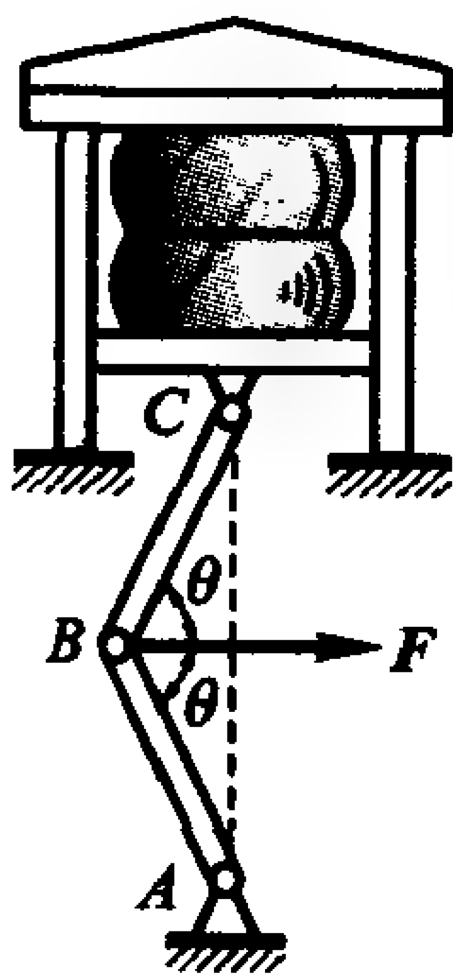
图 15-16

15-4　如图 15-16 所示，物块 A 在重力、弹性力与摩擦力作用下平衡，设给物块 A 一水平向右的虚位移 δr，弹性力的虚功如何计算？摩擦力在此虚位移中作正功还是作负功？

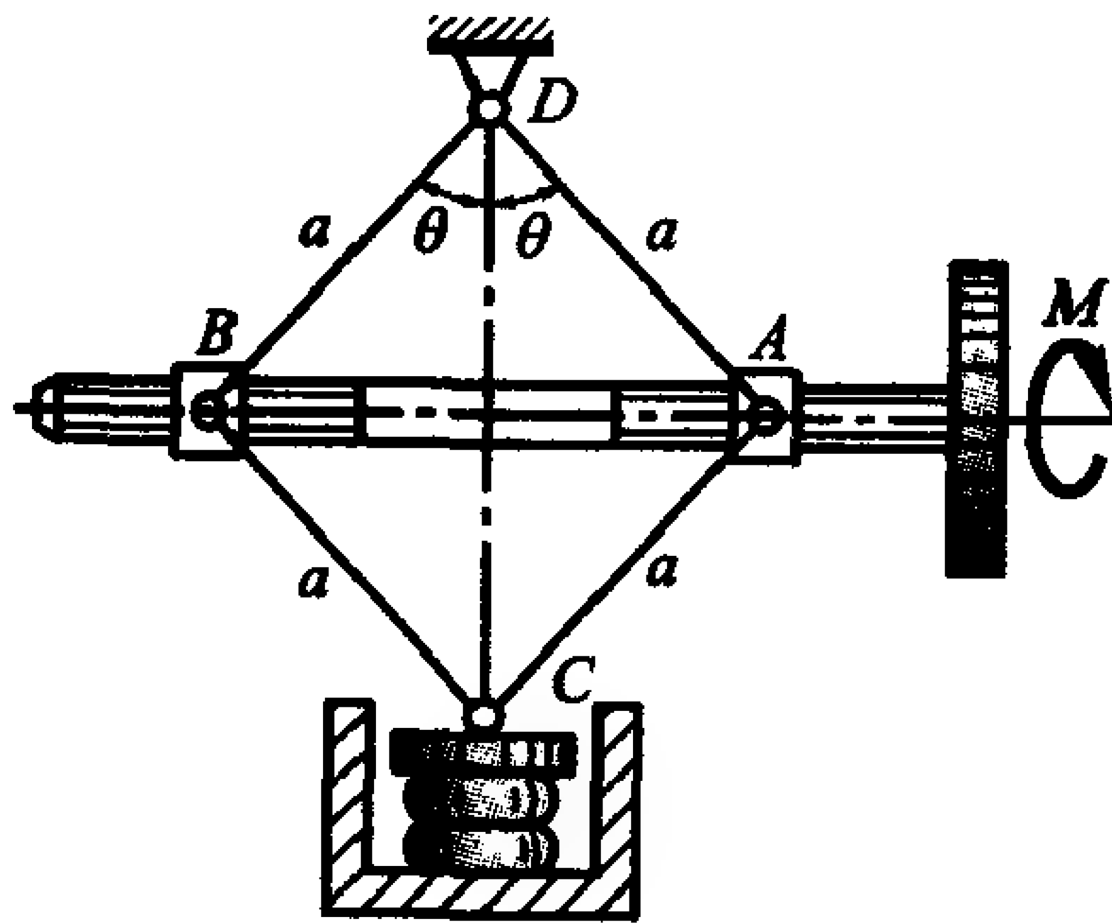
15-5　用虚位移原理可以推出作用在刚体上的平面力系的平衡方程，试推导之。

习　题

15-1　图示曲柄式压榨机的销钉 B 上作用有水平力 F，此力位于平面 ABC 内，作用线平分$\angle ABC$，$AB=BC$，各处摩擦及杆重不计，求对物体的压缩力。



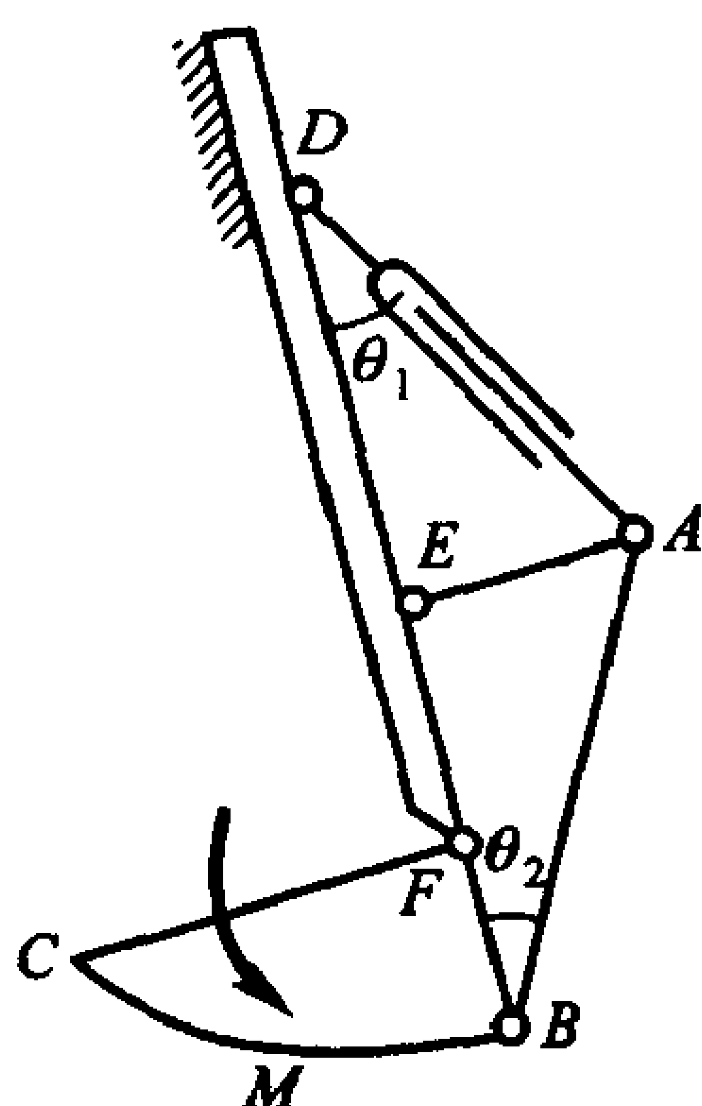
题 15-1 图



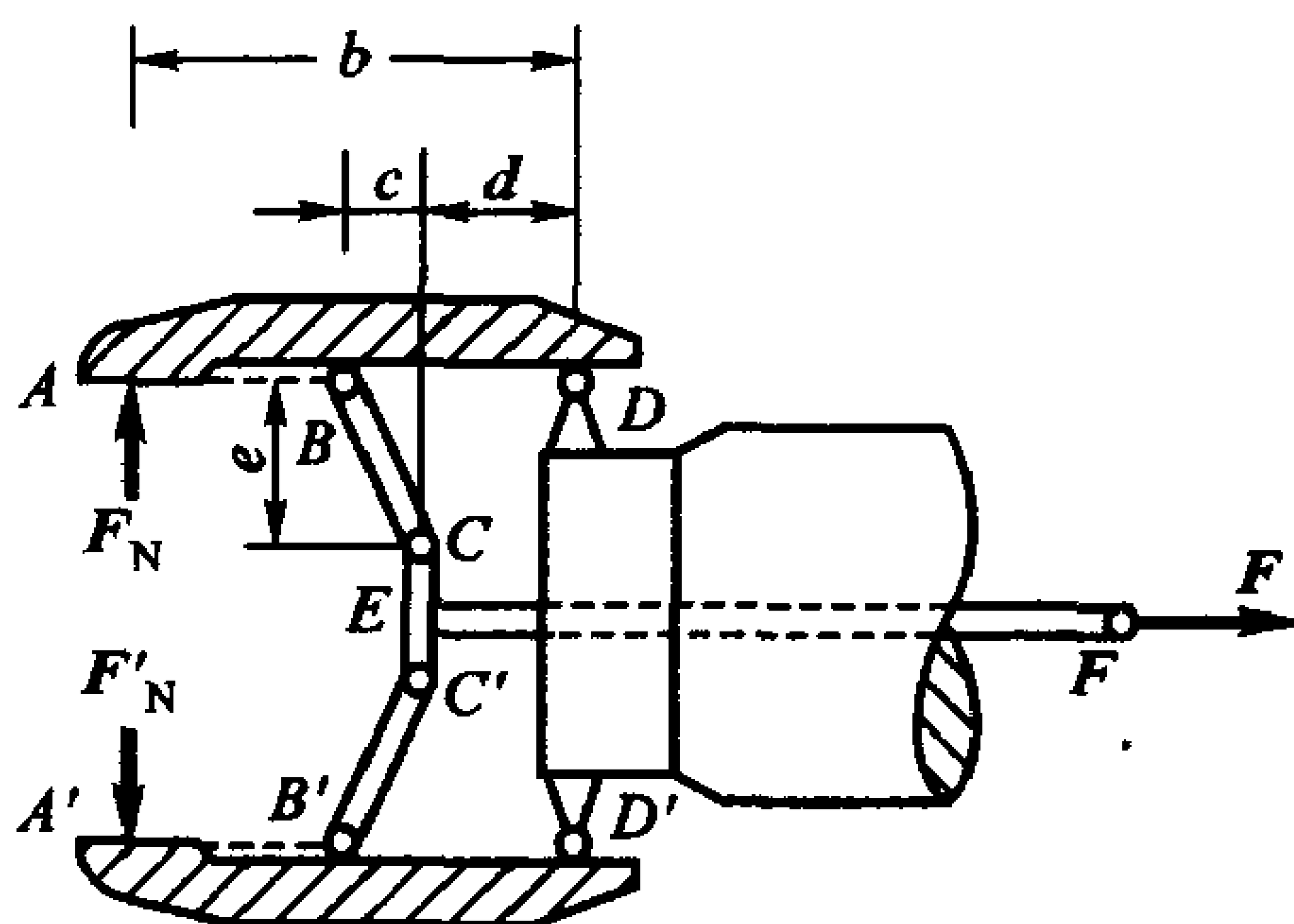
题 15-2 图

15-2　在压缩机的手轮上作用一力偶，其矩为 M。手轮轴的两端各有螺距同为 h，但方向相反的螺纹。螺纹上各套有一个螺母 A 和 B，这两个螺母分别与长为 a 的杆相铰接，四杆形成菱形框，如图所示。此菱形框的点 D 固定不动，而点 C 连接在压缩机的水平压板上。求当菱形框的顶角等于 2θ 时，压缩机对被压物体的压力。

15-3　挖土机挖掘部分示意如图。支臂 DEF 不动，A，B，D，E，F 为铰链，液压油缸 AD 伸缩时可通过连杆 AB 使挖斗 BFC 绕 F 转动，$EA=FB=r$。当 $\theta_1=\theta_2=30^\circ$ 时杆 $AE\perp DF$，此时油缸推力为 F。不计构件重量，求此时挖斗可克服的最大阻力矩 M。



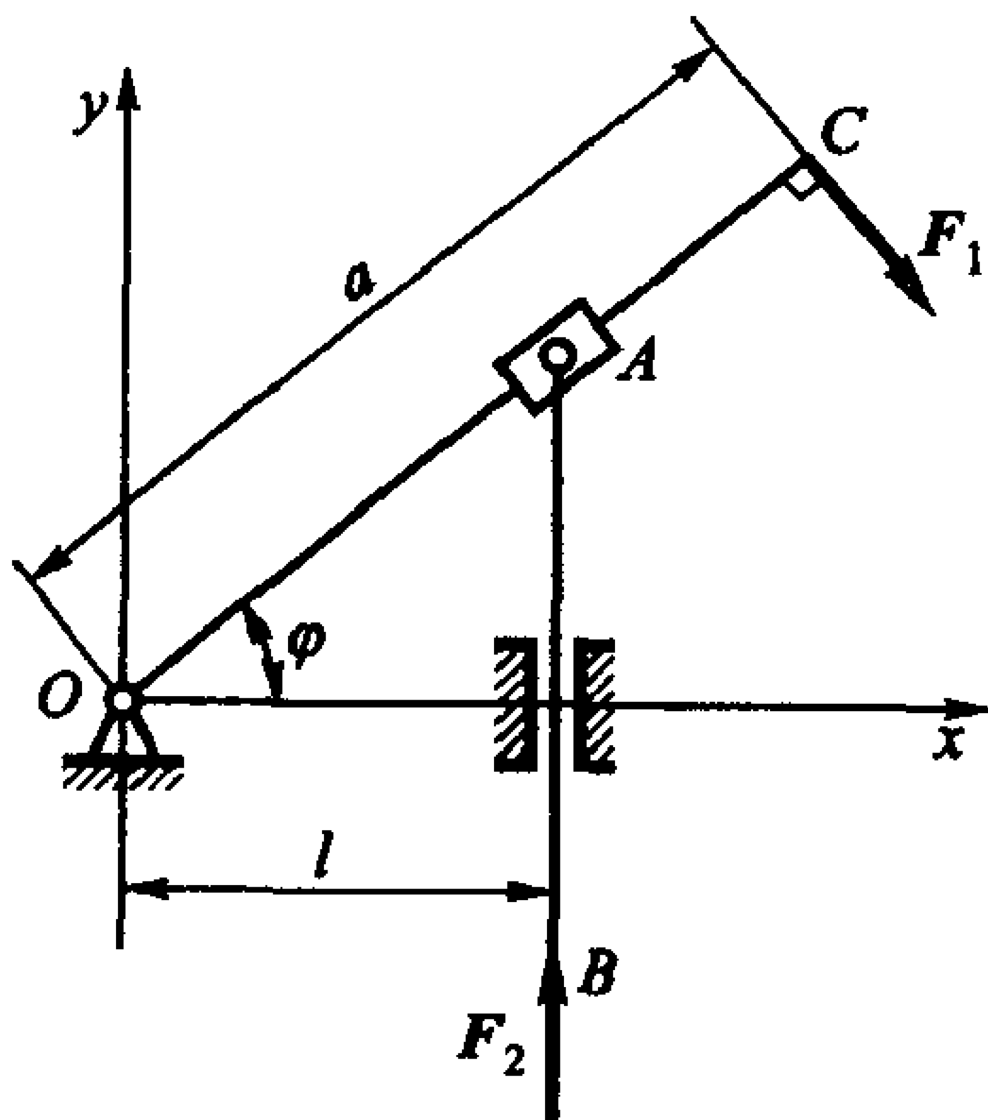
题 15-3 图



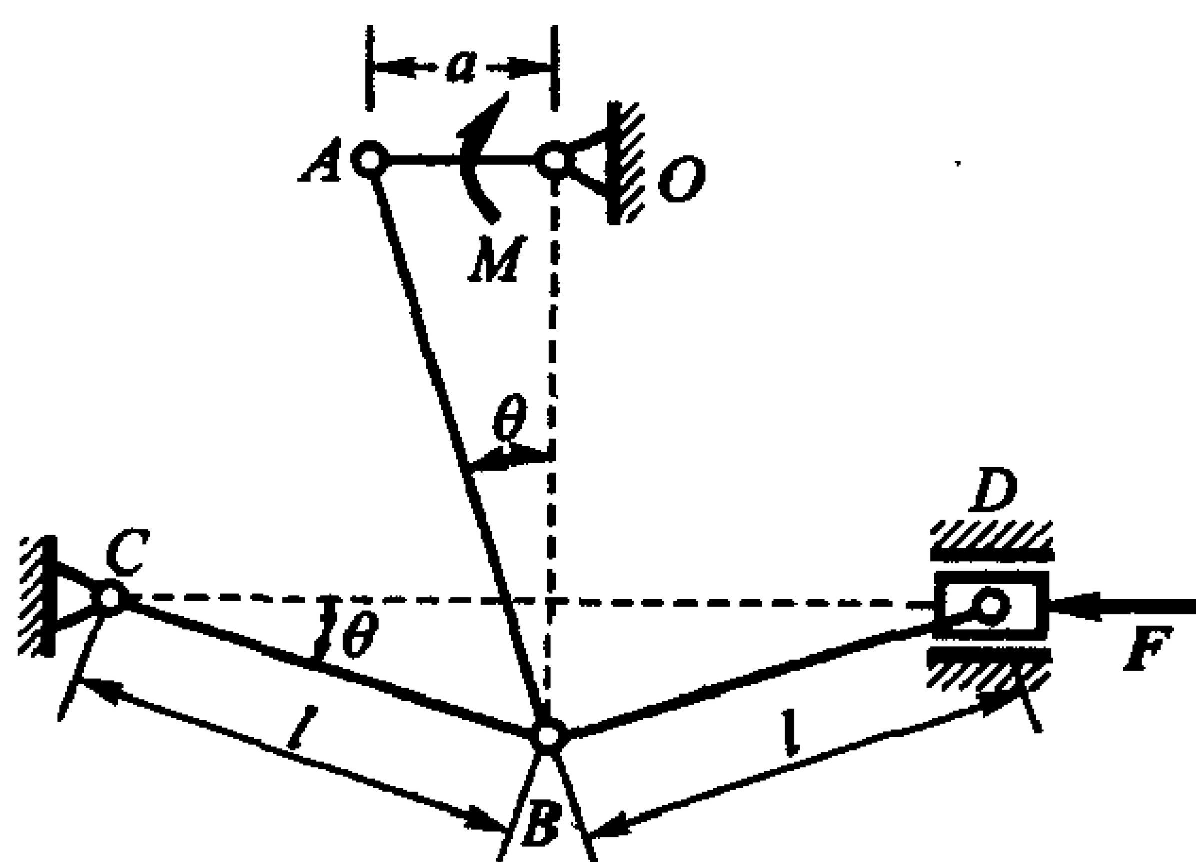
题 15-4 图

15-4　图示远距离操纵用的夹钳为对称结构。当操纵杆 EF 向右移动时，两块夹板就会合拢将物体夹住。已知操纵杆的拉力为 F，在图示位置两夹板正好相互平行，求被夹物体所受的压力。

15-5　在图示机构中，当曲柄 OC 绕轴 O 摆动时，滑块 A 沿曲柄滑动，从而带动杆 AB 在铅直导槽内移动，不计各构件自重与各处摩擦。求机构平衡时力 F_1 与 F_2 的关系。



题 15-5 图



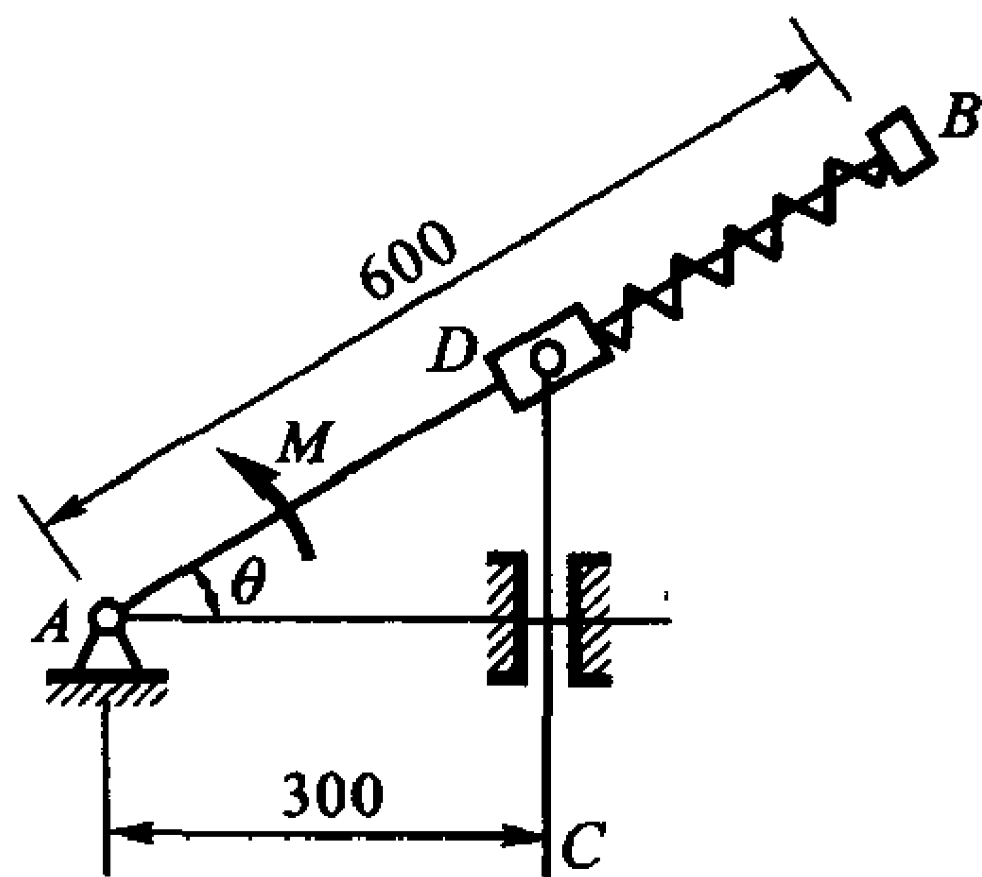
题 15-6 图

15-6　在图示机构中，曲柄 OA 上作用一力偶，其矩为 M，另在滑块 D 上作用水平力 F。机构尺寸如图所示，不计各构件自重与各处摩擦。求当机构平衡时，力 F 与力偶矩 M 的关系。

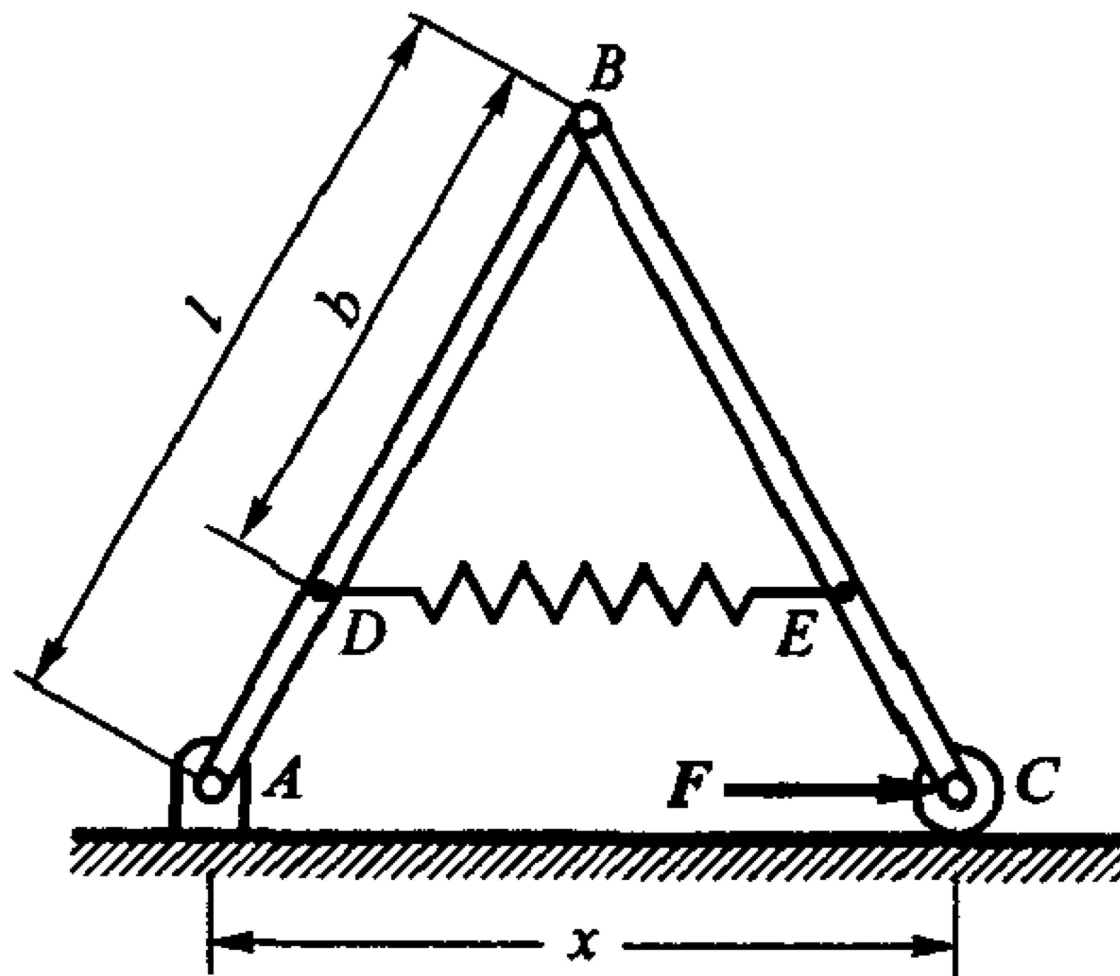
15-7　图示滑套 D 套在直杆 AB 上，并带动杆 CD 在铅直滑道上滑动。已知 $\theta=0°$ 时弹簧为原长，弹簧刚度系数为 5 kN/m，不计各构件自重与各处摩擦。求在任意位置平衡时，应加多大的力偶矩 M?

15-8　如图所示两等长杆 AB 与 BC 在点 B 用铰链连接，又在杆的 D, E 两点连一弹

簧。弹簧的刚度系数为 k,当距离 AC 等于 a 时,弹簧内拉力为零,不计各构件自重与各处摩擦。如在点 C 作用一水平力 $\boldsymbol{F}$,杆系处于平衡,求距离 AC 之值。

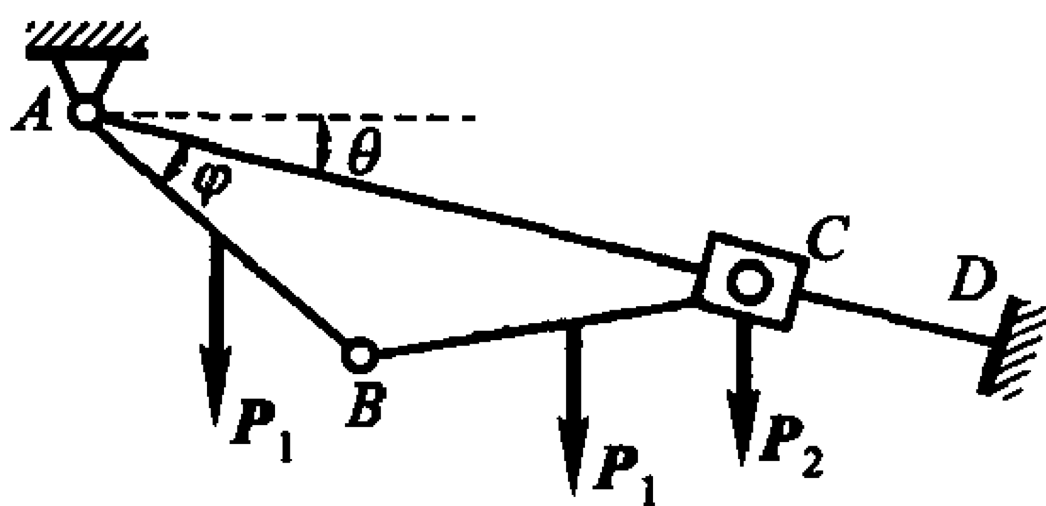


题 15－7 图

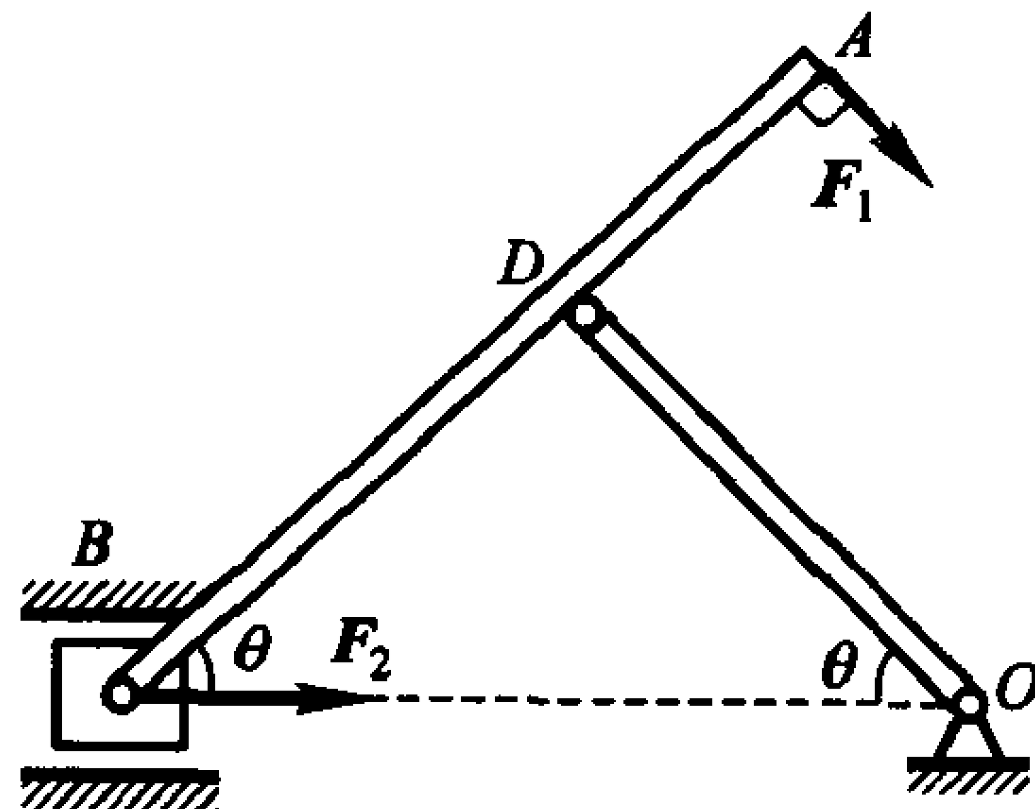


题 15－8 图

15－9　在图示机构中,曲柄 AB 和连杆 BC 为均质杆,具有相同的长度和重量 $\boldsymbol{P}_1$。滑块 C 的重量为 $\boldsymbol{P}_2$,可沿倾角为 θ 的导轨 AD 滑动。设约束都是理想的,求系统在铅垂面内的平衡位置。



题 15－9 图



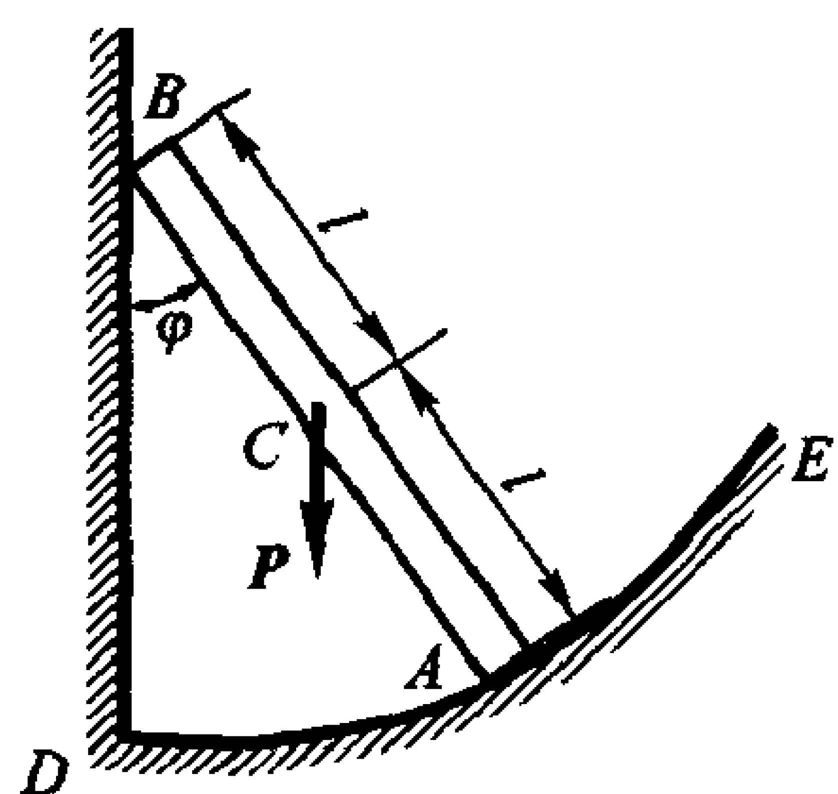
题 15－10 图

15－10　图示机构在力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 作用下在图示位置平衡,不计各构件自重与各处摩擦,$OD=BD=l_1$,$AD=l_2$。求 F_1/F_2 的值。

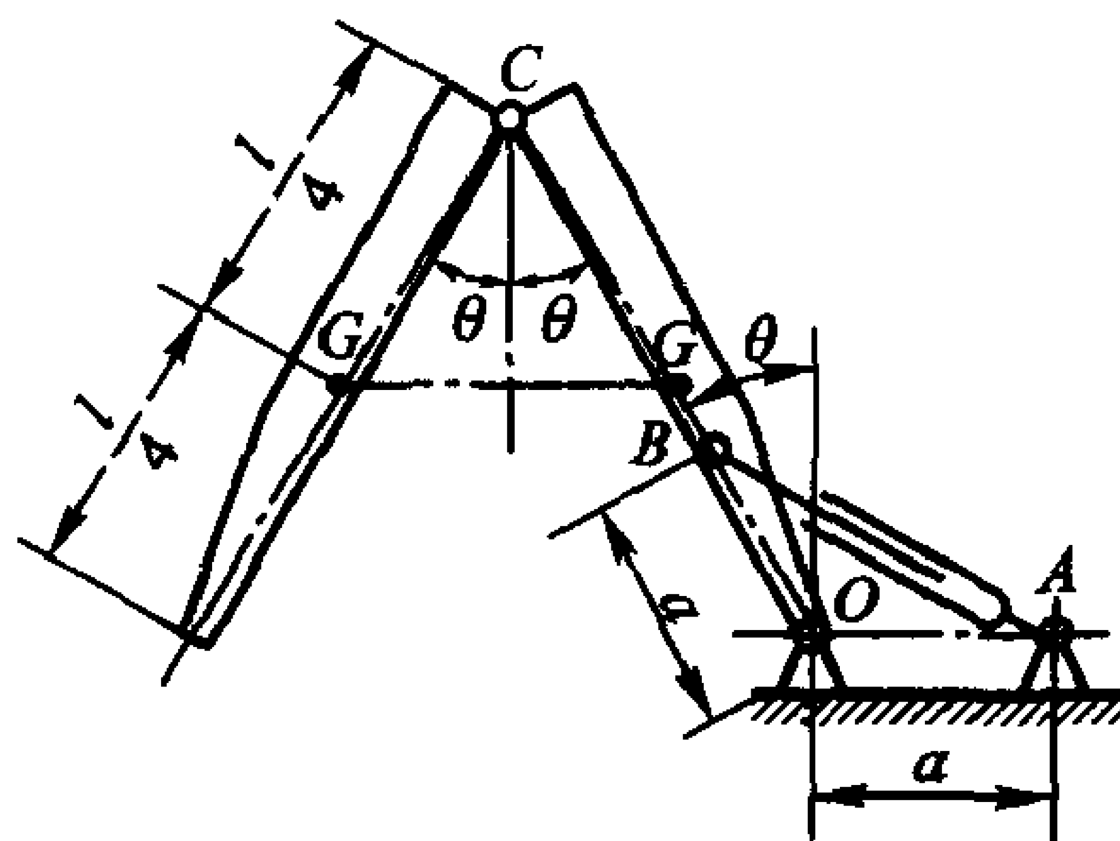
15－11　图示均质杆 AB 长 $2l$,一端靠在光滑的铅直墙壁上,另一端放在固定光滑曲面 DE 上。欲使细杆能静止在铅垂平面的任意位置,问曲面的曲线 DE 的形式应是怎样的?

15－12　跨度为 l 的折叠桥由液压油缸 AB 控制铺设,如图所示。在铰链 C 处有一内部机构,保证两段桥身与铅垂线的夹角均为 θ。如果两段相同的桥身重量都是 $\boldsymbol{P}$,质心 G 位于其中点。求平衡时液压油缸中的力 F 和角 θ 之间的关系。

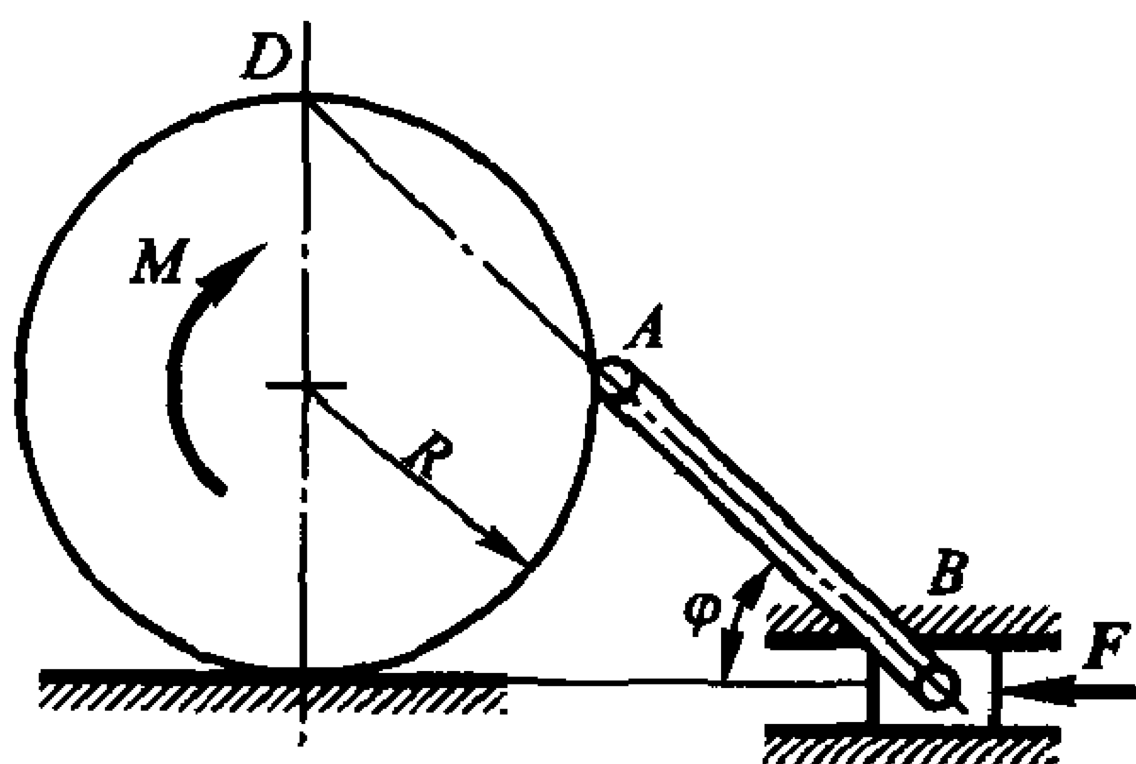
15－13　半径为 R 的滚子放在粗糙水平面上,连杆 AB 的两端分别与轮缘上的点 A 和滑块 B 铰接。现在滚子上施加矩为 M 的力偶,在滑块上施加力 $\boldsymbol{F}$,使系统于图示位置处平衡。设力 $\boldsymbol{F}$ 为已知,忽略滚动摩阻和各构件的重量,不计滑块和各铰链处的摩擦。求力偶矩 M 以及滚子与地面间的摩擦力 $\boldsymbol{F}_s$。



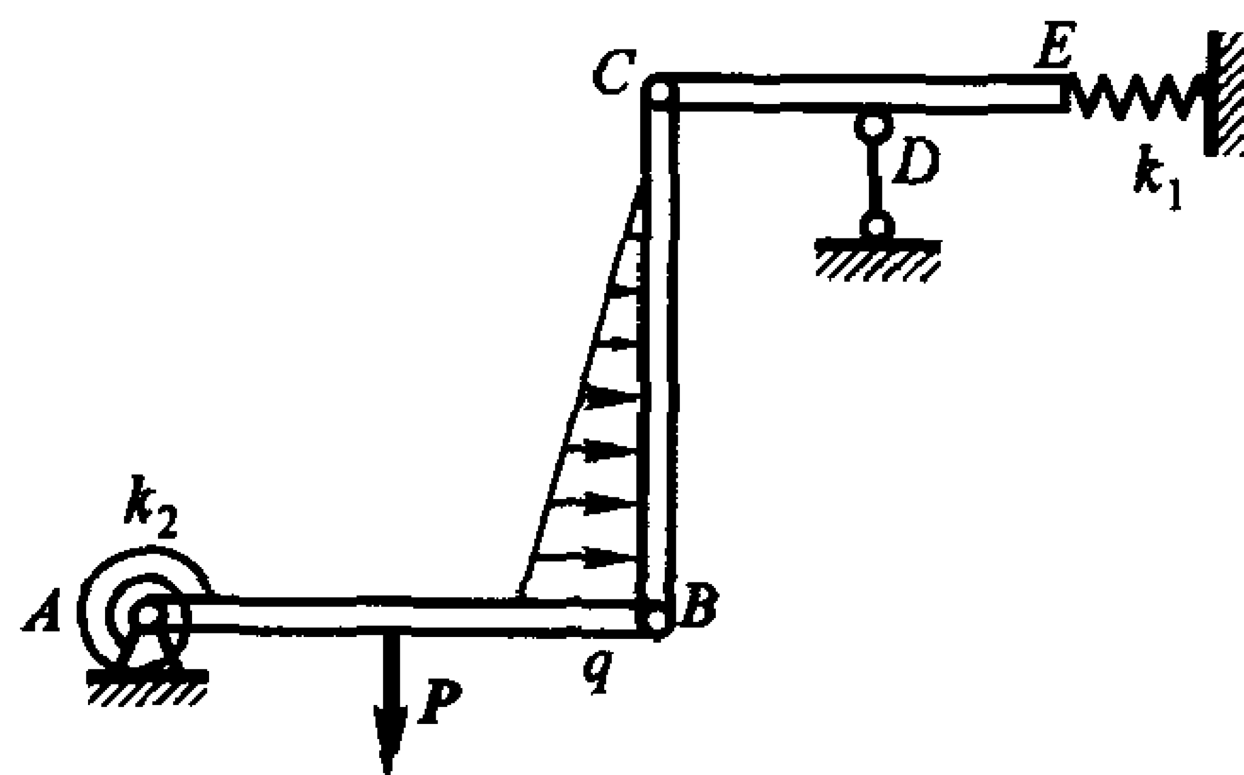
题 15－11 图



题 15－12 图



题 15－13 图

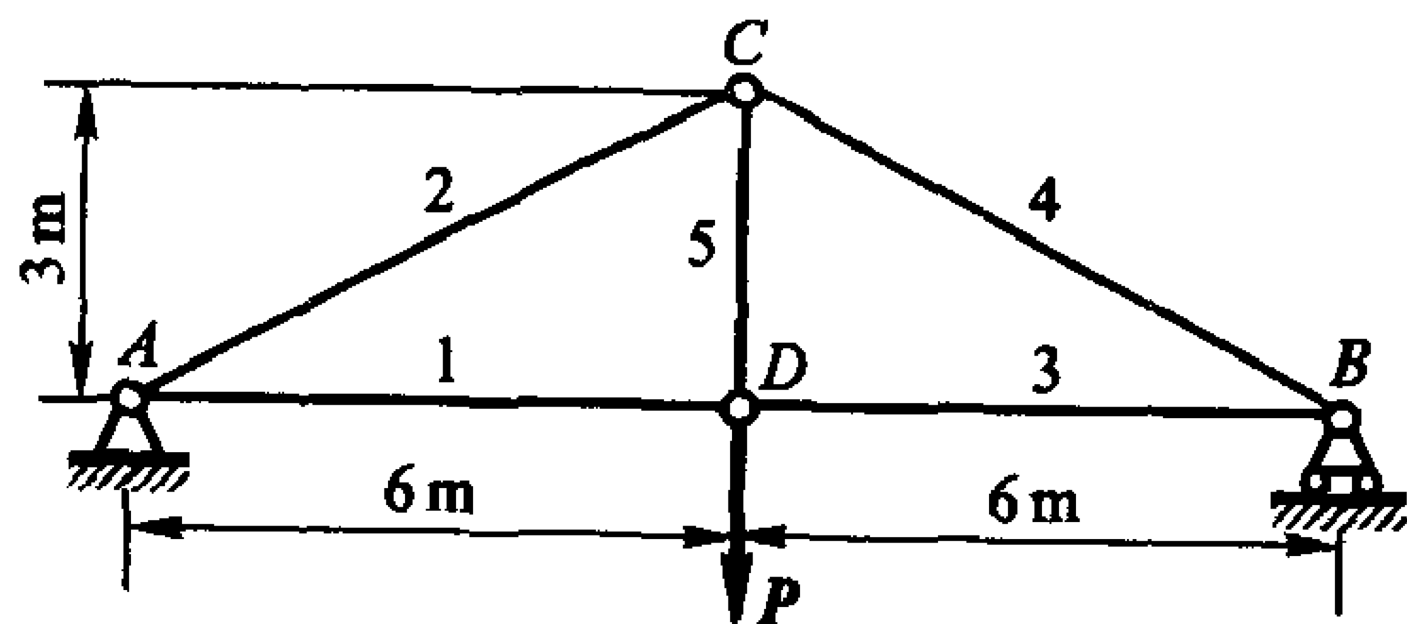


题 15－14 图

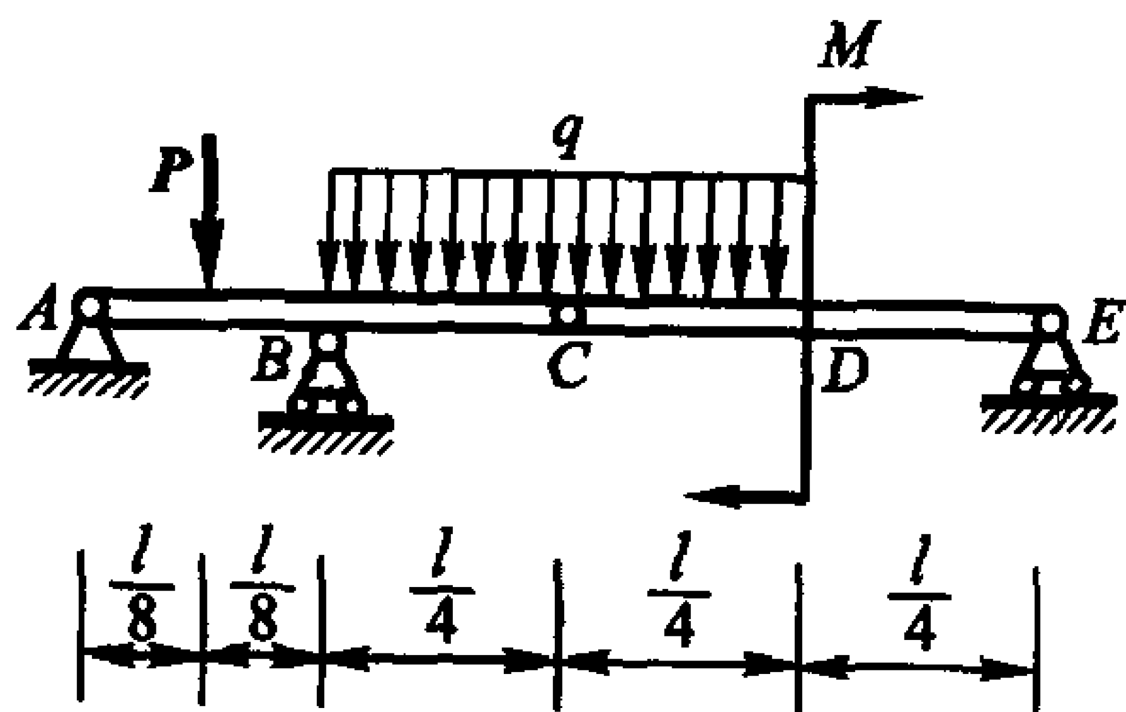
15－14　杆系在铅垂面内平衡，$AB=BC=l$，$CD=DE$，且 AB，CE 为水平，CB 为铅垂。均质杆 CE 和刚度系数为 k_1 的拉压弹簧相连，重量为 P 的均质杆 AB 左端有一刚度系数为 k_2 的螺线弹簧。在 BC 杆上作用有水平的线性分布载荷，其最大载荷集度为 q。不计 BC 杆的重量，求水平弹簧的变形量 δ 和螺线弹簧的扭转角 φ。

15－15　用虚位移原理求图示桁架中杆 3 的内力。

15－16　组合梁载荷分布如图所示，已知跨度 $l=8$ m，$P=4\ 900$ N，均布力 $q=2\ 450$ N/m，力偶矩 $M=4\ 900$ N·m。求支座约束力。



题 15－15 图



题 15－16 图

附录　静力学计算程序选例

一、空间力系主矢、主矩的计算

1. 计算公式

主矢：

$$F_{Rx}=\sum_{i=1}^{n}F_{xi},\ F_{Ry}=\sum_{i=1}^{n}F_{yi},\ F_{Rz}=\sum_{i=1}^{n}F_{zi}$$

$$F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2+F_{Rz}^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{i})=F_{Rx}/F_R,\ \cos(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{j})=F_{Ry}/F_R,\ \cos(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{k})=F_{Rz}/F_R$$

主矩：

$$M_x=\sum_{i=1}^{n}(y_iF_{zi}-z_iF_{yi}),M_y=\sum_{i=1}^{n}(z_iF_{xi}-x_iF_{zi}),M_z=\sum_{i=1}^{n}(x_iF_{yi}-y_iF_{xi})$$

$$M_O=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{i})=M_x/M_O,\ \cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{j})=M_y/M_O,\ \cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{k})=M_z/M_O$$

2. 标识符说明

N(≤20)　力的数目

X(20),Y(20),Z(20)　各力作用点坐标

IN(20),F(20),FX(20),FY(20),FZ(20)　意义如下：

	IN	F	FX	FY	FZ
给定坐标	0	任意	F_x	F_y	F_z
一次投影	1	力的大小	α(度)	β(度)	γ(度)
二次投影	2	力的大小	φ(度)	任意	γ(度)

R　主矢大小

RX,RY,RZ　$\boldsymbol{F}_R$ 的投影

M　对坐标原点的主矩 $\boldsymbol{M}$

MX,MY,MZ　$\boldsymbol{M}$ 的投影

CX,CY,CZ　主矢或主矩矢量的方向余弦

3. 源程序（FORTRAN 语言）

键盘输入（按读入语句顺序）

N,IN,F,FX,FY,FZ,X,Y,Z

屏幕输出

R,RX,RY,RZ,CX,CY,CZ

M,MX,MY,MZ,CX,CY,CZ

程序

```
      PROGRAM PRINVM
C   CALCULATION OF THE PRINCIPAL VECTOR AND MOMENT OF A FORCES SYS-
    TEM
      REAL M,MX,MY,MZ
      DIMENSION IN(20),F(20),X(20),Y(20),Z(20),FX(20),FY(20), * FZ(20)
      DATA RX,RY,RZ,MX,MY,MZ/6 * 0.0/
      WRITE ( * ,10)
10    FORMAT (1X,'N=?')
      READ ( * , * ) N
      WRITE ( * ,20)
20    FORMAT (1X,'IN,F,FX,FY,FZ=?')
      READ ( * , * ) (IN(I),F(I),FX(I),FY(I),FZ(I),I=1,N)
      WRITE ( * ,30)
30    FORMAT (1X,'X,Y,Z=?')
      READ ( * , * ) (X(I),Y(I),Z(I),I=1,N)
      P=0.017 45
      DO 40 I=1,N
      IF (IN(I).EQ.1) THEN
      AL=FX(I) * P
      BA=FY(I) * P
      GA=FZ(I) * P
      FX(I)=F(I) * COS(AL)
      FY(I)=F(I) * COS(BA)
      FZ(I)=F(I) * COS(GA)
      ENDIF
      IF (IN(I).EQ.2) THEN
      FA=FX(I) * P
      GA=FZ(I) * P
      FX(I)=F(I) * SIN(GA) * COS(FA)
      FY(I)=F(I) * SIN(GA) * SIN(FA)
      FZ(I)=F(I) * COS(GA)
      ENDIF
40    CONTINUE
      DO 50 I=1,N
      RX=RX+FX(I)
```

```
      RY=RY+FY(I)
50    RZ=RZ+FZ(I)
      R=SQRT(RX*RX+RY*RY+RZ*RZ)
      CX=RX/R
      CY=RY/R
      CZ=RZ/R
      WRITE (*,60) R,RX,RY,RZ
60    FORMAT (10X,'PRINCIPAL VECTOR',/,1X,'R=',E10.4,5X,
   *          'RX=',E10.4,5X,'RY=',E10.4,5X,'RZ=',E10.4)
      WRITE (*,70) CX,CY,CZ
70    FORMAT (1X,'COS(R,I)=',F6.4,5X,'COS(R,J)=',F6.4,5X,'
   *          COS(R,K)=',F6.4)
      DO 80 I=1,N
      MX=MX+Y(I)*FZ(I)-Z(I)*FY(I)
      MY=MY+Z(I)*FX(I)-X(I)*FZ(I)
80    MZ=MZ+X(I)*FY(I)-Y(I)*FX(I)
      M=SQRT(MX*MX+MY*MY+MZ*MZ)
      CX=MX/M
      CY=MY/M
      CZ=MZ/M
      WRITE (*,90) M,MX,MY,MZ
90    FORMAT (10X,'PRINCIPAL MOMENT',/,1X,'M=',E10.4,
   *        5X,'MX=',E10.4,5X,'MY=',E10.4,5X,'MZ=',E10.4)
      WRITE (*,100) CX,CY,CZ
100   FORMAT (1X,'COS(M,I)=',F6.4,5X,'COS(M,J)=',F6.4,5X,
   *        'COS(M,K)=',F6.4)
      STOP 1 000
      END
```

4. 算例(习题4 1)

屏幕显示:N=?

键盘输入:3

屏幕显示:IN,F,FX,FY,FZ=?

键盘输入:0, 10 000., 0., 0., 100.,

1, 300., 123.7, 33.7, 90.,

2, 200., 180., 10 000., 116.6

屏幕显示:X,Y,Z=?

键盘输入:200., 0., 100.,

```
0.,300., 100.,
200., 300., 100.
```

屏幕输出结果：

```
        PRINCIPAL VECTOR
R= .4262E+03   RX= -.3452E+03   RY=.2497E+03   RZ=.1061E+02
COS(R,I)= -.8100     COS(R,J)= .5859     COS(R,K)= .0249
        PRINCIPAL MOMENT
M- .1215E+06  MX= -.5182E+05  MY=  .3664E+05  MZ= .1036E+06
COS(M,I)= -.4265     COS(M,J)= -.3016     COS(M,K)= .8527
```

二、重心(或形心)计算

1. 计算公式

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

$$x_C = \frac{\sum x_i P_i}{P}, \quad y_C = \frac{\sum y_i P_i}{P}, \quad z_C = \frac{\sum z_i P_i}{P}$$

2. 标识符说明

N(≤20)　力(或面块、体块)的数目

W(20)　力(或面积、体积)的代数值

X(20),Y(20),Z(20)　力作用点(或面块、体块中心)的坐标

XC,YC,ZC　重心(或形心)坐标

3. 源程序(FORTRAN 语言)

键盘输入(按读入语句顺序)

N,W,X,Y,Z

屏幕输出

XC,YC,ZC

程序

```
      PROGRAM CENGRV
C   CALCULATION THE CENTER OF GRAVITY
      DIMENSION W(20),X(20),Y(20),Z(20)
      WRITE ( * ,10)
      READ ( * , * ) N
      WRITE ( * ,20)
      READ ( * , * ) (W(I),X(I),Y(I),Z(I),I=1,N)
10    FORMAT (1X,'N=?')
20    FORMAT (1X,'W,X,Y,Z=?')
      WW=0
      WX=0
      WY=0
```

```
      WZ=0
      DO 50 I=1, N
      WW=WW+W(I)
      WX=WX+W(I)*X(I)
      WY=WY+W(I)*Y(I)
50    WZ=WZ+W(I)*Z(I)
      XC=WX/WW
      YC-WY/WW
      ZC=WZ/WW
      WRITE (*,70) XC,YC,ZC
70    FORMAT (5X,'XC=',E10.4,10X,'YC=',E10.4,10X,'ZC=',E10.4)
      STOP 1 000
      END
```

4. 算例(习题 4－24)

屏幕显示:N=?

键盘输入:2

屏幕显示:W,X,Y,Z=?

键盘输入:16 000.，60.，20.，－5.，

　　192 000.，20.，40.，－30.

屏幕输出结果:

XC= .230 8E+02　　YC= .384 6E+02　　ZC=－.280 8E+02

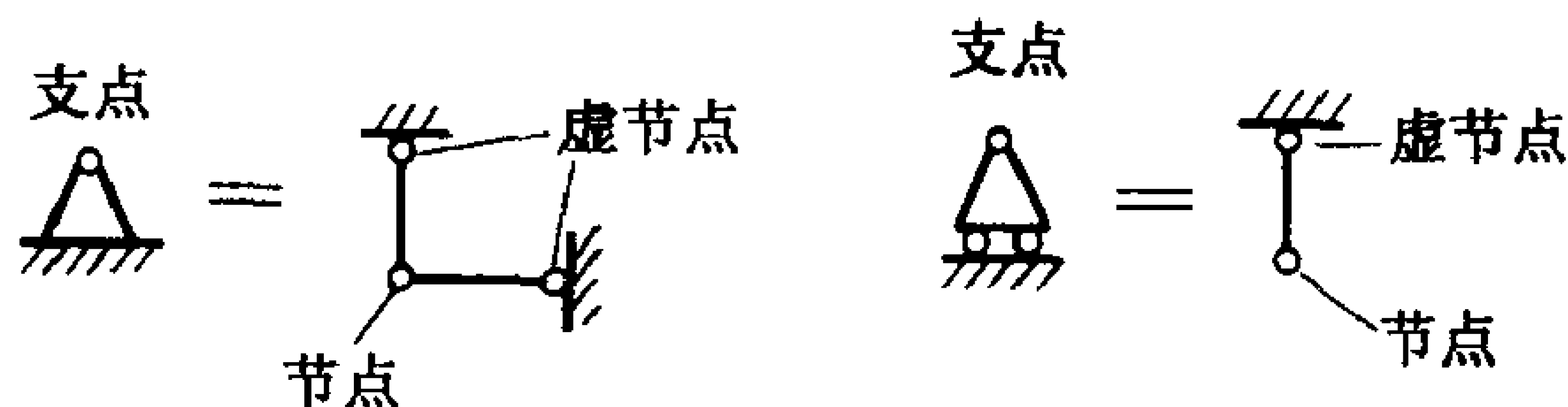
三、平面静定桁架计算

1. 计算方法

(1) 节点法;

(2) 载荷集中于节点,均按 x(水平向右)与 y(铅垂向上)给出;

(3) 约束均用约束杆(小二力杆)给出,约束杆的固定点称为虚节点;如



(4) 每个节点(包括支点,不包括虚节点)列出 x,y 向两个投影方程,联立求解杆的内力及约束杆的约束力;

(5) 杆内力(包括约束杆)以拉为正,压为负。

2. 标识符说明

N(≤20)　节点数

NI(≤10) 虚节点数

X(30),Y(30) 节点及虚节点 x,y 坐标

M(≤40) 杆件(包括约束杆)数目

ID(2,40) 杆件两端节点号码

NQ(≤18) 受有载荷的节点数目

NNQ(18) 受有载荷节点的号码

QX(18),QY(18) 受载荷节点 x,y 方向载荷

H(40,40) 平衡方程组系数矩阵

Q(40) 节点载荷列阵(求解后为杆件内力)

3. 源程序 (FORTRAN 语言)

输入数据文件(INPUT.DAT)内容 (按读语句顺序)

N,M,NI,NQ,X,Y,ID,NNQ,QX,QY

输出数据文件(OUTPUT.DAT) 内容

Q (各杆内力及约束杆约束力)

程序

```
      PROGRAM TRUSS
C     ANALYSIS OF SIMPLE TRUSS
      DIMENSION X(30),Y(30),NNQ(18),QX(18),QY(18),ID(2,40)
      COMMON H(40,40),Q(40)
      DO 5 I=1,40
      Q(I)=0.0
      DO 5 J=1,40
5     H(I,J)=0.0
      OPEN (8,FILE='INPUT.DAT')
      OPEN (9,FILE='OUTPUT.DAT')
      REWIND 8
      REWIND 9
      READ (8,*) N,M,NI,NQ
      WRITE (*,*) N,M,NI,NQ
      NM=N+NI
      READ (8,*) (X(I),Y(I),I=1,NM)
      WRITE (*,*) (X(I),Y(I),I=1,NM)
      READ (8,*) (ID(1,I),ID(2,I),I=1,M)
      WRITE (*,*) (ID(1,I),ID(2,I),I=1,M)
      READ (8,*) (NNQ(I),QX(I),QY(I),I=1,NQ)
      WRITE (*,*) (NNQ(I),QX(I),QY(I),I=1,NQ)
      DO 10 I=1, NQ
      NN=NNQ(I)
```

```
      Q(2 * NN - 1) = - QX(I)
10    Q(2 * NN) = - QY(I)
      WRITE ( * , * ) Q
      DO 80 I = 1,N
      DO 80 J = 1,M
      IF (I.EQ.ID(1,J)) THEN
      II = I
      JJ = ID(2,J)
      GOTO 50
      ENDIF
      IF (I.EQ.ID(2,J)) THEN
      II = I
      JJ = ID(1,J)
      GOTO 50
      ENDIF
      GOTO 80
50    XX = X(JJ) - X(II)
      YY = Y(JJ) - Y(II)
      SS = SQRT(XX * XX + YY * YY)
      HX = XX/SS
      HY = YY/SS
      WRITE ( * , * ) I,J,II,JJ,HX,HY
      H(2 * I - 1,J) = H(2 * I - 1,J) + HX
      H(2 * I,J) = H(2 * I,J) + HY
80    CONTINUE
      NN = 2 * N
      WRITE ( * , * ) ((H(I,J),J = 1,NN),I = 1,NN)
      CALL SOLVE (NN)
      WRITE ( * ,101) (I,Q(I),I = 1,M)
      WRITE (9,101) (I,Q(I),I - 1,M)
101   FORMAT (10X,'FORCE IN MEMBER',I5,5X,E10.4)
      STOP 1 000
      END

      SUBROUTINE SOLVE (N)
      COMMON A(40,40),B(40)
      DO 80 M = 1,N
      P = 0.
```

```
      DO 10 I=M,N
      DO 10 J=1,N
      IF (ABS(A(I,J)).LE.P) GOTO 10
      P=ABS(A(I,J))
      K=I
      L=J
10    CONTINUE
      DO 20 J=1,N
      R=A(K,J)
      A(K,J)=A(M,J)
20    A(M,J)=R
      R=B(K)
      B(K)=B(M)
      B(M)=R
      DO 60 I=1,N
      R=-A(I,L)/A(M,L)
      IF (I.EQ.M) GOTO 60
      DO 40 J=1,N
40    A(I,J)=A(I,J)+A(M,J)*R
      B(I)=B(I)+B(M)*R
60    CONTINUE
      R=A(M,L)
      DO 70 J=1,N
70    A(M,J)=A(M,J)/R
80    B(M)=B(M)/R
      DO 100 J=1,N
      DO 100 I=1,N
      IF (A(I,J).LT.0.5) GOTO 100
      DO 90 K=1,N
      R=A(I,K)
      A(I,K)=A(J,K)
90    A(J,K)=R
      R=B(I)
      B(I)=B(J)
      B(J)=R
100   CONTINUE
      RETURN
      END
```

参考文献

1 哈尔滨工业大学理论力学教研室编.理论力学:上册,下册.第四版.北京:高等教育出版社,1982

2 哈尔滨工业大学理论力学教研室编.理论力学:上册,下册.第五版.北京:高等教育出版社,1997

3 朱照宣,周起钊,殷金生,理论力学:上册,下册.北京:北京大学出版社,1982

4 А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. Курс теоретической механики. Москва: Санкт-Петербург, 1999

5 王铎主编.理论力学解题指导及习题集.北京:高等教育出版社,1979

6 清华大学理论力学教研组编.理论力学:上册,中册,下册.第四版.北京:高等教育出版社,1994

习题答案

第 二 章

2－1　$F_R=161.2\ \text{N}$，　$\angle(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{F}_1)=29°44'$

2－2　$F_R=5\ 000\ \text{N}$，　$\angle(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{F}_1)=38°28'$

2－3　$F_{AB}=54.64\ \text{kN}$(拉)，　$F_{CB}=74.64\ \text{kN}$(压)

2－4　$F_2=173\ \text{kN}$，　$\gamma=95°$

2－5　$F_A=\dfrac{\sqrt{5}}{2}F\swarrow$，　$F_D=\dfrac{1}{2}F\uparrow$

2－6　$F_C=2\ 000\ \text{N}, F_A=F_B=2\ 010\ \text{N}$

2－7　$F_H=\dfrac{F}{2\sin^2\theta}$

2－8　$F=80\ \text{kN}$

2－9　$F_1:F_2=0.644$

2－10　$M_A(\boldsymbol{F})=-Fb\cos\theta$，　$M_B(\boldsymbol{F})=F(a\sin\theta-b\cos\theta)$

2－11　$M_{阻}=4.5\ \text{kN·m}$

2－12　(a)、(b)$F_A=F_B=M/l$；　(c) $F_A=F_B=M/l\cdot\cos\theta$

2－13　$F_A=F_C=\dfrac{M}{2\sqrt{2}a}$

2－14　$M_2=\dfrac{r_2}{r_1}M_1, F_{O1}=\dfrac{M_1}{r_1\cos\theta}\swarrow, F_{O2}=\dfrac{M_1}{r_1\cos\theta}\nearrow$

2－15　$F_A=\dfrac{20}{\sqrt{3}}\ \text{kN}\swarrow$，　$F_B=\dfrac{20}{\sqrt{3}}\text{kN}\nearrow$，　$F_{EC}=10\sqrt{2}\ \text{kN}$(压)

2－16　$F_A=\sqrt{2}\dfrac{M}{l}\searrow$

2－17　$F=\dfrac{M}{a}\cot 2\theta$

第 三 章

3－1　$F'_R=466.5\ \text{N}$，　$M_O=21.44\ \text{N·m}$；

　　$F_R=466.5\ \text{N}$，　$d=45.96\ \text{mm}$

3－2　(1) $F'_R=150\ \text{N}\leftarrow$，　$M_O=900\ \text{N·mm}\circlearrowright$；

　　(2) $F=150\ \text{N}\leftarrow$，　$y=-6\ \text{mm}$

3－3　$F_x=4\ \text{kN}$，　$F_{y1}=28.73\ \text{kN}$，　$F_{y2}=1.269\ \text{kN}$

3-4 $F_{Ax}=0$, $F_{Ay}=6\ \text{kN}$, $M_A=12\ \text{kN·m}$

3-5 $F_O=-385\ \text{kN}$, $M_O=-1\,626\ \text{kN·m}$

3-6 (a) $F_{Ax}=0$, $F_{Ay}=-\frac{1}{2}\left(F+\frac{M}{a}\right)$; $F_B=\frac{1}{2}\left(3F+\frac{M}{a}\right)$;

(b) $F_{Ax}=0$, $F_{Ay}=-\frac{1}{2}\left(F+\frac{M}{a}-\frac{5}{2}qa\right)$; $F_B=\frac{1}{2}\left(3F+\frac{M}{a}-\frac{1}{2}qa\right)$

3-7 (a) $F_A=33.23\ \text{kN}$, $F_B=96.77\ \text{kN}$; (b) $P_{\max}=52.22\ \text{kN}$

3-8 $P_2=333.3\ \text{kN}$; $x=6.75\ \text{m}$

3-9 $F_{Ax}=-4.661\ \text{kN}$, $F_{Ay}=-47.62\ \text{kN}$; $F_B=22.4\ \text{kN}$(杆 BC 受拉力)

3-10 $F_{BC}=848.5\ \text{N}$; $F_{Ax}=2\,400\ \text{N}$, $F_{Ay}=1\,200\ \text{N}$

3-11 $F_A=-48.33\ \text{kN}$, $F_B=100\ \text{kN}$, $F_D=8.333\ \text{kN}$

3-12 (a) $F_{Ax}=\frac{M}{a}\tan\theta$, $F_{Ay}=-\frac{M}{a}$, $M_A=-M$; $F_B=F_C=\frac{M}{a\cos\theta}$

(b) $F_{Ax}=\frac{qa}{2}\tan\theta$, $F_{Ay}=\frac{1}{2}qa$, $M_A=\frac{1}{2}qa^2$; $F_{Bx}=\frac{qa}{2}\tan\theta$, $F_{By}=\frac{1}{2}qa$,

$F_C=\frac{qa}{2\cos\theta}$

3-13 $F_A=-15\ \text{kN}$, $F_B=40\ \text{kN}$, $F_C=5\ \text{kN}$, $F_D=15\ \text{kN}$

3-14 $M=\frac{Fr\cos(\beta-\theta)}{\sin\beta}$

3-15 $M=70.36\ \text{N·m}$

3-16 $M=\frac{Prr_1}{r_2}$

3-17 $M=\frac{r_1r_3r}{r_2r_4}P$; $F_{3x}=\frac{r}{r_4}P\tan\theta, F_{3y}=P\left(1-\frac{r}{r_4}\right)$

3-18 $F_{Ax}=-F_{Bx}=120\ \text{kN}$, $F_{Ay}=F_{By}=300\ \text{kN}$

3-19 $F_{Ax}=0$, $F_{Ay}=-\frac{M}{2a}$; $F_{Dx}=0$, $F_{Dy}=\frac{M}{a}$; $F_{Bx}=0$, $F_{By}=-\frac{M}{2a}$

3-20 $F_{Ax}=-F$, $F_{Ay}=-F$; $F_{Dx}=2F$, $F_{Dy}=F$; $F_{Bx}=-F$, $F_{By}=0$

3-21 $F_{Ax}=1\,200\ \text{N}$, $F_{Ay}=150\ \text{N}$; $F_B=1\,050\ \text{N}$; $F_{BC}=1\,500\ \text{N}$(压)

3-22 $AC=x=a+\frac{F}{k}\left(\frac{l}{b}\right)^2$

3-23 $F_{Ax}=-120\ \text{kN}$, $F_{Ay}=-160\ \text{kN}$; $F_B=160\sqrt{2}\ \text{kN}$; $F_C=-80\ \text{kN}$

3-24 $F_{Ax}=267\ \text{N}$, $F_{Ay}=-87.5\ \text{N}$; $F_B=550\ \text{N}$; $F_{Cx}=209\ \text{N}$,

$F_{Cy}=-187.5\ \text{N}$

3-25 $F_D=84\ \text{kN}$

3-26 $F_D=\frac{\sqrt{5}}{2}qa$

3-27 $F_{Ax}=0$, $F_{Ay}=15.1\ \text{kN}$, $M_A=68.4\ \text{kN·m}$;

$F_{Bx}=-22.8\ \text{kN}$, $F_{By}=-17.85\ \text{kN}$;

$F_{Cx}=22.8\text{ kN}$， $F_{Cy}=4.55\text{ kN}$

*3-28 (1) $F_{Ax}=\frac{3}{2}F_1$， $F_{Ay}=F_2+\frac{F_1}{2}$， $M_A=-\left(F_2+\frac{F_1}{2}\right)a$；

(2) $F_{BAx}=-\frac{3}{2}F_1$， $F_{BAy}=-\left(F_2+\frac{F_1}{2}\right)$； $F_{BTx}=\frac{3}{2}F_1$， $F_{BTy}=\frac{F_1}{2}$

*3-29 $F_{Ax}=-qa$， $F_{Ay}=F+qa$， $M_A=(F+qa)a$； $F_{BCx}=\frac{1}{2}qa$，

$F_{BCy}=qa$；$F_{BAx}=-\frac{1}{2}qa$，$F_{BAy}=-(F+qa)$

3-30 $F_E=\sqrt{2}F$； $F_{Ax}=F-6aq$， $F_{Ay}=2F$， $M_A=5aF+18a^2q$

3-31 $F_{Ax}=-60\text{ kN}$， $F_{Ay}=30\text{ kN}$； $F_{BD}=100\text{ kN}$， $F_{BC}=-50\text{ kN}$，

$F_{Ex}=60\text{ kN}$，$F_{Ey}=30\text{ kN}$

3-32 $F_{AD}=-87.5\text{ kN}$(压)， $F_{AC}=179.2\text{ kN}$(拉)

3-33 $F_{EF}=8.167\text{ kN}$(拉)， $F_{AD}=158\text{ kN}$(压)

3-34 $F_1=-5.333F$(压)， $F_2=2F$(拉)， $F_3=-1.667F$(压)

3-35 $F_{CD}=-0.866F$(压)

3-36 $F_{BD}=-240\text{ kN}$(压)， $F_{BE}=86.53\text{ kN}$(拉)

3-37 $F_4=21.83\text{ kN}$(拉)， $F_5=16.73\text{ kN}$(拉)， $F_7=-20\text{ kN}$(压)，

$F_{10}=-43.64\text{ kN}$(压)

3-38 $F_1=-\frac{4}{9}F$(压)， $F_2=-\frac{2}{3}F$(压)， $F_3=0$

第 四 章

4-1 $F_{Rx}=-345.4\text{ N}$， $F_{Ry}=249.6\text{N}$， $F_{Rz}=10.56\text{ N}$，

$M_x=-51.78\text{ N·m}$， $M_y=-36.65\text{ N·m}$， $M_z=103.6\text{ N·m}$

4-2 $F_R=20\text{ N}$，沿 z 轴正向，作用线的位置由 $x_C=60\text{ mm}$ 和 $y_C=32.5\text{ mm}$来确定。

4-3 $F_{Rx}=-143.9\text{ N}$， $F_{Ry}=1\,011\text{ N}$， $F_{Rz}=-516.9\text{ N}$；

$M_x=-48\text{ N·m}$， $M_y=21.07\text{ N·m}$， $M_z=-19.4\text{ N·m}$

4-4 $M_z=-101.4\text{ N·m}$

4-5 $M=Fa\sin\beta\sin\theta$

4-6 $M_x=\frac{F}{4}(h-3r)$， $M_y=\frac{\sqrt{3}}{4}F(r+h)$， $M_z=-\frac{Fr}{2}$

4-7 $F_A=F_B=-26.39\text{ kN}$(压)， $F_C=33.46\text{ kN}$(拉)

4-8 $F_{CA}=-\sqrt{2}P$(压)， $F_{BD}=P(\cos\theta-\sin\theta)$， $F_{BE}=P(\cos\theta+\sin\theta)$，

$F_{AB}=-\sqrt{2}P\cos\theta$

4-9 $F_1=-5\text{ kN}$(压)， $F_2=-5\text{ kN}$(压)， $F_3=-7.07\text{ kN}$(压)，

$F_4=5\text{ kN}$(拉)， $F_5=5\text{ kN}$(拉)， $F_6=-10\text{ kN}$(压)

4-10 $a=350\text{ mm}$

4-11 $F = 50$ N, $\theta = 143°8'$

4-12 (1) $M = 22.5$ N·m; (2) $F_{Ax} = 75$ N, $F_{Ay} = 0$, $F_{Az} = 50$ N;

(3) $F_x = 75$ N, $F_y = 0$

4-13 $F_{Ox} = 150$ N, $F_{Oy} = 75$ N, $F_{Oz} = 500$ N;

$M_x = 100$ N·m, $M_y = -37.5$ N·m, $M_z = -24.38$ N·m

4-14 $F_1 = 10$ kN, $F_2 = 5$ kN, $F_{Ax} = -5.2$ kN, $F_{Az} = 6$ kN; $F_{Bx} = -7.8$ kN,

$F_{Bz} = 1.5$ kN

4-15 $F_{Ax} = -2.078$ kN, $F_{Az} = -5.708$ kN; $F_{Bx} = -1.093$ kN, $F_{Bz} =$

-3.004 kN; $F_{Cx} = -0.378$ kN, $F_{Cz} = 12.46$ kN; $F_{Dx} = -6.273$ kN,

$F_{Dz} = 23.25$ kN

4-16 $F_{Cx} = -666.7$ N, $F_{Cy} = -14.7$ N, $F_{Cz} = 12\ 640$ N;

$F_{Ax} = 2\ 667$ N, $F_{Ay} = -325.3$ N

4-17 $F = 200$ N; $F_{Bz} = F_{Bx} = 0$; $F_{Ax} = 86.6$ N, $F_{Ay} = 150$ N, $F_{Az} = 100$ N

4-18 $F_1 = F_5 = -F$(压), $F_3 = F$(拉), $F_2 = F_4 = F_6 = 0$

4-19 $M_1 = \frac{b}{a}M_2 + \frac{c}{a}M_3$; $F_{Ay} = \frac{M_3}{a}$, $F_{Az} = \frac{M_2}{a}$;

$F_{Dx} = 0, F_{Dy} = -\frac{M_3}{a}$; $F_{Dz} = -\frac{M_2}{a}$

4-20 $F_B = \frac{P_1 + P_2}{2}$; $F_{Ax} = 0$, $F_{Ay} = -\frac{P_1 + P_2}{2}$, $F_{Az} = P_1 + \frac{P_2}{2}$;

$F_{Cx} = F_{Cy} = 0$, $F_{Cz} = \frac{P_2}{2}$

4-21 $F_1 = F_D$, $F_2 = -\sqrt{2}F_D$, $F_3 = -\sqrt{2}F_D$, $F_4 = \sqrt{6}F_D$

$F_5 = -F - \sqrt{2}F_D$, $F_6 = F_D$

4-22 重心离底面的高度为 0.659 m,离 B 端距离为 1.68 m

4-23 $x_C = 90$ mm

4-24 $x_C = 21.72$ mm, $y_C = 40.69$ mm, $z_C = -23.62$ mm

4-25 $x_C = 21.43$ mm, $y_C = 21.43$ mm, $z_C = -7.143$ mm

4-26 $h = \frac{r}{\sqrt{2}}$

第五章

5-1 $f_s = 0.223$

5-2 $s = 0.456l$

5-3 $f_s = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

5-4 $l_{min} = 100$ mm

5-5 $b_{min}=\frac{f_s h}{3}$，与门重无关

5-6 $\frac{M\sin(\theta-\varphi)}{l\cos\theta\cos(\beta-\varphi)}\leqslant F\leqslant\frac{M\sin(\theta+\varphi)}{l\cos\theta\cos(\beta+\varphi)}$

5-7 $b<7.5$ mm

5-8 $M_{制动}=300$ N·m

5-9 $b\leqslant 110$ mm

5-10 $f_s\geqslant 0.15$

5-11 49.61 N·m$\leqslant M_C\leqslant$70.39 N·m

5-12 40.21 kN$\leqslant P_E\leqslant$104.2 kN

5-13 $e=\frac{f_s D}{2}$

*5-14 $M_{min}=0.212Pr$

*5-15 $F_{min}=240$ N

5-16 $\theta\leqslant 11°25'(\theta=2\varphi_f)$

5-17 $\varphi_A=16°6'$， $\varphi_B=\varphi_C=30°$

5-18 $\frac{\sin\theta-f_s\cos\theta}{\cos\theta+f_s\sin\theta}P\leqslant F\leqslant\frac{\sin\theta+f_s\cos\theta}{\cos\theta-f_s\sin\theta}P$

5-19 $M=P_2(R\sin\theta-r)$； $F_s=P_2\sin\theta$；$F_N=P_1-P_2\cos\theta$

*5-20 $M=1.867$ kN·m， $f_s\geqslant 0.752$

5-21 $\theta=1°9'$

5-22 (a) $F=14.83$ N； (b) $F=10.25$ N，$\theta=24.63°$

5-23 $\tan\theta=\frac{f_s a}{\sqrt{l^2-a^2}}$

5-24 $M=122.5$ N·m

第 六 章

6-1 $x=200\cos\frac{\pi}{5}t$ mm， $y=100\sin\frac{\pi}{5}t$ mm；

轨迹 $\frac{x^2}{40\,000}+\frac{y^2}{10\,000}=1$

6-2 $\frac{(x-a)^2}{(b+l)^2}+\frac{y^2}{l^2}=1$

6-3 对地：$y_A=0.01\sqrt{64-t^2}$ m， $v_A=\frac{0.01t}{\sqrt{64-t^2}}$ m/s，方向铅垂向下；

对凸轮：$x'_A=0.01t$ m， $y'_A=0.01\sqrt{64-t^2}$ m， $v_{Ax'}=0.01$ m/s，

$v_{Ay'}=-\frac{0.01t}{\sqrt{64-t^2}}$ m/s

6-4 $y=l\tan kt$；

$v = lk\sec^2 kt$；　$a = 2lk^2 \tan kt \sec^2 kt$

$\theta = \frac{\pi}{6}$时，$v = \frac{4}{3}lk$，　$a = \frac{8\sqrt{3}}{9}lk^2$

$\theta = \frac{\pi}{3}$时，$v = 4lk$，　$a = 8\sqrt{3}lk^2$

6-5　$v = -\frac{v_0}{x}\sqrt{x^2 + l^2}$；　$a = -\frac{v_0^2 l^2}{x^3}$

6-6　$y = e\sin \omega t + \sqrt{R^2 - e^2\cos^2 \omega t}$；　$v = e\omega\left[\cos \omega t + \frac{e\sin 2\omega t}{2\sqrt{R^2 - e^2\cos^2 \omega t}}\right]$

6-7　(1) 自然法：$s = 2R\omega t$；　$v = 2R\omega$；　$a_t = 0$，　$a_n = 4R\omega^2$；

(2) 直角坐标法：$x = R + R\cos 2\omega t$，　$y = R\sin 2\omega t$

$v_x = -2R\omega\sin 2\omega t$，　$v_y = 2R\omega\cos 2\omega t$；

$a_x = -4R\omega^2\cos 2\omega t$，　$a_y = -4R\omega^2\sin 2\omega t$

6-8　$v = ak$，$v_r = -ak\sin kt$

6-9　$x = r\cos\omega t + l\sin\frac{\omega t}{2}$，　$y = r\sin\omega t - l\cos\frac{\omega t}{2}$

$v = \omega\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} - rl\sin\frac{\omega t}{2}}$；　$a = \omega^2\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{16} - \frac{rl}{2}\sin\frac{\omega t}{2}}$

6-10　$\rho = 5$ m，　$a_t = 8.66\ \mathrm{m/s^2}$

6-11　$v_M = v\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}$；　$a_M = -\frac{v^2}{4x}\sqrt{\frac{2p}{x}}$

****6-12**　$\rho = \frac{v_0}{\omega_0}\varphi$

****6-13**　$\rho = r_0 e^{\frac{k}{\omega_0}\varphi}$

****6-14**　$\varphi = kt$；　$\rho = b + 2a\cos kt$

轨迹为螺旋线：$\rho = b + 2a\cos\varphi$

$v = k\sqrt{4a^2 + b^2 + 4ab\cos kt}$；　$a = k^2\sqrt{16a^2 + b^2 + 8ab\cos kt}$

****6-15**　$a_{\max} = \sqrt{16\pi^4 f^4 z_0^2 + \omega^4 r^2}$

****6-16**　$a_\rho = b\dot{\varphi}^2(\tan^2\gamma\sin^2\theta - 1)e^{-\tan\gamma(\sin\theta)\varphi}$，式中 $\tan\theta = \frac{b}{h}$

****6-17**　$v_r = 0$，　$v_\theta = \frac{-h\omega}{\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2R}\right)^2}}$，　$v_\varphi = R\omega\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2R}\right)^2}$

第 七 章

7-1　$x = 0.2\cos 4t$ m；$v = -0.4$ m/s；$a = -2.771\ \mathrm{m/s^2}$

7-2　$\varphi = \frac{1}{30}t$ rad，　$x^2 + (y + 0.8)^2 = 1.5^2$

7-3　$v_C = 9.948$ m/s；　轨迹为以半径为 0.25 m 的圆

7-4 $\omega=\frac{v}{2l}$; $\alpha=-\frac{v^2}{2l^2}$

7-5 $\theta_{OA}=\arctan\frac{\sin\omega_0 t}{\frac{h}{r}-\cos\omega_0 t}$

7-6 (1) $\alpha_2=\frac{5\,000\pi}{d^2}$ rad/s^2; (2) $a=592.2$ m/s^2

7-7 $h_1=2$ mm

7-8 $\alpha=\frac{av^2}{2\pi r^3}$

7-9 $\omega_2=0$, $\alpha_2=-\frac{lb\omega^2}{r^2}$

7-10 $\varphi=\frac{r_2\alpha_2}{2l}t^2$

7-11 $\omega=\frac{v}{2R\sin\varphi}$, $v_C=\frac{v}{\sin\varphi}$,其中 $\sin\varphi=\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{2}\frac{vt}{R}-\left(\frac{vt}{R}\right)^2}$

7-12 $\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}\omega_0 t}\right)$; $\omega=\omega_0 e^{\sqrt{3}\varphi}$

7-13 $\boldsymbol{\omega}=2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\alpha}=-1.5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}_C=(-388.9\boldsymbol{i}+176.8\boldsymbol{j})$ mm/s^2

7-14 $\boldsymbol{v}=(-8\boldsymbol{i}+4.8\boldsymbol{j}-3.6\boldsymbol{k})$ m/s

$\boldsymbol{a}=(-240\boldsymbol{i}-256\boldsymbol{j}+192\boldsymbol{k})$ m/s^2

第 八 章

8-1 $x'=v_e t$

$y'=a\cos(kt+\beta)$;

$y'=a\cos\left(\frac{k}{v_e}x'+\beta\right)$

8-2 相对轨迹为圆:$(x'-40)^2+y'^2=1\,600$

绝对轨迹为圆:$(x+40)^2+y^2=1\,600$

8-3 $v_r=10.06$ m/s, $\angle(\boldsymbol{v}_r,R)=41°48'$

8-4 $v_a=3.059$ m/s

8-5 $v_A=\frac{lav}{x^2+a^2}$

8-6 $v_r=63.62$ mm/s, $\angle(\boldsymbol{v}_r,\boldsymbol{v})=80°57'$

8-7 a: $\omega_2=1.5$ rad/s;

b: $\omega_2=2$ rad/s

8-8 当 $\varphi=0°$时,$v=\frac{\sqrt{3}}{3}r\omega$,向左

当 $\varphi=30°$时,$v=0$

当 $\varphi=60°$时，$v=\frac{\sqrt{3}}{3}r\omega$，向右

8-9 $v_C=\frac{av}{2l}$

8-10 $v_{AB}=e\omega$

8-11 $v_M=0.529\ \mathrm{m/s}$

8-12 $v_r=\frac{\omega\rho\sin\theta}{\cos(\theta-\beta)}$

8-13 $v=\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\theta}$

8-14 $v_r=316.2\ \mathrm{mm/s}$，　$a_r=500\ \mathrm{mm/s^2}$；

8-15 $\boldsymbol{v}_{AB}=-(37.32\boldsymbol{i}'+10\boldsymbol{j}')\ \mathrm{m/s}$

$\boldsymbol{a}_{AB}=-4\boldsymbol{j}'\mathrm{m/s^2}$

8-16 $v_r=36.74\ \mathrm{mm/s}$，　$a_r=30.62\ \mathrm{mm/s^2}$

$\omega=0.5\ \mathrm{rad/s}$，　$\alpha=-0.5\ \mathrm{rad/s^2}$

8-17 $v=0.1\ \mathrm{m/s}$，　$a=0.346\ \mathrm{m/s^2}$

8-18 $v_r=0.052\ \mathrm{m/s}$，　$a_r=0.005\ 27\ \mathrm{m/s^2}$

$\omega=0.175\ \mathrm{rad/s}$，　$\alpha=0.035\ 2\mathrm{rad/s^2}$

8-19 $v=0.173\ \mathrm{m/s}$，　$a=0.05\ \mathrm{m/s^2}$

8-20 $\omega_1=\frac{\omega}{2}$，　$\alpha_1=\frac{\sqrt{3}}{12}\omega^2$

8-21 $v_r=\frac{2}{\sqrt{3}}v_0$，　$a_r=\frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{v_0^2}{R}$

8-22 $x=0.1t^2\ \mathrm{m}$，　$y=h-0.05t^2\ \mathrm{m}$；$y=h-\frac{x}{2}$；

$v=0.1\sqrt{5}t\ \mathrm{m/s}$，　$a=0.1\sqrt{5}\ \mathrm{m/s^2}$

8-23 $a_A=0.746\ \mathrm{m/s^2}$

8-24 $a_1=r\omega^2-\frac{v^2}{r}-2\omega v$

$a_2=\sqrt{\left(r\omega^2+\frac{v^2}{r}+2\omega v\right)^2+4r^2\omega^4}$

8-25 $a_M=355.5\ \mathrm{mm/s^2}$

8-26 $v_M=0.173\ \mathrm{m/s}$，　$a_M=0.35\ \mathrm{m/s^2}$

8-27 $v=0.325\ \mathrm{m/s}$，　$a=0.657\ \mathrm{m/s^2}$

8-28 $a_M=\sqrt{(b+v_rt)^2\omega^4+4\omega^2v_r^2}\sin\theta$

第 九 章

9-1 $x_C=r\cos\omega_O t$，　$y_C=r\sin\omega_O t$；　$\varphi=\omega_O t$

9-2 $x_A=0$, $y_A=\frac{1}{3}gt^2$; $\varphi=\frac{g}{3r}t^2$

9-3 $x_A=(R+r)\cos\frac{\alpha t^2}{2}$, $y_A=(R+r)\sin\frac{\alpha t^2}{2}$;

$\varphi_A=\frac{1}{2r}(R+r)\alpha t^2$

9-4 $\omega=\frac{v\sin^2\theta}{R\cos\theta}$

9-5 $v_{BC}=2.513$ m/s

9-6 $\omega_{ABD}=1.072$ rad/s; $v_D=0.254$ m/s

9-7 $\omega_{OD}=10\sqrt{3}$ rad/s, $\omega_{DE}=\frac{10}{3}\sqrt{3}$ rad/s

9-8 $v_F=0.462$ m/s; $\omega_{EF}=1.333$ rad/s

9-9 当 $\varphi=0°,180°$时, $v_{DE}=4$ m/s

当 $\varphi=90°,270°$时, $v_{DE}=0$

9-10 $\omega_{OB}=3.75$ rad/s, $\omega_{\mathrm{I}}=6$ rad/s

9-11 $n=10\ 800$ r/min

*9-12 $v_F=1.295$ m/s

9-13 $\omega_{O_1}=\frac{(b_1+b_2)r_2v}{a_1b_2r_2-a_2b_1r_1}$

9-14 $a_C=2r\omega_O^2$

9-15 $v_O=\frac{R}{R-r}v$; $a_O=\frac{R}{R-r}a$

9-16 $v_B=2$ m/s, $v_C=2.828$ m/s;

$a_B=8$ m/s^2, $a_C=11.31$ m/s^2

9-17 $v_M=0.098$ m/s, $a_M=0.013$ m/s^2

9-18 $a_n=2r\omega_O^2$, $a_t=r(\sqrt{3}\omega_O^2-2\alpha_O)$

9-19 $v_C=\frac{3}{2}r\omega_O$; $a_C=\frac{\sqrt{3}}{12}r\omega_O^2$

9-20 $\omega=-1$ rad/s, $\alpha=2$ rad/s^2; $v_C=0.05$ m/s↑, $a_C=0.1$ m/s^2↓;

$v_D=0.2$ m/s↑, $a_D=0.427$ m/s^2↘; $v_E=0.1$ m/s↓, $a_E=0.25$ m/s^2↖

9-21 $a_A=2.423$ m/s^2, $a_A=5.233$ m/s^2

9-22 $\omega=2$ rad/s, $\alpha=2$ rad/s^2

*9-23 $\omega_{O_1C}=6.186$ rad/s, $\alpha_{O_1C}=78.17$ rad/s^2

9-24 $\omega_{O_1A}=0.2$ rad/s, $\alpha_{O_1A}=0.046\ 2$ rad/s^2

9-25 $v_{DB}=1.155\ l\omega_O$, $a_{DB}=2.222\ l\omega_O^2$

*9-26 $v_{AB}=v\tan\theta$, $v_r=v\tan\theta\tan\frac{\theta}{2}$,

$$a_{AB}=a\tan\theta+\frac{v^2}{R\cos\theta}\left(1+\tan\theta\tan\frac{\theta}{2}\right)^2$$

*9－27 $v_{CD}=\frac{0.2}{3}\sqrt{3}$ m/s, $a_{CD}=\frac{2}{3}$ m/s^2

9－28 (1) $v_C=0.4$ m/s, $v_r=0.2$ m/s;

(2) $a_C=0.159$ m/s^2, $a_r=0.139$ m/s^2

9－29 $v_E=\frac{v}{2}$, $a_E=\frac{7}{8\sqrt{3}}\frac{v^2}{b}$; $\omega=\frac{3}{4}\frac{v}{b}$, $\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{v^2}{b^2}$

9－30 $v_B=1.029$ m/s, $a_B=-5.237$ m/s^2

*9－31 $v_{C'}=6.865\ r\omega_O$, $a_{C'}=16.14\ r\omega_O^2$

*9－32 $\varphi=0°$时，$v=0.15$ m/s; $\varphi=45°$时，$v=0.49$ m/s;

$\varphi=90°$时，$v=0.588$ m/s

*9－33 $v_3=v_1\frac{ay}{x^2}-v_2\frac{a-x}{x}$; $\omega_4=\frac{v_1y-v_2x}{x^2+y^2}$

*9－34 $v_{r1}=0.6$ m/s, $v_{r2}=0.9$ m/s, $v_M=0.459$ m/s

$a_{r1}=2.816$ m/s^2, $a_{r2}=4.592$ m/s^2, $a_M=2.5$ m/s^2

*9－35 a $v_C=r\omega\leftarrow$, b $v_C=\frac{\sqrt{3}}{3}r\omega\leftarrow$

c $v_C=\sqrt{3}r\omega\leftarrow$, d $v_C=\frac{4}{3}r\omega\leftarrow$

*9－36 a $a_C=\frac{5\sqrt{3}}{12}r\omega^2\leftarrow$, b $a_C=\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)r\omega^2\leftarrow$

c $a_C=4r\omega^2\rightarrow$, d $a_C=\frac{4\sqrt{3}}{9}r\omega^2\leftarrow$

第十章

10－1 $n_{max}=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{fg}{r}}$ r/min

10－2 $t=\sqrt{\frac{h}{g}\frac{m_1+m_2}{m_1-m_2}}$

10－3 (1) $F_{Nmax}=m(g+e\omega^2)$; (2) $\omega_{max}=\sqrt{\frac{g}{e}}$

10－4 $n=67$ r/min

10－5 $h=78.4$ mm

10－6 $F=m\left(g+\frac{l^2v_0^2}{x^3}\right)\sqrt{1+\left(\frac{l}{x}\right)^2}$

*10－7 $F_N=0.284$ N

*10－8 $F=\frac{\sqrt{3}}{2}$ mg

10－9　$F=488.56$ kN

10－10　时间 $t=2.02$ s；　路程 $s=7.07$ m

10－11　椭圆 $\frac{x^2}{x_0^2}+\frac{k}{m}\frac{y^2}{v_0^2}=1$

10－12　$x=\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt})$，　$y=h-\frac{g}{k}t+\frac{g}{k^2}(1-e^{-kt})$；

轨迹为：$y=h-\frac{g}{k^2}\ln\frac{v_0}{v_0-kx}+\frac{gx}{kv_0}$

10－13　圆，半径为 $\frac{mv_0}{eH}$

第十一章

11－1　$f=0.17$

11－2　$F=1\,068$ N

11－3　向左移动 0.266 m

11－4　向左移动 $\frac{a-b}{4}$

11－5　$\Delta v=0.246$ m/s

11－6　椭圆 $4x^2+y^2=l^2$

11－7　$p=\frac{l\omega}{2}(5m_1+4m_2)$，方向与曲柄垂直且向上

11－8　$a=\frac{m_2b-f(m_1+m_2)g}{m_1+m_2}$

*11－9　$a_A=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+3}g$；　$F_N=\frac{12m_Bg}{\sin^2\theta+3}$

11－10　$\ddot{x}+\frac{k}{m+m_1}x=\frac{m_1l\omega^2}{m+m_1}\sin\varphi$

11－11　$x_C=\frac{m_3l}{2(m_1+m_2+m_3)}+\frac{m_1+2m_2+2m_3}{2(m_1+m_2+m_3)}l\cos\omega t$，

$y_C=\frac{m_1+2m_2}{2(m_1+m_2+m_3)}l\sin\omega t$；

$F_{x\max}=\frac{1}{2}(m_1+2m_2+2m_3)l\omega^2$

11－12　$F_x=-(m_1+m_2)e\omega^2\cos\omega t$，　$F_y=-m_2e\omega^2\sin\omega t$

11－13　$F_x=-138.6$ N，　$F_y=0$

11－14　$F_x=\rho q_V(v_1+v_2\cos\theta)$ N

11－15　$F_x=30$ N

11－16　$F_x=67.82$ N

第十二章

12－1　$L_O=2ab\omega m\cos^3\omega t$

12-2 (a) $L_O = 18\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$; (b) $L_O = 20\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$;
(c) $L_O = 16\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$

12-3 (1) $p = \frac{R+e}{R} m v_A$, $L_B = [J_A - me^2 + m(R+e)^2]\frac{v_A}{R}$;
(2) $p = m(v_A + e\omega)$, $L_B = (J_A + mRe)\omega + m(R+e)v_A$

12-4 $\omega = \frac{2m_2 art}{m_1 R^2 + 2m_2 r^2}$; $\alpha = \frac{2m_2 ar}{m_1 R^2 + 2m_2 r^2}$

12-5 $\omega = \frac{ml(1-\cos\varphi)v_0}{J + m(l^2 + r^2 + 2lr\cos\varphi)}$

12-6 (1) $\omega = \frac{J_1\omega_0}{J_1 + J_2}$; (2) $M_f = \frac{J_1 J_2 \omega_0}{(J_1 + J_2)t}$

12-7 $\alpha_1 = \frac{2(R_2 M - R_1 M')}{(m_1 + m_2)R_1^2 R_2}$

12-8 $J = 1\ 060\ \mathrm{kg\cdot m^2}$; $M_f = 6.024\ \mathrm{N\cdot m}$

12-9 $t = \frac{1}{k} J \ln 2$; $n = \frac{J\omega_0}{4\pi k}$

12-10 $M_z = 365.4\ \mathrm{N\cdot m}$

12-11 $t = \frac{r_1\omega}{2fg\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)}$

12-12 $J_{AB} = mgh\left(\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{h}{g}\right)$

12-13 $\rho = 90\ \mathrm{mm}$

12-14 $a_A = \frac{m_1 g(r+R)^2}{m_1(R+r)^2 + m_2(\rho^2 + R^2)}$

12-15 (1) $x_C = 0$, $y_C = 0.4\pi t - \frac{1}{2}gt^2$, $\varphi = \pi t$;
(2) $t = 2$ s, $\varphi = \pi t = 2\pi$ rad, 杆在水平位置, $y_A = y_B = y_C = -17.1$ m;
(3) $F_T = 3.95$ N

12-16 $v = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$; $F_T = \frac{1}{3}mg$

12-17 $\alpha = \frac{3g}{2l}\cos\varphi$; $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}$; $\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\varphi_0\right)$

12-18 $a = \frac{F - f(m_1 + m_2)g}{m_1 + \frac{m_2}{3}}$

12-19 $a = \frac{4}{7}g\sin\theta$; $F = -\frac{1}{7}mg\sin\theta$

12-20 $t = \frac{v_0 - \omega_0 r}{3fg}$; $v = \frac{2v_0 + r\omega_0}{3}$

12-21 $a_C = 0.355g$

12－22 $a_A=\frac{7}{23}g$； $a_B=\frac{21}{46}g$

12－23 (1) $a=\frac{4}{5}g$； (2) $M>2mgr$

12－24 (1) $F_{AB}=7.35$ N,向左； $F_{Dx}=66.15$ N， $F_{Dy}=29.4$ N;
(2) $a=3g$； $F_{Dx}=88.2$ N， $F_{Dy}=29.4$ N

第十三章

13－1 $W=109.7$ J

13－2 $W=6.29$ J

13－3 $T=\frac{1}{2}(3m_1+2m)v^2$

13－4 $T=\frac{1}{6}ml^2\omega^2\sin^2\theta$

13－5 $v=8.1$ m/s

13－6 $n=412$ r/min

13－7 $v_A=\sqrt{\frac{3}{m}[M\theta-mgl(1-\cos\theta)]}$

13－8 $v=2.512$ m/s

13－9 $v_2=\sqrt{\frac{4gh(m_2-2m_1+m_4)}{8m_1+2m_2+4m_3+3m_4}}$

13－10 $x_2:x_1=(2m_2+m_1):(2m_2+3m_1)$

13－11 (1) 圆盘的角速度 $\omega_B=0$,连杆的角速度 $\omega_{AB}=4.95$ rad/s;
(2) $\delta_{max}=87.1$ mm

13－12 $v=\sqrt{\frac{2(M-m_1gr\sin\theta)}{r(m_1+m_2)}s}$； $a=\frac{M-m_1gr\sin\theta}{r(m_1+m_2)}$

13－13 $\omega=\frac{2}{R+r}\sqrt{\frac{3M\varphi}{9m_1+2m_2}}$； $\alpha=\frac{6M}{(R+r)^2(9m_1+2m_2)}$

13－14 $\omega_a=\frac{2.47}{\sqrt{a}}$ rad/s； $\omega_b=\frac{3.12}{\sqrt{a}}$ rad/s

13－15 $b=\frac{\sqrt{3}}{6}l$

13－16 $a_A=\frac{3m_1g}{4m_1+9m_2}$

13－17 $M_{主}=188.2$ N·m; $M_{电}=42.4$ N·m; $P_{电}=6.31$ kW

13－18 $P=0.369$ kW

综合问题

综－1 $v=2\cos\varphi\sqrt{R\left(g+\frac{kR}{m}\right)}$；

$F_N=2kR\sin^2\varphi-mg\cos2\varphi-4(mg+kR)\cos^2\varphi$

综-2 $F_n=20g(2-3\cos\varphi),F_t=0$； 当 $\varphi=\pi$ 时，$F_{max}=980$ N(拉)；

当 $\varphi=\arccos\dfrac{2}{3}=48°11'$ 时，$F_{min}=0$

综-3 (1) 小球运动方程以极坐标表示为：$r=R-vt,\varphi=\dfrac{v_0t}{R-vt}$；

(2) $F=\dfrac{mv_0^2R^2}{(R-vt)^3}$

综-4 (1) $a=a_t=\dfrac{1}{2}g=4.9\ \mathrm{m/s^2}$， $F_A=72$ N， $F_B=268$ N；

(2) $a=a_n=(2-\sqrt{3})g=2.63\ \mathrm{m/s^2}$， $F_A=F_B=248.5$ N

综-5 $a_B=\dfrac{m_1g\sin2\theta}{2(m_2+m_1\sin^2\theta)}$

综-6 $F=\dfrac{M(m_1+2m_2)}{2R(m_1+m_2)}$

综-7 $\omega_B=\dfrac{J\omega}{J+mR^2}$， $v_B=\sqrt{\dfrac{2mgR-J\omega^2\left[\dfrac{J^2}{(J+mR^2)^2}-1\right]}{m}}$；

$\omega_C=\omega,v_C=\sqrt{4gR}$

综-8 $F=9.8$ N

综-9 $a_{BC}=-r\omega^2\cos\omega t$； $F_{ox}=-r\omega^2\left(\dfrac{m_1}{2}+m_2\right)\cos\omega t$，

$F_{oy}=m_1g-\dfrac{1}{2}m_1r\omega^2\sin\omega t$；

$M=r\left(\dfrac{1}{2}m_1g+m_2r\omega^2\sin\omega t\right)\cos\omega t$

综-10 $v_r=\sqrt{\dfrac{8}{3}gr}$， $F_N=\dfrac{11}{3}mg$

综-11 $\omega=\sqrt{\dfrac{3g}{2l}}$； $x_C^2+3ly_C+3l^2=0$

综-12 $a=\dfrac{m_1\sin\theta-m_2}{2m_1+m_2}g$； $F=\dfrac{3m_1m_2+(2m_1m_2+m_1^2)\sin\theta}{2(2m_1+m_2)}g$

综-13 $a_A=\dfrac{1}{6}g$； $F=\dfrac{4}{3}mg$； $F_{Kx}=0$， $F_{Ky}=4.5mg$， $M_K=13.5mgR$

综-14 (1) $a=\dfrac{M-mgR\sin\theta}{2mR^2}$； (2) $F_x=\dfrac{1}{8R}(6M\cos\theta+mgR\sin2\theta)$

综-15 $\omega=\sqrt{\dfrac{3m_1+6m_2}{m_1+3m_2}\dfrac{g}{l}\sin\theta}$； $a=\dfrac{3m_1+6m_2}{m_1+3m_2}\dfrac{g}{2l}\cos\theta$

综-16 $a=\dfrac{m_2\sin2\theta}{3m_1+m_2+2m_2\sin^2\theta}g$

综-17 $F_N=\dfrac{7}{3}mg\cos\theta$； $F=\dfrac{1}{3}mg\sin\theta$

综－18 $\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}\left(1-\sin\varphi\right)}$； $\alpha=\frac{3g}{2l}\cos\varphi$；

$F_A=\frac{9}{4}mg\cos\varphi\left(\sin\varphi-\frac{2}{3}\right)$，

$F_B=\frac{mg}{4}\left[1+9\sin\varphi\left(\sin\varphi-\frac{2}{3}\right)\right]$

综－19 (1) $\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$， $\alpha=\frac{3g}{2l}\sin\theta$，

$F_{Bx}=\frac{3}{4}mg\sin\theta(3\cos\theta-2)$，

$F_{By}=mg-\frac{3}{4}mg(3\sin^2\theta+2\cos\theta-2)$；

(2) $\theta_1=\arccos\frac{2}{3}$；

(3) $v_C=\frac{1}{3}\sqrt{7gl}$， $\omega=\sqrt{\frac{8g}{3l}}$

综－20 (1) $\Delta p=\frac{3Mt}{2l}$； $\Delta L=Mt$； $\Delta T=\frac{3}{2}\frac{M^2t^2}{ml^2}$；

(2) $F_{Cx}=F_{Dx}=\frac{3}{4}\frac{M}{l}$， $F_{Cy}=F_{Dy}=\frac{9}{4}\frac{M^2t^2}{ml^3}$

第十四章

14－1 (1) $a\leqslant 2.91\ \mathrm{m/s^2}$； (2) $\frac{h}{d}\geqslant 5$ 时先倾倒

14－2 $F_{NA}=m\frac{bg-ba}{c+b}$， $F_{NB}=m\frac{cg+ha}{c+b}$

$a=\frac{(b-c)g}{2h}$时，$F_{NA}=F_{NB}$

14－3 $m_3=50\ \mathrm{kg}$， $a=2.45\ \mathrm{m/s^2}$

14－4 $\omega^2=g\frac{2m_1+m_2}{2m_1(a+l\sin\varphi)}\tan\varphi$

14－5 $(J+mr^2\sin^2\varphi)\ddot{\varphi}+mr^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi=M$

14－6 $\alpha=47\ \mathrm{rad/s^2}$； $F_{Ax}=-95.34\ \mathrm{N}$， $F_{Ay}=137.72\ \mathrm{N}$

14－7 $F_n=\rho r^2\omega^2\sin\theta$(圆环法向)，

$F_t=\rho r^2\omega^2(1+\cos\theta)$(圆环切向)； $M_B=\rho r^3\omega^2(1+\cos\theta)$

14－8 $x=be^{\frac{\omega^2}{g}y}$

14－9 (1) $\omega=\sqrt{\frac{k(\varphi-\varphi_0)}{ml^2\sin 2\varphi}}$；

(2) $F_{Bx}=0$，$F_{By}=-\frac{ml^2\omega^2\sin 2\varphi}{2b}$；

$F_{Ax}=0$，$F_{Ay}=\frac{ml^2\omega^2\sin 2\varphi}{2b}$， $F_{Az}=2mg$

14－10 $a=\frac{m_2r-m_1R}{J+m_1R^2+m_2r^2}g$；轴 O 附加动反力

$F'_{Ox}=0,\quad F'_{Oy}=\frac{-g(m_2r-m_1R)^2}{J_O+m_1R^2+m_2r^2}$

14－11 $F_{Cx}=0,\quad F_{Cy}=\frac{3m_1+m_2}{2m_1+m_2}m_2g,\quad M_C=\frac{3m_1+m_2}{2m_1+m_2}m_2ga$

14－12 $a=\frac{(iM-mgR)R}{mR^2+J_1i^2+J_2}$

14－13 $F_B=9.8\ \text{kN}$

14－14 $\omega=\frac{\sqrt{2ra}}{\rho}$

14－15 $M=\frac{\sqrt{3}}{4}(m_1+2m_2)gr-\frac{\sqrt{3}}{4}m_2r^2\omega^2$；

$F_{Ox}=-\frac{\sqrt{3}}{4}m_1r\omega^2$；

$F_{Oy}=(m_1+m_2)g-(m_1+2m_2)\frac{r\omega^2}{4}$

14－16 $F_{Ox}=\frac{11}{4}mr\omega_O^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}mg,\quad F_{Oy}=\frac{3\sqrt{3}}{4}mr\omega_O^2+\frac{5}{2}mg$；

$M=\frac{3\sqrt{3}}{4}mr^2\omega_O^2+2mgr$

14－17 $a=\frac{8}{11}\frac{F}{m}$

14－18 $F_{NB}=\frac{2}{9}m\omega_O^2r+2mg+\frac{\sqrt{3}F}{3};\quad M_O=\frac{2\sqrt{3}}{3}m\omega_O^2r^2+Fr$

14－19 $F_{NA}=-F_{NB}=74\ \text{N}$

14－20 $y_B=0,\quad z_B=-120\ \text{mm};\quad y_C=0,\quad z_C=60\ \text{mm}$

第十五章

15－1 $F_N=\frac{1}{2}F\tan\theta$

15－2 $F_N=\pi\frac{M}{h}\cot\theta$

15－3 $M=\frac{1}{2}Fr$

15－4 $F_N=\frac{F}{2}\frac{e(d+c)}{bc}$

15－5 $F_2=\frac{F_1l}{a\cos^2\varphi}$

15－6 $F=\frac{M}{a}\cot 2\theta$

15-7 $M=450\dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\cos^3\theta}\text{N}\cdot\text{m}$

15-8 $AC=x=a+\dfrac{F}{k}\left(\dfrac{l}{b}\right)^2$

15-9 $\tan\varphi=\dfrac{P_1}{2(P_1+P_2)}\cot\theta$

15-10 $\dfrac{F_1}{F_2}=\dfrac{2l_1\sin\theta}{l_2+l_1(1-2\sin^2\theta)}$

15-11 曲线方程为：$\dfrac{x^2}{4l^2}+\dfrac{y^2}{l^2}=1$

15-12 $F=\dfrac{Pl}{\sqrt{2}a}\tan\theta\sqrt{1+\sin\theta}$

15-13 $M=2RF$，　$F_s=F$

15-14 $\delta=-\dfrac{ql}{6k_1}$，　$\varphi=\dfrac{Pl}{2k_2}$

15-15 $F_3=P$

15-16 $F_A=-2\ 450\ \text{N}$，　$F_B=14\ 700\ \text{N}$，　$F_E=2\ 450\ \text{N}$

索　　引

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

Z

Synopsis

The first five editions of this book, with about 70 000 copies issued per year, are popular among the professors and students in the field of mechanics. The present edition is scheduled as one of the key textbooks of the Ministry of Education of China. It remains the previous features and system of rigorous deduction, distinct logic, stepwise to profundity and convenient for education. The new edition gently raises the starting point, and some new materials are added for the increasing needs of the 21st century.

This book consists of two volumes. Volume I covers the content of statics (Including the free-body diagram, planar force systems and couple systems, spatial force systems, friction, etc.), kinematics (Including the kinematics of a particle, the simple motion of a rigid body, resultant motion of a particle, plane motion of a rigid body, etc.), dynamics (Including the particle dynamics, theorems of linear momentum, angular momentum and kinetic energy of particle systems, D'Alembert's principle, principle of virtual displacement, etc.). For most specialties with moderate period of theoretical mechanics, the use of Volume I should be enough. Volume II comprises the particle dynamics in non-inertial reference frame, collision, elements of analytical mechanics (Including the fundamental equations of dynamics, Lagrange's equations of the first and the second kind, etc.), mechanical vibration (Including the free and forced vibration of the systems with one and two degrees of freedom, isolation of vibration, dynamic vibration inhibitor, etc.), motion of rigid body with a fixed point, approximate theory of gyroscope and dynamics of a body with variable mass. Plenty of Illustrations, questions and exercises are designed in this book. For different specialties the materials can be selected and used accordingly.

This book is intended for the engineering student as the textbook of the course of "theoretical mechanics". It can also be used as a reference book for students and engineers in related areas.

Contents

主编简介



王铎教授，1920年生，1938年至1942年在中央大学土木系学习，毕业后从事教学工作。1950年到哈尔滨工业大学任教，曾任理论力学教研室主任，固体力学博士生导师，先后受聘为高教部高等工科力学教材编审委员会委员与国家教委高等工科力学课程指导委员会委员。长期从事理论力学课程教学与培养研究生工作，研究方向为断裂动力学与细观力学。编著有《理论力学》、《理论力学解题指导与习题集》和《断裂力学》等。曾获国家教委教学成果优秀奖。

主编简介



程靳,1945年生,哈尔滨工业大学理论力学教研室主任,教授,博士生导师。长期从事"理论力学"、"断裂力学"、"张量分析与连续介质力学"、"断裂力学专题"、"断裂动力学"、"非线性连续介质力学"等本科、硕士生及博士生的教学与培养研究生工作。主要研究方向为"断裂动力学"、"疲劳与损伤"、"非局部场理论"等,曾主持多项国家自然科学基金、航天基金,并承担多项断裂力学领域的应用课题。

主要编著有《理论力学》、《工程力学》第一、二、三册、《断裂动力学》、《理论力学试题精选与答题技巧》、《理论力学思考题解与思考题集》等10部教材与专著,共约300余万字,在国内外学术刊物发表学术论文100余篇。2000年曾获国家级优秀教学成果奖。

责任编辑　王宪平
封面设计　李卫青
责任绘图　朱　静
版式设计　胡志萍
责任校对　陈　荣
责任印制　宋克学

